

産業能率大学紀要

第41巻 第1号
2020年 9月

論文

- “PASCAL for Global”：「グローバルマネジメント特性診断」の妥当性
平田 譲二 ……………1
- 中小企業の生き残り戦略 ～海外進出の要は、自社ブランド保有か？～
三村 孝雄 ……………19

研究ノート

- チェビシェフ多項式基本型とエルミート多項式基本型との関係
手代木琢磨
勝間 豊 ……………41



「産業能率大学紀要」執筆要項

産業能率大学紀要審査委員会

1. 投稿資格

次の条件を満たすものとする。

- (1) 産業能率大学情報マネジメント学部・経営学部および自由が丘産能短期大学の専任教員を原則とする。
- (2) 共著の場合には、少なくとも一名は、上記(1)の資格を有するものであること。
- (3) 本務校を持たない産業能率大学情報マネジメント学部・経営学部および自由が丘産能短期大学の兼任教員。
- (4) 上記(1)、(2)、(3)以外で、紀要審査委員会が適当と認めた者。

2. 原稿の種類

原稿は、邦文もしくは欧文の、他の刊行物に未発表のもので、論文、研究ノート、事例研究、資料、その他（書評、紹介、報告）のいずれかに該当するものに限る。

3. 原稿構成

原稿には、次のものを含むこと。

- (1) 邦文および欧文の表題。
- (2) 邦文および欧文で書かれた執筆者名と所属。
- (3) 論文と研究ノートの場合は150語程度の欧文抄録。

4. 原稿の量および投稿方法

- (1) 14,000字前後とする。
- (2) 欧文原稿の場合は、A 4判の用紙を用い、ダブルスペースで30枚以内を原則とする。
- (3) 完成原稿をメール添付にて事務局宛に送付する。手書きは不可。なお、セキュリティ上、パスワードを設定し、送信履歴を残す。

5. 表記

- (1) 原則として、常用漢字、現代かなづかいを用いる。
- (2) 表題の脚注
 - (a) 学会等に発表している場合には、「本論文は、学会名、講演会名、発表日、場所、において発表した。」というように注記する。
 - (b) 原稿受理日は、事務的に入れる。
- (3) 章、節などの記号
章の記号は、1. 2. ……、節の記号は、1. 1.、1. 2. ……、2. 1.、2. 2. ……のように付ける。
- (4) 脚注
 - (1)、(2)のように、注記の一連番号を参照箇所の右肩に書き、注記そのものは、本文の最後に一連番号を付けてまとめる。

(例)

……価格理論の一部として、取り扱われていることになり(1)…… (本文)

(1) 価格理論では、このことを特に「機能的分配の理論」と呼んでいる。(注記)

(5) 文献の引用

文章の一部に引用文献の著者名を含む場合は、著者名、続いて文献の発行年度を〔 〕で囲む(例1)

文章の外で文献を引用する場合は、著者名、発行年度を〔 〕で囲む(例2) 同一著者、同一年度の文献を複数個引用する場合は、発行年度の次に a, b, ……と一連の記号を付ける。

(例1) 文章中の引用

Minsky と Papert〔1969〕のパーセプトロンでは……岩尾〔1979a〕は、すでに述べた…

(例2) 文章の外の引用

関係完備制が証明された〔Codd 1971a〕

Example〔von Neumann and Morgenstern 1944〕

(6) 参考文献

本文中で引用した文献は、参考文献として著者名のアルファベット順にまとめる。書誌記述は、単行図書の場合は『著者名：書名、出版社、出版年、(その単行図書の一部を引用する場合には) ページ』の順に記述する。

(例1) 和書の場合

テイラー，F.W. 著 上野陽一訳編：科学的管理法、産業能率短期大学出版部、1969

(例2) 洋書の場合

Abrial,J.R. : Data Semantics, Proc.IFIP Working Conference on Data Base Management, North-Holland, 1974, pp.1-60

雑誌の場合は『執筆者名：表題、雑誌名、巻(号)、出版年、ページ』の順とする。

(例1) 和雑誌の場合

小田稔：マイクロ波の朝永理論、科学、49 (12) , 1979, pp.795-798

(例2) 洋雑誌の場合

Kipp, E.M. : Twelve Guides to Effective Human Relations in R. & D., Research Management, 7(6), 1964, pp.419-428

(7) 図・表

図・表は、一枚の用紙に一つだけ書き、図・表のそれぞれに、図1 - 1 (Figure 1-1)、表1 - 1 (Table 1-1) のように一連番号を付け、タイトルを記入する。

6. 投稿期日

9月刊行の号は4月上旬、2月刊行の号は9月中旬を締め切りとする。ただし、投稿は随時受け付ける。

7. 投稿原稿の審査

原稿の採否は紀要審査委員会において決定する。採用された原稿について、加筆、修正が必要な場合は、一部の書き直しを要求する場合がある。また、表記などの統一のため、紀要審査委員会で一部改める場合もある。なお、原稿のテーマによっては紀要審査委員以外のものに原稿の査読を依頼することがある。

8. 執筆者校正

校正は執筆者の責任において行うこととする。(校正段階における加筆は、印刷の進行に支障を来すので、完全原稿を提出すること。)

9. 著作物の電子化と公開許諾

本誌に掲載された著作物の著作権は執筆者に帰属するが、次の件は了承される。

- (1) 執筆者は、掲載著作物の本文、抄録、キーワードに関して紀要審査委員会に「電子化公開許諾書」を提出し、著作物の電子化及び公開を許諾するものとする。共著の場合は、すべての執筆者の提出が必要である。
- (2) 上記により難しい場合は、紀要審査委員会に相談する。

10. 掲載論文の別刷

掲載された論文1編につき、本誌1部、別刷100部を無償で執筆者に贈呈する。別刷100部以上は有料とする。

(1991.6.5)

(1994.7.6改正)

(2003.1.7改正)

(2003.9.17改正)

(2013.4.29改正)

(2015.4.24改正)

“PASCAL for Global”：「グローバルマネジメント特性診断」の妥当性

Validity of “PASCAL for Global”：The Global Management Trait Diagnosis

平田 譲二

Joji Hirata

Abstract

This exploratory study examines the validity of “PASCAL for Global”： “The Global Management Trait Diagnosis,” which was developed by SANNO Institute of Management in 2017. The diagnosis is intended to measure the traits of Japanese employees who achieve high performance in their overseas business.

The best way to examine the validity of “PASCAL for Global” is to measure Japanese employees who really made high performance in their overseas business. Unfortunately, because many companies would not provide such data, we tried to measure students who attended the MBA course at SANNO University Graduate School. Course grades were treated as proxy variables for overseas business performance.

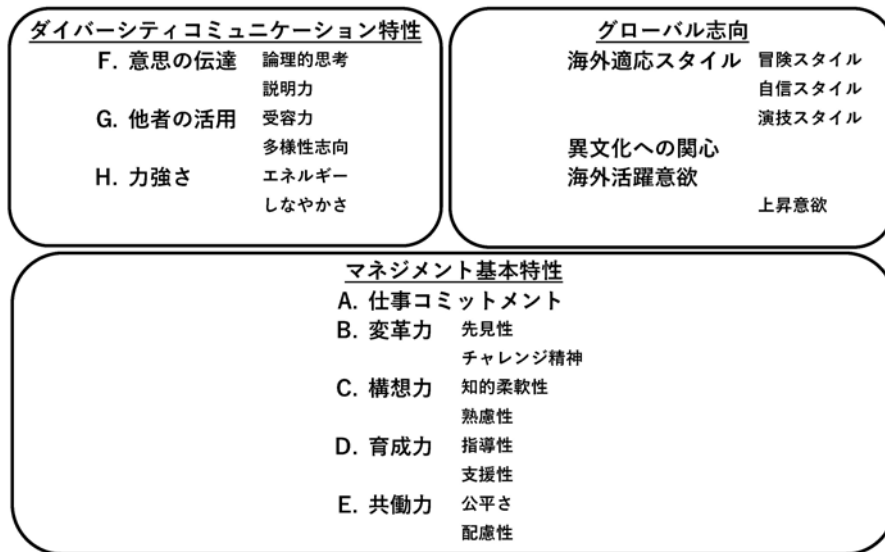
The results revealed that some grades demonstrated the validity of “PASCAL for Global,” whereas others did not.

1. 本研究の目的

“PASCAL for Global”：「グローバルマネジメント特性診断」（以下、P for G）とは、本学総合研究所が開発・商品化し、2017年4月から企業向けに販売を行っている企業人のグローバル特性を診断するツールである。診断の対象者を企業の管理職を含めた中堅社員層と想定しており、彼らがグローバル環境下でリーダーシップを発揮でき、かつ適切なマネジメントを行うために必要な特性の程度を測定するものである。P for G の診断モデルの枠組みは「マネジメント基本特性」をベースの部分として、「ダイバーシティコミュニケーション特性」と「グ

ローバル志向」を加えた3つで構成されており、これら3つの観点から個人の特性を測定するものとなっている。なお、前記の3つの特性・志向に内包される個別の詳細特性の概要は、図表1のようになる。

図表1 3つの特性・志向の関係性



P for G の妥当性（validity）については既に欧陽・堀内〔2018〕が検討を行い、妥当性の検証として一定の成果をあげている。その検証研究のポイントは、約4,000名弱の P for G 受診者全員の測定値平均と受診者の中に含まれる日本人の海外駐在経験者、日本在留の外国人留学生及び本学大学院生のそれぞれの測定値平均とを比較するものである。異文化での生活や仕事経験を積んでいる海外駐在経験者や外国人留学生の測定値平均、さらに仕事をしながら向学心旺盛に大学院に通う院生の測定値平均が、全体の測定値平均より明らかに高いことから、P for G の妥当性の一側面が検証できたとしている。

一方で、P for G の妥当性を検証する手段として最も適していると考えられるのは、以下のようなものであろう。即ち、P for G の受診結果でグローバル特性の程度が高かった企業人が海外赴任し、その後数年間の海外での業績が押しなべて高かった、という追跡調査結果が多く収集できることである。しかし、現代の我が国では、組織研究のためとはいえ個人情報や外部に出すこと避ける企業が多いため、上記の手段を実現化することはほぼ不可能に近い。

そこで本研究では、欧陽・堀内〔2018〕とは別の視点で P for G の妥当性を検証することとする。検証手法としては、G for P 受診者を本学大学院に在籍する院生に限定し、受診結果と

彼らの大学院での特定科目の成績との相関について分析するというものである。なお、授業での成績がグローバル特性の代理変数となり得るかどうかの検討については、後に詳述することとする。

次に、診断ツールの妥当性そのものについて、詳細に検討してみることにする。

2. 妥当性について

社会科学領域の研究においては、妥当性を評価する場合に構成概念妥当性 (construct validity)、内的妥当性 (internal validity)、外的妥当性 (external validity) そして信頼性 (reliability) の4つに基づいて評価することが一般的である。

構成概念妥当性とは、研究対象の事象や概念並びにアイデアなどの各々とそれらのお互いの関係性について、正確な操作的尺度を確立することが要求されている。測定される変数や構成概念の本質は何かという問いに関して、正しい尺度が選択されているかどうかの程度のことである。内的妥当性とは、異なった事象や概念間の関係についての因果的・説明的な状況について、例えば x が y の原因であるかどうかに関する説明の妥当性の程度とされている。一方、外的妥当性とは、研究によって発見された現象や事実が、当該研究の環境を超えてより広い普遍的なものに一般化できるかどうかを見分けられる程度を示している。さらに信頼性とは、用いられた証拠や尺度が一貫しており安定的であるかどうかの程度と言える [Remenyi et al., 1998]。

ここで、P for G の開発プロセスを振り返ってみよう。

異文化対応能力に関する国内外の数多くの既存研究の比較検討から、平田 [2014] が山岸 [1995] の研究成果 (図表2) を抽出し、この成果が個人のもつ異文化対応能力を支える資質を最も適切に説明しているものとして提示した。こうした探索研究の結果をもとに、本学総合研究所は全160件におよぶ質問項目を用意し、海外赴任経験者と非経験者を合わせた2,000人強の調査対象者に対してインターネット調査を行っている。この回答結果を分析することによって、P for G の最終的な質問項目が決定された [三村ほか, 2016]。

以上のプロセスを踏んでいることから欧陽・堀内 [2018] も指摘するように、P for G の内的妥当性は相当程度確保できていると考えられる。但し、P for G の構成概念妥当性、外的妥当性および信頼性についてはどうであろうか。P for G が個人の特定領域の特性のみを診断するツールであることから、外的妥当性の検証はほぼ無視できるとしても、構成概念妥当性と信頼性については十分な検証の必要性があるだろう。

但し、P for G が人間の内面というそれ自体が観ることのできない構成概念 (construct) を測定するツールであることに、着目しなければならない。即ち P for G の妥当性検証については、社会科学に隣接する人文科学の範疇にある心理学領域における妥当性研究の成果を探索

する必要がある。

心理学研究領域においては、心理測定の後には何らかの仮説的な構成概念が存在すると考えるようになり、測定データによって構成概念と測定との対応関係を明確化する考え方が示されるようになった〔Cronbach & Meehl, 1955〕。例えば、人間関係が満たされると内発的動機付けが高まるとされる仮説〔Deci, 1975；Deci & Ryan, 1985〕がある。そこで、被験者の内発的動機付けを測定する尺度を開発した際に、この尺度が人間関係を示す何らかの指標と正の相関が見られたならば、この尺度の構成概念妥当性を支持する1つの証拠が得られたと考えたのである。

図表2 異文化対処力の要素

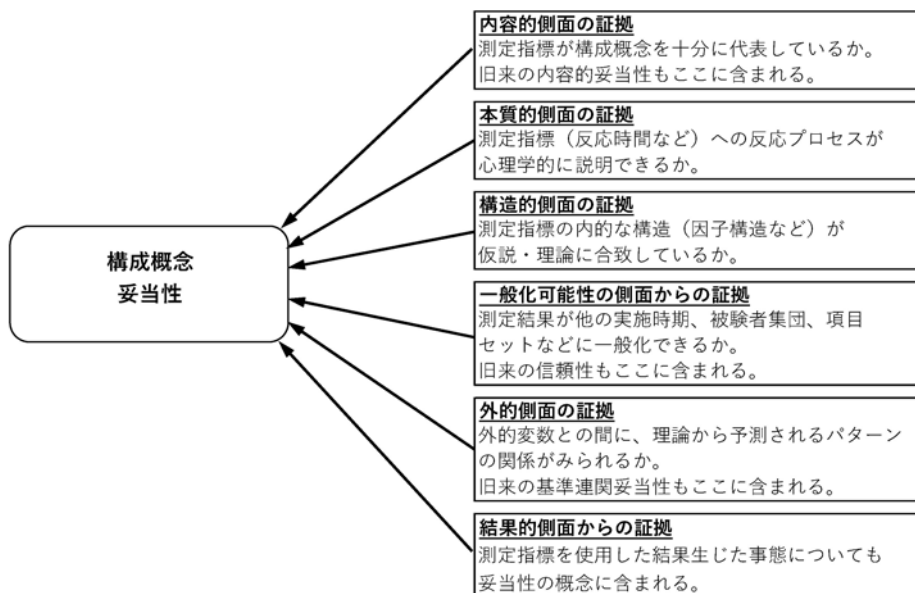


(出典：山岸 1995, p. 216)

その後、妥当性とは基準関連妥当性³ (criterion-related validity)、構成概念妥当性、内容的妥当性⁴ (content validity) という3つのタイプのものから成立しているという考え方が主流となる。しかしその後、この3種の妥当性は重複する部分があることが知られるようになる。例えば、基準関連妥当性における「外部基準」(e.g., 学業成績)は、何らかの構成概念 (e.g., 学力)を測定する1つの指標であることから、測定結果が学業成績と相関していたならば、これは構成概念妥当性の証拠と考えることもできるのである。同じことは、内容的妥当性と構成概念妥当性に関しても言える。内容的妥当性は、尺度の内容が専門家の考える内容領域と一致しているかで検討される。しかし、こうした一致の程度とは一種の観察データである。それ故に内容的妥当性の検討とは、データと理論の適合を調べるという構成概念妥当性の検討と本質的に区別がつかない〔村山 2012, pp. 120-121.〕。

以上のような歴史的議論の経緯を経て、心理学領域では単一的な妥当性として構成概念妥当性こそが妥当性そのものだ、と考えられるようになったのである。ここでいう構成概念妥当性とは、「テストもしくは他の測定結果にもとづいた解釈の適切性について、それを支える実証的証拠や理論的根拠がどの程度あるかに関する総合的な評価」と要約できる〔Messick, 1989〕としている。さらに、構成概念妥当性を支えるためにどのような証拠が必要なのかについて、Messick〔1995〕では以下のような複数のタイプを挙げた (図表3)。

図表3 構成概念妥当性を支える証拠



(出典：Messick, 1995, p. 745；平井 2006, pp. 29-31.)

また測定ツールそのものの妥当性については、妥当性とはあくまで「測定得点の解釈」に対する判断であり、同じ測定ツール・測定結果であっても、目的や解釈によって妥当性は変わってくる。それ故に、構成概念妥当性の検証とはあくまでも程度問題となるのである。

以上の考え方を踏まえると、「××傾向を測定するものとして、○○尺度の測定得点の妥当性を△△程度確かめることができた」というよう表現が、論文記述においてはより適切になる〔村山 2012, p.122.〕と考えられる。なお、Messick の提案から相当の年数を経て2006年に『教育測定学』の第4版が出版され、Michael Kane が妥当性に関する章を執筆したが、妥当性に関する基本的な考え方に大きな変化は見られていない〔Kane, 2006〕。

以上のことから P for G の妥当性検証に関する考察は、構成概念妥当性を支持する証拠に着目していくこととする。

3. 個別分析結果

3. 1 P for G の概要

P for G の診断項目は、図表1で示された「マネジメント基本特性」の A から D での9項目、「ダイバーシティコミュニケーション特性」の F から H での6項目、ならび「グローバル志向」での海外適応スタイル3項目、異文化への関心1項目、最後に海外活動意欲2項目からなっている。診断結果は各項目の偏差値で示されることになるが、異文化への関心と海外活動意欲については、例外的にその関心や意欲が「H：高い」「M：ほどほど」「L：低い」という3段階で示される。そして受診者の総合的な特性は、個人の各項目値の平均値（グローバルマネジメントポテンシャルティ：G. M. ポテンシャルティ）と関心・意欲の程度から判断されることになる。

具体的な理解を促進するために図表4は、2018年7月に行った調査データから総合評価が対照的な受診者2名の実際のデータを例示したものである。なお、グローバル志向のうち関心・意欲の3項目は受診者が自覚している意思・意欲の表明であることから、本研究の妥当性分析の対象から除外しても問題ないであろう。

図表4 調査結果の事例

	G. M. ポ テ ン シ ャ リ テ ィ	マネジメント基本特性									ダイバーシティ コミュニケーション特性						グローバル志向					
		仕 事 コ ミ ツ ト メ ン ト	先 見 性	チ ャ レ ン ジ 精 神	知 的 柔 軟 性	熟 慮 性	指 導 性	支 援 性	公 正 さ	配 慮 性	論 理 的 思 考	説 明 力	受 容 力	多 様 性 志 向	エ ネ ル ギ ー	し な や か さ	冒 険 ス タ イ ル	自 信 ス タ イ ル	演 技 ス タ イ ル	異 文 化 へ の 関 心	海 外 赴 任 意 欲	上 昇 意 欲
Aさん	65	34	74	71	67	67	59	68	62	66	69	69	69	71	64	65	68	64	70	H	H	H
Bさん	30	34	25	25	25	33	30	34	25	25	25	25	25	35	29	29	49	35	47	H	L	L

3. 2 2018年の分析結果

ここからは、P for G の診断結果と受診者の大学院での成績評価との相関について言及していこう。マネジメント基本特性の9項目、ダイバーシティコミュニケーション特性の6項目、グローバル志向3項目の個々の偏差値と、一人の教員が担当する2つ授業「XとY」⁵の成績を構成するそれぞれの個別課題の成績との相関を分析することになる。なお、以下の複数の図表に示される相関係数の値は、サンプルサイズに関係なく -0.200～0.200の値は表記せず、—のように示す。一般的に相関係数が0.2以上あるいは -0.2以下の場合に弱い正・負の相関があるとされるのは、サンプルサイズが100程度の場合に P 値が0.5を下回り5%有意水準を満足する。しかしながら本研究での分析では、サンプルサイズがすべて100を大きく下回ることから、前記の表記基準はあくまでも便宜的なものである。

2018年7～8月に X 授業を受講した学生のうち、P for G を受診した者は37名⁶である。X 授業の成績評価は全体を100%とした場合、授業への参画25%、授業前レポート30%、グループ作業20%、筆記試験25%で評価される。授業への参画評価は、授業内での発言の量と発言内容の論理整合性が評価される。授業前レポートは、現実社会に対する洞察力と思考力⁷が評価される。グループ作業は、課題に対する理解力とグループ成員協働での論理的説明力が評価され、グループ作業への個人の貢献度の多少に拘わらずグループへの評価がそのまま個人の評価となる。筆記試験は90分で行われ、授業内容の重要ポイントに対する正確な理解と設問に対する分析力が評価される。

P for G 診断結果と上記の個別成績評価との相関を見る際には、相関傾向がより顕著に現れ

“PASCAL for Global”：「グローバルマネジメント特性診断」の妥当性

るように、P for G 各項目の偏差値の上位25%と下位25%の学生（計18名）を抽出して相関係数を算出した⁸。

マネジメント基本特性の各項目との分析結果は、①授業への参画と9項目との相関は見られない。②授業前レポートとチャレンジ精神との相関係数は0.302となったが、他の項目との相関は見られない。③グループ作業と9項目との相関は見られない。④筆記試験と熟慮性との相関係数は0.278となったが、他の項目との相関は見られない（図表5）。

図表5 個別成績とマネジメント基本特性の各項目との相関係数（2018, X）

特性項目 成績項目	仕事コミットメント	先見性	チャレンジ精神	知的柔軟性	熟慮性	指導性	支援性	公正さ	配慮性
授業への参画	—	—	—	—	—	—	—	—	—
授業前レポート	—	—	0.302	—	—	—	—	—	—
グループ作業	—	—	—	—	—	—	—	—	—
筆記試験	—	—	—	—	0.278	—	—	—	—

なお、前記の相関係数の P 値を測定すると、サンプルサイズが18で相関係数0.302に対する P 値は0.220となり有意判定は出来ず、相関係数がより小さい0.278についても有意判定できない。以上のことから図表5における相関を認めることはできない。

ダイバーシティコミュニケーション特性の各項目との分析結果は、①授業への参画と6項目との相関は見られない。②授業前レポートと6項目との相関は見られない。③グループ作業と受容性との相関係数は0.368となったが、P 値は0.131となり有意判定は出来ない。なお、他の項目との相関は見られない。④筆記試験と6項目との相関は見られない（図表6）。

図表6 個別成績とダイバーシティコミュニケーション特性・グローバル志向の各項目との相関係数（2018, X）

特性項目 成績項目	論理的思考	説明力	受容性	多様性志向	エネルギー	しなやかさ	冒険スタイル	自信スタイル	演技スタイル
授業への参画	—	—	—	—	—	—	0.269	—	-0.376
授業前レポート	—	—	—	—	—	—	—	—	—
グループ作業	—	—	0.368	—	—	—	—	—	—
筆記試験	—	—	—	—	—	—	—	—	-0.254

グローバル志向の各項目との分析結果は、①授業への参画と冒険スタイルとの相関係数は0.269、演技スタイルとの相関係数は-0.376となったが、演技スタイルとの相関係数の P 値は0.122となり、これも有意判定は出来ない。それ故に、相関係数がより小さい冒険スタイルと

の相関も認められないこととなる。②授業前レポートと3項目との相関は見られない。③グループ作業と3項目との相関は見られない。④筆記試験と演技スタイルとの相関係数は-0.254となっているが、①で記述した通り P 値は有意判定できる値にはならない（同じく図表6）。

以上のように、診断結果と X 授業の個別成績には有意な相関が見られないと言える。

一方、2018年7月に Y 授業を受講した学生のうち、P for G を受診した者は19名である。Y 授業の成績評価は全体を100%とした場合、授業への参画20%、授業後レポート60%、課題検討20%で評価される。授業への参画評価は、発言機会は少ないものの授業内での発言の量と発言内容の論理整合性が評価される。授業後レポートは、外部講師の講演内容の重要ポイントに対する設問に論理整合的に回答できるかが評価される。課題検討は、企業の海外展開をテーマとしたビジネスケースへの理解力と論理構築力が評価される。

P for G 診断結果と上記の個別成績評価との相関を見る際には、X 授業と同様に相関傾向がより顕著に現れるように、P for G 各項目の偏差値の上位25%と下位25%の学生（計10名）を抽出して相関係数を算出した。さらに、X 授業と同様に、-0.200～0.200の相関係数は表示していない。

マネジメント基本特性の各項目との分析結果は図表7の通りであるが、X 授業での相関係数の検定同様に P 値を求めたところ、授業後レポートと熟慮性との相関係数0.644のみが P 値0.039となった。5%有意水準を示す相関件数は、図表の視認性を高めるために黒塗り白文字に*を1つ付けて表記した。なお、P 値が0.05以上で0.10未満を示す相関係数には、参考値としてグレーのマスキングをしている。

図表7 個別成績とマネジメント基本特性の各項目との相関係数（2018, Y）

特性項目 成績項目	仕事コミットメント	先見性	チャレンジ精神	知的柔軟性	熟慮性	指導性	支援性	公正さ	配慮性
授業への参画	0.432	—	—	0.411	0.276	—	0.459	0.245	0.260
授業後レポート	—	0.482	0.364	0.494	0.644*	0.278	0.517	0.501	0.286
課題検討	0.315	0.264	0.259	0.522	0.493	0.543	0.553	0.243	0.586

ダイバーシティコミュニケーション特性の各項目との分析結果も図表8の通りであるが、論理的思考と授業後レポートとの相関係数0.674のみが P 値0.027となり5%有意水準をクリアした。なお、図表7と同様に P 値が0.05以上で0.10未満を示す相関係数には、参考値としてグレーのマスキングをしている。

図表8 個別成績とダイバーシティコミュニケーション特性・グローバル志向の各項目との相関係数（2018, Y）

特性項目 成績項目	論理的 思考	説明力	受容性	多様性 志向	エネル ギー	しなやか さ	冒険 スタイル	自信 スタイル	演技 スタイル
授業への参画	0.211	0.303	0.342	—	—	0.224	—	0.410	—
授業後レポート	0.674*	0.459	0.580	0.412	—	—	—	0.295	—
課題検討	—	0.422	0.420	—	—	0.588	—	0.545	0.324

2018年の調査結果では、Y 授業の相関分析データは一部検証に使えるものの、X 授業のデータは P for G の妥当性検証に使用できなかった。そこで、翌2019年の X 授業の成績基準を敢えて Y 授業の基準に近づけるために、以下のような修正を一部加えた。

即ち、X 授業の個別成績への配分比率は変更しないものの、授業前レポートは、レポートの論理整合性と現実社会に対する洞察力を評価するように変更した。グループ作業は、課題に対する理解力とグループ成員協働での論理的説明力を評価する点は変更せず、グループ作業への個人の貢献度も評価することへと変更した。なお、授業への参画評価と筆記試験の評価方法は変更していない。

3. 3 2019年の分析結果

2019年7～8月に X・Y 授業を受講した学生に対する調査分析も、2018年の調査分析と同様の枠組みで行った。

7～8月に X 授業を受講した学生のうち P for G を受診した者は40名¹⁰で、人数的には2018年と大差はない。P for G 診断結果と個別成績評価との相関係数はそれぞれ図表9・10（サンプル数は20）となる。2018年の調査結果と対比するならば、成績評価基準を変更した個別成績を含めて、基準を変更していない個別成績においても、P for G の3つの特性の各項目との相関が強く現れているのが特徴的である。2018年の図表と同様に P 値が0.10以下の相関係数はグレーのマスクングを、0.05以下の相関係数は黒塗り白文字に*を、更に0.01以下の相関係数には白文字に**を付けている。

図表9 個別成績とマネジメント基本特性の各項目との相関係数（2019, X）

特性項目 成績項目	仕事コミ ットメント	先見性	チャレンジ 精神	知的柔軟性	熟慮性	指導性	支援性	公正さ	配慮性
授業への参画	—	0.356	0.521*	0.349	—	0.663**	0.470*	—	0.468*
授業前レポート	—	—	0.416	—	—	0.625**	0.516*	—	0.385
グループ作業	—	—	—	—	—	0.248	0.287	—	—
筆記試験	—	—	0.273	—	—	0.205	0.229	—	—

図表10 個別成績とダイバーシティコミュニケーション特性・グローバル志向の各項目との相関係数 (2019, X)

特性項目 成績項目	論理的 思考	説明力	受容性	多様性 志向	エネル ギー	しなやか さ	冒険 スタイル	自信 スタイル	演技 スタイル
授業への参画	0.419	0.755**	—	0.373	0.479*	0.227	0.408	0.492*	—
授業前レポート	—	—	—	-0.232	—	—	-0.267	0.637**	—
グループ作業	—	0.395	—	—	0.209	—	—	—	—
筆記試験	0.368	—	—	—	—	—	—	—	-0.378

調査年の違いによる分析結果の大きな差異を説明するのは困難である。しかし、永年教員をしている筆者の生活実感をもとに解釈するならば、入学年度の違いによって学生全体の学習意欲の高低や成績の良し悪しなどの違いを感じることがある。評価基準を変更していない「授業への参画」と各項目との相関係数には、学生本人の授業への真剣さと論理力の程度が示されており、2019年の調査対象学生の資質は2018年の対象学生とは異なっていたと理解する他ないであろう。

評価基準を変更しなかった「授業への参画」では、マネジメント基本特性とダイバーシティコミュニケーション特性の複数項目で強い相関が見られる。一方、評価基準を変更した「授業前レポート」では、マネジメント基本特性の複数項目と相関が見られるものの、ダイバーシティコミュニケーション特性での相関は全く見られず、グローバル志向では「自信スタイル」と強い相関が見られるのみとなっている（図表9・10）。

2019年7月にY授業を受講した学生のうち、P for Gを受診した者は14名¹¹であり、2018年に比較して若干少ないと言える。P for G診断結果と個別成績評価との相関係数はそれぞれ図表11・12となる。2018年度のY授業のデータに似て、それぞれに高い相関係数が出ているが、サンプルサイズが8であることから5%有意水準をクリアできたのは課題検討と支援性との相関係数0.695のみである。但し、2018年調査結果とほぼ似たような傾向を示していると同時に負の相関が現れているが、明らかな相関を示すものではない。

図表11 個別成績とマネジメント基本特性の各項目との相関係数 (2019, Y)

特性項目 成績項目	仕事コミ ットメント	先見性	チャレンジ 精神	知的柔軟性	熟慮性	指導性	支援性	公正さ	配慮性
授業への参画	0.439	-0.316	—	0.680	—	—	-0.353	—	—
授業後レポート	0.288	—	0.377	0.590	—	0.648	—	—	—
課題検討	0.587	-0.396	—	0.387	0.371	0.314	0.695*	0.388	0.530

図表12 個別成績とダイバーシティコミュニケーション特性・グローバル志向の各項目との相関係数（2019, Y）

特性項目 成績項目	論理的 思考	説明力	受容性	多様性 志向	エネル ギー	しなやか さ	冒険 スタイル	自信 スタイル	演技 スタイル
授業への参画	0.423	—	—	—	—	-0.512	-0.373	—	-0.461
授業後レポート	—	0.226	-0.219	0.225	0.293	-0.312	-0.596	0.550	-0.504
課題検討	0.451	0.480	—	—	—	0.373	—	0.458	0.284

以上のような年別・授業別の分析結果から、相関の程度がより強くみられる2018年のY授業と2019年のX授業の分析結果をそれぞれ単独データ群として採用し、以下にデータに対する理解を深めていくことにする。

4. データに対する理解

2018年のY授業でのデータ図表7と8を一表に纏めたものが図表13である。5%有意水準の制約を少々緩めて、10%有意水準の相関係数までを参考にしながら成績項目と特性項目の関係を眺めてみることにする。

Y授業は座学や外部講師の話を聴く授業回数が多いため、授業への参画機会が少ない。そのような条件から、「授業への参画」と各特性項目との相関係数が比較的弱くなったと考えられる。但し、「仕事コミットメント」「知的柔軟性」「支援性」「自信スタイル」で相関係数がある程度高くなっている点からは、学生のグループ討議の円滑運営への努力や、あるいは議論に対する真摯な姿勢や積極性が示されている。

図表13 2018年度Y授業での相関係数

特性項目 成績項目	仕事コミ ットメント	先見性	チャレンジ 精神	知的柔軟性	熟慮性	指導性	支援性	公正さ	配慮性
授業への参画	0.432	—	—	0.411	0.276	—	0.459	0.245	0.260
授業後レポート	—	0.482	0.364	0.494	0.644*	0.278	0.517	0.501	0.286
課題検討	0.315	0.264	0.259	0.522	0.493	0.543	0.553	0.243	0.586

特性項目 成績項目	論理的 思考	説明力	受容性	多様性 志向	エネル ギー	しなやか さ	冒険 スタイル	自信 スタイル	演技 スタイル
授業への参画	0.211	0.303	0.342	—	—	0.224	—	0.410	—
授業後レポート	0.674*	0.459	0.580	0.412	—	—	—	0.295	—
課題検討	—	0.422	0.420	—	—	0.588	—	0.545	0.324

一方で、「授業後レポート」と相関が認められる各特性項目は「熟慮性」「論理的思考」で

あり、「受容性」もある程度の相関を考慮できる。授業後レポートとは、外部講師の話を聞いた後に、その話の内容に関する重要ポイントについての設問に回答するというものである為に、学生による課題に真剣に取り組む姿勢を示すであろう「熟慮性」や「論理的思考」との明らかな相関が現れたものと考えられる。また、その他の項目との相関からは他者に対する適合の程度の高さが僅かに見て取れるだろう。

「課題検討」は、ビジネスケースを読んで設問に回答するものである。各特性項目との相関の程度は「授業後レポート」との関係に似ており、ビジネスケースという仮想現実への適合の程度の高さが見て取れる。なお、「しなやかさ」との相関が若干みられるのは、情報が満載のビジネスケースを読み解くには、このしなやかさが貢献するものと考えられる。

2019年のX授業でのデータ図表9と10を一表に纏めたものが図表14である。図表13と同様に5%有意水準の制約を少々緩めて、10%有意水準の相関係数までを参考にしながら成績項目と特性項目の関係を眺めてみることにする。

図表14 2019年度 X 授業での相関係数

特性項目 成績項目	仕事コミットメント	先見性	チャレンジ精神	知的柔軟性	熟慮性	指導性	支援性	公正さ	配慮性
授業への参画	—	0.356	0.521*	0.349	—	0.663**	0.470*	—	0.468*
授業前レポート	—	—	0.416	—	—	0.625**	0.516*	—	0.385
グループ作業	—	—	—	—	—	0.248	0.287	—	—
筆記試験	—	—	0.273	—	—	0.205	0.229	—	—
特性項目 成績項目	論理的思考	説明力	受容性	多様性志向	エネルギー	しなやかさ	冒険スタイル	自信スタイル	演技スタイル
授業への参画	0.419	0.755**	—	0.373	0.479*	0.227	0.408	0.492*	—
授業前レポート	—	—	—	-0.232	—	—	-0.267	0.637**	—
グループ作業	—	0.395	—	—	0.209	—	—	—	—
筆記試験	0.368	—	—	—	—	—	—	—	-0.378

X授業の「授業への参画」は、グループ討議を経た後の教員とのセッションへの参加が評価されており、授業時間内に占める比率が大きい。マネジメント基本特性の中から「チャレンジ精神」「指導性」「支援性」「配慮性」項目で相関が見られ、ダイバーシティコミュニケーション特性の中から「説明力」「エネルギー」項目で相関が見られる。また、グローバル志向では「自信スタイル」との相関が見て取れる。正論で攻めてくる教員に対して発言するのは「チャレンジ精神」が旺盛でなければならないのであろう。また、前向きな姿勢は、「指導性」「支援性」「配慮性」といった他者への適合の程度も高めると考えられる。同様に、教員との議論

では「説明力」「エネルギー」も必要とされ、また「自信スタイル」の程度も高まると考えられる。

「授業前レポート」では「指導性」「支援性」との相関が見られ、グローバル志向では「自信スタイル」との相関が見られた。しかしながら、ダイバーシティコミュニケーション特性の各項目との相関は見られなかった。授業前レポートでは社会現象に対する深い洞察が要求されることから、他者への適合の程度が測定できる「指導性」「支援性」で相関が生まれたと考えられる。同様に、レポートの要求レベルが高いために「自信スタイル」との相関が顕著に表れたと考えられるであろう。

5. P for G の妥当性について

5.1 成績と特性

これまで、P for G の各特性項目と個別成績の相関について述べてきた。ここで改めて問題とすべきは、成績が個人特性の代理変数になり得るかどうかについてである。

P for G で採用したマネジメント基本特性の各項目は、山岸（1995）による図表2で示された「状況調整能力」を構成する8）コミュニケーション、9）対人関係、10）マネージメント（原典表記のまま）、11）判断力、12）知的能力の各要素を基に開発されている。それ故、個別成績の得点が「状況調整能力」の各項目の程度を示しているかどうかの確認ができればよいだろう。

授業への参画という評価項目は、学生がグループ討議に円滑に参加し、他者と議論しながら自身の考えをまとめ、教員との議論を展開出来ている程度を測定していることから、状況調整能力のほぼ全ての項目の程度を測定できることになる。加えて、「カルチュラル・アウェアネス」「自己調整能力」「状況調整能力」の3つに跨る4）感受性の各項目の程度も測定できるだろう。一方、授業後レポートや授業前レポートは「状況調整能力」の中でも11）判断力、12）知的能力の各項目の程度を測定できる。

Y 授業独自の課題検討は、企業の海外展開をテーマとしたビジネスケースへの理解力と論理構築力が評価されることから、4）感受性、11）判断力、12）知的能力の各項目の程度を測定できる。一方で、X 授業独自のグループ作業は、4）感受性、8）コミュニケーション、9）対人関係、10）マネージメント（原典表記のまま）の各項目を測定できる。最後に筆記試験は、11）判断力、12）知的能力の各項目を測定できる。

次に、ダイバーシティコミュニケーション特性の各項目について言及しよう。これらの特性は、図表2で示された「自己調整能力」を構成する5）寛容性、6）柔軟性、7）オープンネス、と4）感受性の各要素を基に開発されている。

授業への参画は、自己調整能力のほぼ全ての項目の程度を測定できることになる。一方、

授業後レポートや授業前レポートは、「自己調整能力」の中でも6) 柔軟性の程度を測定でき、更に4) 感受性の各項目の程度も測定できるだろう。

Y 授業の課題検討は、「カルチュラル・アウェアネス」の中の3) 相手国文化への興味、「自己調整能力」の中の6) 柔軟性、7) オープンネスの各項目を測定できるだろう。X 授業のグループ作業は、「自己調整能力」の各項目を測定できる。最後に「筆記試験」は、5) 寛容性の各項目を測定できることになる。

以上の検討結果から、大学院での授業における個別成績は、当該人物のマネジメント基本特性とダイバーシティコミュニケーション特性をある程度代理していると推定できることになる。

5. 2 P for G の妥当性

ここからは、P for G の構成概念妥当を検証することにしよう。

既に議論したように、P for G の診断ツールとしての内的妥当性は確保できていることから、Messick〔1995〕による図表3に示された「内容的側面の証拠」は検証できた。但し、本診断は「本質的側面の証拠」を求めることを想定していないため、これは検証する必要のない項目である。

「構造的側面の証拠」については、三村ほか〔2016〕で十分に検証できていると考えられる。但し、「一般化可能性の側面からの証拠」については、問題が残ると言わざるを得ない。何故なら、2018年のY 授業、2019年のX 授業での測定結果では、各個別特性と個別成績との間に相関が見られるものがある程度あるにも拘わらず、2018年のX 授業と2019年のY 授業では、明らかな相関が見られなかったからである。但し、両年ともX あるいはY というように同じ授業で相関が見られただけであったならば、一般化可能性の程度は低いと考えられる。しかし、異なった授業での相関が見られたという事実は、ある程度の一般化可能性を示していると考えられる。

「外的側面の証拠」の確保は、まさに本研究が明らかにすべき部分となっている。何故なら、内容的・構造的側面の証拠が確保できている P for G の受診結果が、受診者の大学院での成績との相関性が見出せるかが問題となっているからである。本研究では2年にわたって4つの授業を受講した各グループに診断を行い、その半数のグループにおいて相当程度の相関性を発見できた。但し、残りのグループでは顕著な相関性が見られなかった。この点で、外的側面の証拠が明確に確保できたとは言えないし、同時に明確に確保できなかったとも言えない。

なお最後に、「結果的側面の証拠」は、本研究では考慮する必要のないものであろう。

以上のように、P for G の妥当性に関する証拠の多くは確保できたが、一般化可能性の証拠については弱い点が残る。4グループという少ないサンプルでの検証であることから、これは

致し方のない結果とも言えるだろう。更に検証を継続するならば、特性と成績の相関性が強化される可能性が増えることが予測されるかも知れないが、この点が本研究の限界である。

P for G が妥当な診断ツールであるかどうかは、今後の受診データの増加を待つほかないであろう。

¹ PASCAL とは、Potentiality & Ability SCALE の大文字部分から命名した商標。

² 量的変数の尺度としての比率尺度と間隔尺度、質的変数としての順序尺度と名義尺度のことを示している。

³ 妥当性を、ある測定尺度の得点が外的基準とどの程度関係するかという観点で捉えるもの。例えば、知能検査が将来の学力をどの程度予測しているのかという観点などがある〔村山 2012〕。

⁴ 測定するものが、構成概念のすべての側面を網羅しているかどうかの程度のこと〔村山 2012〕。

⁵ 同一の教員が担当していることから、X と Y 授業での成績評価基準の統一性はある程度担保される。

⁶ 男性25名、女性12名。年齢層は40歳代を中心帯として30歳代後半から50歳代半ばがほとんどで、例外的に20歳代半ばが2名いる。

⁷ 知識と経験からアイデアを発想できる力が思考力であり、発想したアイデアを論理的に説明できる論理力とは異なる〔野矢 2006〕。

⁸ Microsoft Excel の CORREL 関数による。

⁹ 男性16名、女性3名。年齢層は X 授業とほぼ同様であるが、20歳代はいない。

¹⁰ 男性27名、女性13名。年齢層の分布は2018年調査と大きな相違はない。

¹¹ 男性7名、女性7名。年齢層の分布は2018年調査と大きな相違はない。

参考文献

- Cronbach, L. J., & Meehl, P. E. [1955], "Construct Validity in Psychological Tests," *Psychological Bulletin*. Vol. 52, pp.281-302.
- Deci, E. L. [1975], *Intrinsic Motivation*. New York, NY : Plenum Press. (安藤延男・石田梅男 訳『内発的動機づけ：実験社会心理学的アプローチ』誠信書房、1980.)
- Deci, E. L. & Ryan, R. M. [1985], *Intrinsic Motivation and Self-Determination in Human Behavior*. New York, NY : Plenum Press.
- 平井洋子 [2006]「測定の妥当性からみた埴土構成－得点の解釈を保証できますか－」吉田寿夫（編）『心理学研究法の新しいかたち』誠信書房、pp. 21-49.
- 平田譲二 [2014]「既存研究からみた異文化適応能力」『産業能率大学紀要』Vol.34, No. 2, pp. 39-55.
- Kane, M. T. [2006], "Validation" R. L. Brennan (ed.). *Educational Measurement (4th ed)* pp. 17-64., Westport, CT : Praeger.
- 三村孝雄・堀内勝夫・平田譲二 [2016]「異文化環境下で成果を上げる日本人従業員の特性の探索」『産業能率大学紀要』Vol. 36, No. 2, pp. 49-64.
- Messick, S. [1989], "Validity," R. L. Linn (ed.). *Educational Measurement (3rd ed)* pp. 13-104., Washington, DC : American Council on Education & Macmillan. (池田央・柳井春夫・藤田恵璽・繁杵算男（監訳）『教育測定学 上巻』みくに出版、1992.)
- Messick, S. [1995], "Validity of Psychological Assessment," *American Psychologist*. Vol. 50, pp. 741-749.
- 村上宣寛 [2006]『心理尺度のつくり方』北大路書房
- 村山航 [2012]「妥当性：概念の歴史的変遷と心理測定学的観点からの考察」『教育心理学年報』Vol. 51, pp. 118-130.
- 野矢茂樹 [2006]『新版 論理トレーニング』産業図書
- 欧陽菲・堀内勝夫 [2018]「「グローバルマネジメント特性診断」の「妥当性」に関する研究」『産業能率大学紀要』Vol. 39, No. 1, pp. 59-83.
- Remenyi, D., Williams B., Money A. and Swartz E. [1998], *Doing Research in Business and Management : An Introduction to Process and Method*. Tech Trans Limited. (小樽商科大学ビジネス創造センター訳『研究の進め方：修士・博士論文を書く前に』同文館出版、2002.)
- 山岸みどり [1995]「異文化間能力とその育成」渡辺文夫『異文化接触の心理学：その現状と理論』川島書店、pp. 209-223.

中小企業の生き残り戦略
～海外進出の要は、自社ブランド保有か?～

Survival Strategies for Small and Medium-sized Enterprises :
-Are having their own branded products key to overseas expansion?-

三村 孝雄
Takao Mimura

Abstract

Among small and medium-sized enterprises in the manufacturing industry, larger companies have relocated their factories abroad and shifted to ordering parts from countries overseas. In order for them to develop sustainably, business transformation will be necessary.

I conducted an Internet survey of 500 small and medium-sized companies in the manufacturing industry and analyzed the actual state of management by focusing on 216 companies with less than 100 employees. I found that companies with overseas bases had larger sales, more employees, and more of their own brands than manufacturers with no overseas presence that rely on subcontracting to large companies.

1. 研究目的

三村〔2017〕の中小企業生き残り戦略の実体調査の中では、国内に工場を残しつつベトナムに販売拠点や製造拠点までも進出させ、現地で大量生産品を製造し、現地で納品し売り上げを伸ばしている企業と、一方では自社の固有技術力を高めながら、一社ではなく複数の大手企業の下請けとして国内残留をして売り上げを伸ばしている企業の2極化していることがヒアリング結果として分かった。また、三村〔2018〕の中小企業の生き残り戦略と経営者の属性の中では、海外に販売拠点や製造工場を展開している経営者と特徴としては、創業者から経営を引き継いだ2代目が多く、国内大手企業からの下請け業務だけに頼るビジネスには将来的に限界を感じ、海外拠点も国内拠点も経営者としてマネジメントする開拓者精神や外国人

に対する親近感が強いことが分かった。国内残留で成功している経営者は創業者が多く、経営資源を国内に集中させると共に単一業界からの下請けからの脱却を進めて、自社の固有技術の質を向上させ、従業員の生活の安定や地域貢献を大切にしていることが分かった。

中沢〔2014〕も中小企業研究の中で、中小企業でも大企業でも継続し利益をあげている会社は「なすべきこと」が社員に共有化されている。また逆に連続して大きな赤字をだしている企業は「コア」がなく、「何屋さん」なのか判然としていない。そして「何をしたいのか」もわからず、克服すべき課題や向かって行くべき方向が不明瞭であると言及している。三村〔2017；2018〕のヒアリング調査企業は、海外進出でも国内残留でもビジネスとしては成功しており、強い経営ポリシーが従業員に周知徹底され且つ率先垂範が経営マネジメントに功を奏している。

また高橋〔2015〕も大企業だけでなく中小企業においても、国内需要の減少に伴い、成長著しい東アジア新興国において、海外需要を取り込むことが命題であるものの、海外展開には様々な課題・リスクがあるため、中小企業はそれらを見極めつつ、支援施策等も活用することで、海外展開に取り組むことが求められると指摘している。

本論文の目的は、三村〔2017；2018〕のヒアリング結果をベースにしながら、日本の中小製造業におけるリーマンショック後の回復傾向や海外進出などの業況を量的に把握することである。

2. 分析結果と考察

2.1 インターネット調査対象企業の分析

本論文の中で言う「中小企業（製造業）」とは、三村〔2017;2018〕の調査内容と比較する為、常時雇用する従業員が100人未満の製造業者に限定し、中には常時雇用する従業員が20人以下の小規模企業者も含み、中小企業基本法第2条第1項の規定とは異なる。ただし、実際のインターネット調査時には常時雇用する従業員が300人未満の企業500社についてのデータを得た。

その500社の中から常時雇用する従業員が100人未満である製造業者の有効回答者は216社であり、その内訳は（図表1）（図表2）（図表3）に示す。

（図表1）分析対象企業216社の従業員数

従業員（人）	10未満	20未満	30未満	40未満	50未満	100未満	合計
会社数（社）	140	24	9	7	9	27	216
割合（％）	64.8	11.1	4.2	3.2	4.2	12.5	100

(図表2) 企業所在地と売上高との関係

売上高 (千万) エリア	¥3未満	¥3-¥5未満	¥5-¥10未満	¥10-¥20未満	¥20-¥30未満	¥30-¥50未満	¥50-¥100未満	¥100以上	合計
関東	59	16	6	9	5	4	8	21	128
静岡	4	3	1	1	0	3	1	1	14
愛知	11	2	3	2	2	2	4	4	30
大阪	12	2	2	7	0	0	3	3	29
福岡	6	3	0	2	0	1	2	1	15
合計数	92	26	12	21	7	10	18	30	216

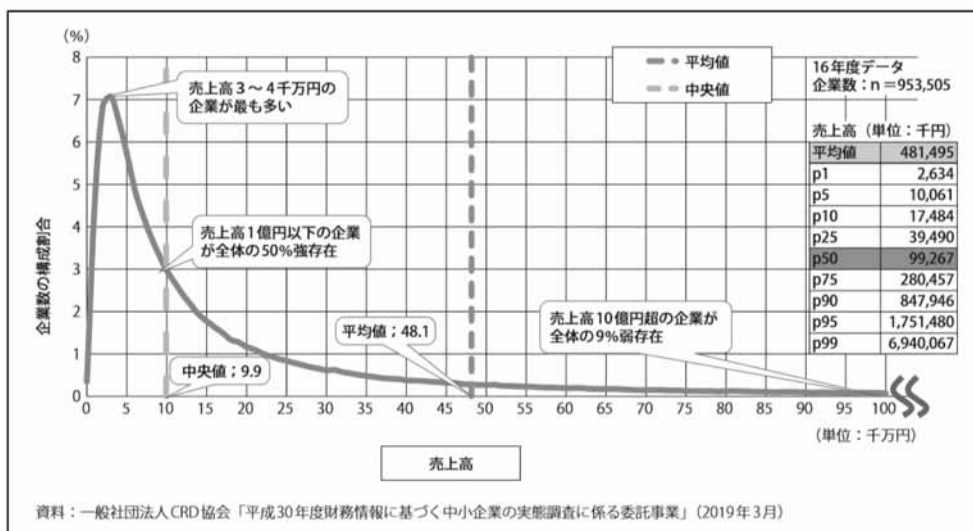
(図表3) 年間売上高と従業員数との関係

売上高 (千万) 従業員	¥3未満	¥3-¥5未満	¥5-¥10未満	¥10-¥20未満	¥20-¥30未満	¥30-¥50未満	¥50-¥100未満	¥100以上	合計
10人未満	91	25	10	9	1	3	0	1	140
20人未満	1	1	2	10	3	1	3	3	24
30人未満	0	0	0	2	2	1	2	2	9
40人未満	0	0	0	0	0	2	4	1	7
50人未満	0	0	0	0	0	2	4	3	9
100人未満	0	0	0	0	1	1	5	20	27
企業数(社)	92	26	12	21	7	10	18	30	216

調査分析対象企業の64.8%が従業員10人未満の小規模企業であり、また年間の売上高が3,000千万円未満の企業割合が42.6%を占めている。また企業所在地と従業員数および売上高との関係には相関関係は無い。

本調査対象企業の企業数と売上高との傾向は(図表4)に示すように、一般社団法人CDR協会のデータと類似しているが、本調査企業が売上高3,000万円未満に集中している理由は、従業員数を100人未満に限定した為と推測される。なぜならば、(図表5)に示すように従業員数が多くなる企業ほど相対的に売上高も大きな企業数が増加している。

(図表4) 中小企業の売上高の分布 (2016年度)



出所：2019年度 中小企業白書

(図表5) 製造品目と売上高との関係

売上高 (千万)	¥3未満	¥3-¥5未満	¥5-¥10未満	¥10-¥20未満	¥20-¥30未満	¥30-¥50未満	¥50-¥100未満	¥100以上	合計
製造品目									
① 部品	13	2	2	2	0	1	4	2	26
② ユニット	4	2	3	0	1	2	1	0	13
③ OEM完品	10	7	0	5	0	2	0	5	29
④自社ブランド(完)	33	8	3	8	3	2	8	12	77
⑤自社ブランド(素)	32	7	4	6	3	3	5	11	71
④&⑤の割合(%)	70.7	57.7	58.3	66.7	85.7	50	72.2	76.7	216

【2.1章での調査データ分析結果のポイント】

- (1) 調査分析企業に関して、
 1. 従業員数10人未満の企業が全体の約65%を占める (全140社)。
 2. 企業所在地と売上高との相関関係は見当たらない。
 3. 従業員数と売上高との関係は、売上高が大きな企業ほど従業員数も多い傾向がある。

2.2 製造品種と売上高との関係

調査対象企業の製造品種と売上高との関係を(図表5)に示す。製造品種の分類は、以下の

5セグメントに分類した。

- ① 部品（製造）：金属加工部品、プラスチック成型部品、電子部品などを製造し発注元に納品する企業
 - ② ユニット（製造）：自社および他社が製造した部品を組み立て、ユニット化して発注元に納品する企業
 - ③ OEM⁽¹⁾ 完品（製造）：発注元からの指示により、他社ブランド品を完成品にし、発注元に納品する企業
 - ④ 自社ブランド（完）＝（完成品製造）：自社ブランドで完成品にし、製造から販売までを行う企業
 - ⑤ 自社ブランド（素）＝（素材製造）：自社ブランドで素材⁽²⁾を製造し、販売までを行う企業
- その結果、(図表6) に大別すると自社ブランド商品の製造販売企業（④&⑤セグメント）が全体の68.5%（148社）を占め、またどの売上高セグメントにおいても半数以上を占める結果となった。

(図表6) 製造品種と企業数との関係

製造品種	①部品	②ユニット	③OEM 完成品	④自社ブランド 完成品	⑤自社ブランド 素材	合計
企業数(社)	26	13	29	77	71	216
割合(%)	12	6	13.4	35.6	32.9	100
企業数(社)	68 (他社仕様)			148 (自社仕様)		216
割合(%)	31.5			68.5		100

【2.2章での調査データ分析結果のポイント】

- (1) 調査分析企業に関して、
 - 1. 売上高に関わらず、自社ブランド製品の製造企業が多い（全148社）。
 - 2. ユニット製造企業の割合は、非常に少ない（13社）。
 - 3. 自社ブランドの完成品製造企業と完成品素材企業との割合はほぼ同じである（77社と71社）。
 - 4. 自社ブランドを持つ企業が、148社と全体の68.5%を占めて多い。

2. 3 海外進出企業の分析

調査対象216社の中で海外進出企業における内訳を以下の3セグメントに分類した。

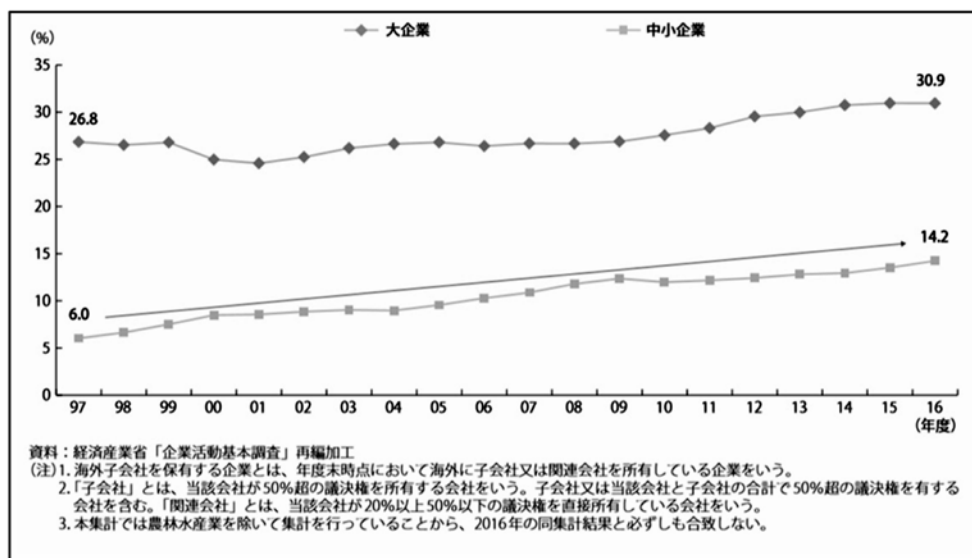
中小企業の生き残り戦略～海外進出の要は、自社ブランド保有か？～

- ① 工場拠点のみ海外進出をしている企業
- ② 販売拠点のみ海外進出をしている企業
- ③ 工場拠点と販売拠点の両方を海外進出している企業

(図表7) 海外拠点の有無

海外拠点の有無	無し（国内のみ） （社）	有り（社）:16社		
		①工場のみ	②販売のみ	③工場と販売
企業数（社）	200	7	5	4
割合（％）	92.6	3.2	2.3	1.9
		7.4		

(図表8) 企業規模別に見た、海外子会社を保有する企業割合の推移



出所：2019年度 中小企業白書

(図表7) に示すように対象企業216社における海外拠点を有する企業数は16社に過ぎず全体の7.4%であった。しかし、(図表8) における中小企業（従業員300人未満）の海外進出率は毎年上昇傾向にあり、まだまだ大企業には及ばないものの2016年度で14.2%に達していることは、中小企業もグローバル化してきている証拠である。

更に、(図表6)と同様に製造品種別に分析すると(図表9)に示すように、自社ブランド商品を製造している企業の海外進出率が8.1%と他社からの請負による製造企業の海外進出率5.6%を上回っている。特に自社ブランドの完成品を製造販売している企業の海外進出率は11.7%であり、発注元企業動向に左右されずに独自に成長戦略が立案できる強みがあると推測できる。またユニット製造企業(図中②ユニット)は母数が少なく断定は出来ないが、一般的にユニット組み立て製造は、最終工程で品質確保の為に人的な細かなアナログ調整⁽³⁾が必要であり、国内に留まった方が日本人固有の職人技とも言える微調整が容易であり、全体効率の面で優位だと推測される。

(図表9) 製造品種分類別の海外進出企業の割合

製造品種分類	①部品	②ユニット	③OEM 完成品	④自社ブランド 完成品	⑤自社ブランド 素材	合計
企業数(社)	26	13	29	77	71	216
海外進出企業(社)	2	0	2	9	3	16
①工場のみ(社)	1		2	3	1	7
②販売のみ(社)	0		0	3	2	5
③両方(社)	1		0	3	0	4
割合(%)	7.7	0	6.9	11.7	4.2	7.4

次に海外進出企業16社に関する、海外工場拠点と海外販売拠点を分析する。(図表10)は海外に進出している企業の概要を示す。また(図表11)は工場拠点の場所と数、(図表12)は販売拠点の場所と数を示す。進出場所に関しては工場拠点、販売拠点共に東南アジアと中国が多い事が分かる。また、売上高が大きな企業ほど海外進出拠点数が増加しているのみならず、国内拠点数も増加している事が分かる。売上高を増やすには、自社のビジネスに見合った拠点を増やさなくてはならない事は必然だと言える。

海外進出企業16社の内11社(68.6%)は自社ブランドの完成品製造((図表10)製造品種④)および自社ブランドの素材製造((図表10)製造品種⑤)であることは特出すべき点であり、発注元の企業に左右される事無く業務拡大をするには自社ブランド商品を持つことが重要であると考えられる。また、内8社はリーマンショック前から海外進出しているが、業績回復が国内残留企業に比べて早いことが分かる(後述 2.7章(図表25)参照)。

中小企業の生き残り戦略～海外進出の要は、自社ブランド保有か？～

(図表10) 海外進出企業16社の概要

社名	売上高	従業員数	創業年	現社長	国内 所在地	製造 品種	海外拠点の設立年	
				(継承年)			①工場	②販売
A	①	①	1993	創業者	茨木	④		2009
B	①	①	1970	親族外 1996～	埼玉	⑤		2018
C	①	①	1998	創業者	東京	④	2004	2004
D	④	①	1997	二代目 2009～	神奈川	④	1997	
E	⑤	①	1989	創業者	東京	④	1989	
F	⑥	⑥	2007	創業者	東京	③	2009	
G	⑦	⑤	2003	創業者	静岡	①	2003	
H	⑦	④	2005	創業者	埼玉	④		2005
I	⑧	⑥	1967	親族外 2000～	神奈川	③	2000	
J	⑧	⑤	1997	創業者	東京	③	2013	
K	⑧	③	1955	三代目 2008～	大阪	⑤	2004	
L	⑧	⑥	1915	三代目 1985～	東京	④		1990
M	⑧	⑥	1946	親族 2018～	埼玉	⑤		1997
N	⑧	⑥	1937	親族 2000～	神奈川	①	1995	1995
O	⑧	⑥	1961	三代目 2008～	神奈川	④	2009	2006
P	⑧	⑥	1989	親族外 2014～	東京	④	1980	1989

〔売上高(千万)〕 ①¥3未満 ②¥3-¥5未満 ③¥5-¥10未満 ④¥10-¥20未満 ⑤¥20-¥30未満
⑥¥30-¥50未満 ⑦¥50-¥100未満 ⑧¥100以上

〔従業員数(人)〕 ①10未満 ②10-20未満 ③20-30未満 ④30-40未満 ⑤40-50未満 ⑥50-100未満

〔製造品種〕 ①部品製造 ②ユニット製造 ③OEM完成品製造 ④自社ブランド完成品製造
⑤自社ブランド素材製造

(図表11) 海外進出企業の海外工場拠点場所と数

売上高(千万)	¥3未満	¥3-¥5未満	¥5-¥10未満	¥10-¥20未満	¥20-¥30未満	¥30-¥50未満	¥50-¥100未満	¥100以上	合計
企業数(社)	3	0	0	1	1	1	2	8	16
拠点場所									
① 国内	1			0	2	5	1	10	19
② 東南アジア	1			0	1	0	1	4	7
③ 中国	1			2	0	1	0	3	7
④ 北米	0			0	0	0	0	2	2
⑤ 欧州	0			0	0	0	0	0	0
⑥ その他の国	0			0	0	0	0	0	0
無回答社数	2			0	0	0	1	2	5

(図表12) 海外進出企業の海外販売拠点場所と数

売上高(千万)	¥3未満	¥3-¥5未満	¥5-¥10未満	¥10-¥20未満	¥20-¥30未満	¥30-¥50未満	¥50-¥100未満	¥100以上	合計
企業数(社)	3	0	0	1	1	1	2	8	16
拠点場所									
① 国内	5			0	0	0	1	17	23
② 東南アジア	0			0	0	0	0	7	7
③ 中国	0			0	0	0	0	4	4
④ 北米	2			0	0	0	0	3	5
⑤ 欧州	1			0	0	0	0	0	1
⑥ その他の国	1			0	0	0	0	0	1
無回答社数	0			1	1	1	1	3	7

【2.3章での調査データ分析結果のポイント】

(1) 海外拠点を有する企業に関して、

1. 海外拠点を有する企業は、全体の7.4%（16社）であった。
2. 自社ブランド製品を製造している企業の方が、海外進出企業数が多い（12社）。
3. 売上高の大きな企業ほど、海外進出企業数も多い傾向にある。
4. 売上高の大きな企業ほど、国内拠点数も多い傾向にある。
5. 海外拠点の場所（数）に関しては、東南アジア、中国、北米の順である。

2. 4 海外進出企業の海外進出理由の分析

今回のインターネット調査における海外進出16社の海外進出した理由を（図表13）に示す。
売上高に関わらず以下のことが言える。

1. 国内での需要が伸びる期待が出来ないので市場を海外に求めた（図中①）。

2. 東南アジア諸国の人件費が国内に比べて安いのでコスト削減が出来る（図中②）。
3. 取引先が海外なので国内で製造するよりも物流費の削減が出来る（図中③）。

（図表13）海外進出の理由（複数回答）

売上高(千万)	Y3未満	Y3-Y5未満	Y5-Y10未満	Y10-Y20未満	Y20-Y30未満	Y30-Y50未満	Y50-Y100未満	Y100以上	合計
企業数(社)	3	0	0	1	1	1	2	8	16
理由									
① 国内で売上伸びず	1	0	0	0	0	0	1	5	7
② 海外人件費安い	0	0	0	1	1	1	1	3	7
③ 取引先が海外	2	0	0	0	0	0	0	5	7
④ 外資系企業	0	0	0	0	0	0	0	1	1

三村〔2017〕の海外進出で成功している中小企業（特に部品メーカー）のヒアリング調査結果では、経営者の海外進出決断のポイントは以下の通りであった。

【海外進出決断のポイント】

1. 中国製造現場では、日本部品メーカーの各社見積情報が多数流出していた。
2. 日本に居ても中小企業にはネットワークがなく、発注元の情報が入らない。
3. 海外に拠点があれば日本以上に発注元の情報が入ると感じた。
4. 円高により海外投資金額が安く、国内に投資するよりメリットを感じた。
5. 完成品まで一貫生産できる部品メーカーの仲間を日本で持っており、そのメーカーも海外進出すればビジネス成功のチャンスがあると感じた。
6. 社長自身が海外で指揮を取る覚悟があった。
7. 国内ビジネスのみでは3～5年先の売上見込みが立たなかった。
8. 先に海外進出を果たした他社の先行事例を応用でき、且つ現地に住む親族にサポートして貰えると思った。
9. 国内での人材不足（中小企業には人が集まらない）により発注元からの数量要求に対応できない。
10. 国内の人件費高騰により採算性が悪化している。

海外進出決断のポイント1～3および8は、中小企業ならではの情報の少なさによる、経営者としての孤立感を感じざるを得ない。ポイント4および10は、中小企業のみならず一般的な市場環境の変化から、固定費の安い国で製造しないとコスト競争力が低下する定石に他ならない。ポイント5～7および9は、大企業からの発注に自社の経営を頼わざるを得ない下請け企業の厳しい現状を表している。

今回の調査結果と共通する項目を大別すると「市場拡大を海外に求めた」「人件費の安い海

外で製品コスト低減を図った」ということが出来る。

【2.4章での調査データ分析結果のポイント】

(1) 海外進出した理由としては、

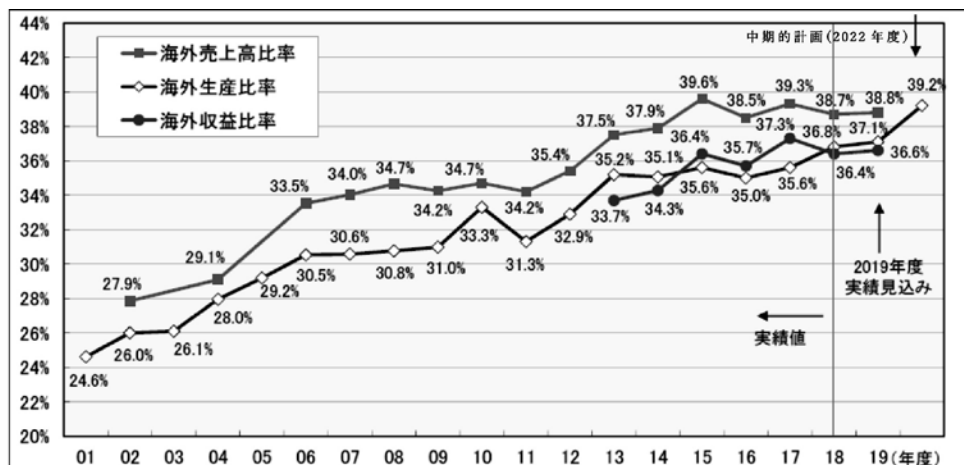
1. 売上高に関係なく、新規市場を海外に求めた。
2. 売上高に関係なく、海外の人件費が安いところに目を付けた。
3. 取引先が海外なので、海外拠点を設立したという企業も多い。

2. 5 海外進出企業の海外売上高比率の分析

グローバル展開している製造企業の場合、海外売上高比率は毎年上昇しており40%に迫る勢いである（(図表14) 参照）。

(図表15) は海外進出企業16社における、国内売上高を「1」とした場合の海外売上高比率を示したものである。11社（68.7%）が国内売上高と同等以下であるが、逆に他の5社は海外売上高が国内売上高の3倍～6倍以上と圧倒的に上回っていることが分かる。この5社は（図表12）における「C社」「G社」「H社」「N社」「P社」でありG社以外は自社ブランド製造会社である。このことから自社ブランドをもっている企業は、海外での販売拡大の障壁は自社ブランドを持っていない企業に比較すると低いと言える。

(図表14) 製造業における海外売上高比率の推移



出所：「わが国製造業企業の海外事業展開に関する調査報告」2019年12月6日

(図表15) 海外進出企業における海外売上高比率（国内売上高を「1」とする）

売上高(千万)	¥3未満	¥3-¥5未満	¥5-¥10未満	¥10-¥20未満	¥20-¥30未満	¥30-¥50未満	¥50-¥100未満	¥100以上	合計
企業数(社)									
海外売上比率	3	0	0	1	1	1	2	8	16
① 0.5倍未満	1			1	1	1	0	3	7
② 0.5倍	1			0	0	0	0	2	3
③ 1倍	0			0	0	0	0	1	1
④ 2倍	0			0	0	0	0	0	0
⑤ 3倍	0			0	0	0	0	1	1
⑥ 4倍	0			0	0	0	0	1	1
⑦ 5倍	0			0	0	0	1	0	1
⑧ 6倍以上	1			0	0	0	1	0	2

【2.5章での調査データ分析結果のポイント】

(1) 国内売上高に対する海外売上高の比率は、

1. 過半数以上の企業で、国内同等以下である。
2. 売上高の多い企業ほど、海外売上高の比率が高まる傾向もみられる。

2. 6 国内残留企業の国内に留まる理由の分析

今回のインターネット調査における国内残留の理由を（図表16）に示す。売上高規模が少ない企業ほど以下のことが言える。

1. 現在の国内需要の売上高で充分企業の存続が可能である（図中①）。
2. 海外に進出した場合、経営者として国内と海外の両拠点をマネジメントすることが困難である（図中②）。
3. 海外進出に関する投資費用が高くて捻出できない（図中③）。

(図表16) 国内残留の理由 (複数回答)

売上高(千万)	¥3未満	¥3-¥5未満	¥5-¥10未満	¥10-¥20未満	¥20-¥30未満	¥30-¥50未満	¥50-¥100未満	¥100以上	合計
企業数(社)	89	26	12	20	6	9	16	22	200
理由									
① 国内で売上充分	58	13	10	15	4	6	11	14	131
② 双方の管理困難	18	8	2	4	2	2	5	6	47
③ 海外投資費用高い	27	6	1	5	4	1	2	7	53
④ その他	2	1	0	1	0	0	1	2	7
④その他の理由(抜粋)									
1. 会社は海外進出するだけの能力が無い。 2. 食品加工なので国内で良い。 3. 会社規模が小さい。 4. 海外進出の必要性を感じない。 5. 海外でのリスク管理ができない。 6. 内需産業だから(和風)。									

三村〔2017〕の国内残留で成功している中小企業（特に部品メーカー）のヒアリング調査結果では、経営者の国内残留決断のポイントは以下の通りであった。

【国内残留決断のポイント】

1. 同業者が既に現地に進出している。また現地のお客様は既に現地企業の部品品質でも納得しており日本製部品の価値が薄れてきた。
2. 国内なら部品単体販売ではなく、ユニット部品化して付加価値をあげた販売が出来る。
3. ソフトウェア開発を含めると、東南アジア諸国の人材ではまだ対応できない。
4. 海外進出の仲介役と経営者としての自身の会社経営スタンスが異なった。
5. 経営者として、国内と海外の両拠点を均等に全力でマネジメントすることができない。
6. 自社の実力（人材、資金力）を考えると、海外も含めた全てのお客様の要望に对应していたら、自社が対応できる限界を超えていた。
7. 安定した売上高と利益を確保する為に、社長自らがマネジメント出来る範囲での国内新規市場開拓とビジネスに集中させた方が経営は安定すると判断した。

ポイント1は過去に比較して海外部品メーカーの品質が向上してきたことに起因する。例えば、日本企業の海外工場で働いてきた団塊の世代の生産技術者が定年を迎え、現地のローカル企業に高給で再雇用され、ローカル企業の生産技術力が日本品質に追いついてきたことなども考えられる。ただし、ポイント3のようにソフトウェア開発は、海外進出している大手企業であっても東南アジア諸国にはソフトウェア技術者の適正スキルを持った人材不足から国内開発部門に置く企業が多い。ポイント2,4,5および7は、三村〔2018〕で経営者の属性を分析しているように、経営者の経営方針に帰属する項目であり、市場経済に起因する要因ではない。

今回の調査結果と共通する項目を大別すると、

- (1) 付加価値のある商品なら国内需要だけでビジネスが成り立つ

- (2) 国内と海外と両拠点でのマネジメントに不安がある。
ということが出来る。

【2.6章での調査データ分析結果のポイント】

- (1) 国内残留企業の理由は、
1. 売上高の少ない企業ほど、国内の売上で充分であると認識している。
 2. 売上高の少ない企業ほど、国内と海外の両拠点でのマネジメントが困難であると認識している。
 3. 売上高の少ない企業ほど、海外投資費用が高いと感じている。

2. 7 今後の海外進出の意向

2.3章以降、国内残留企業と海外進出企業に関して分析してきたが、今後海外拠点を設ける（もしくは増やす）意向に関して（図表17）および（図表18）に示す。現在、既に進出している企業も含めると、海外進出を考えていない企業数は211社（97.7%）と大多数を占めるが、自社ブランド製造企業の中の4社は5年以内に海外進出を考えており、ビジネス拡大の意向を感じ取る事が出来る。

また海外進出を考えていない企業でも、以下の条件が整えば考えられると回答している。

【海外進出の必要要件】

1. 国や公的機関のサポートが必要（4社）。
2. 優秀な日本人人材の確保が必要（3社）。
3. 優秀なローカル人人材の確保が必要（2社）。
4. 資金調達の面でのサポートが必要（2社）。

（図表17）売上高別企業における海外進出の意向（現在、海外進出している企業も含む）

売上高(千万)	¥3未満	¥3-¥5未満	¥5-¥10未満	¥10-¥20未満	¥20-¥30未満	¥30-¥50未満	¥50-¥100未満	¥100以上	合計
企業数(社)	92	26	12	21	7	10	18	30	216
意向									
① 考えていない	90	26	11	21	7	10	18	26	209
② 3年以内	2	0	1	0	0	0	0	3	6
③ 5年以内	0	0	0	0	0	0	0	1	1

(図表18) 製造品種別企業における海外進出の意向（現在、海外進出している企業も含む）

製造品種	①部品製造	②ユニット製造	③OEM 完成品製造	④自社ブランド 完成品製造	⑤自社ブランド 素材製造	合計
企業数(社) 意向	26	13	29	77	71	216
① 考えていない	26	13	28	74	70	211
② 3年以内	0	0	1	2	0	3
③ 5年以内	0	0	0	1	1	2
②+③の比率(%)	0	0	3.4	3.9	1.4	2.3

【2.7章での調査データ分析結果のポイント】

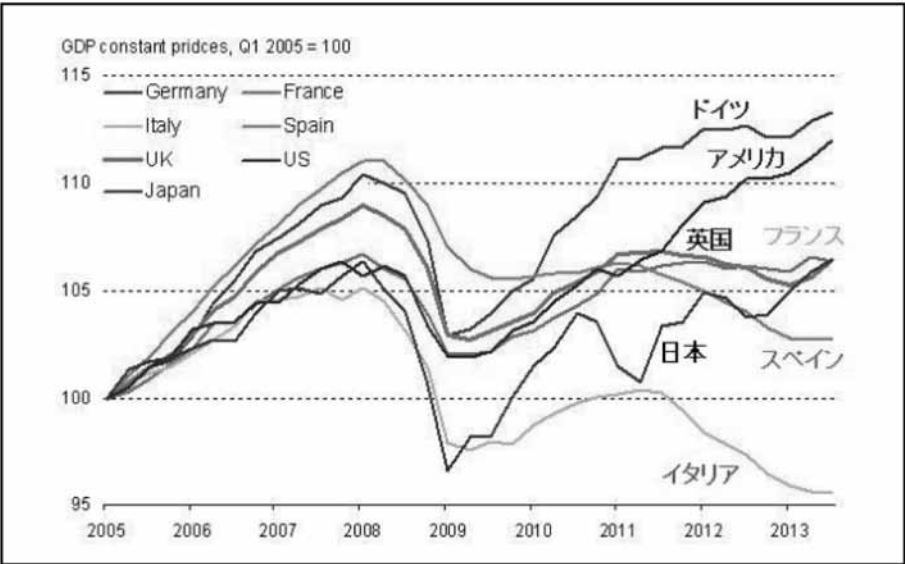
(1) 海外進出の意向に関して、

1. 売上高に関係なく、多くの企業は（211社）は海外進出を考えていない。
2. 海外進出のきっかけとなる条件は「国や公的機関のサポート」「優秀な人材の確保」「資金調達」などが必要とされている。
3. 自社ブランド製造企業の方が、今後の海外進出の意向は強い。

2.8 リーマンショックからの回復傾向

各国のGDPにおけるリーマンショックからの回復傾向は（図表19）に示すように、日本は2011年3月11日に発生した東日本大震災⁽⁴⁾による災害により他先進国よりも大幅に回復が遅れてしまった。

(図表19) 各国のリーマンショック以降の GDP 回復傾向



出所：londonfxblog102.fc2,2013

リーマンショックと東日本大震災により大きな痛手を被った日本製造業は、(図表20)に示すように売上高規模によらず半数以上の企業が、売上高や利益の減少がみられる。更には(図表21)に示すように、インターネット調査時点(2019年7月)においてもリーマンショック以前の業績に回復していない企業の割合が、売上高の小さい企業ほど多いことが分かる。

(図表20) リーマンショック後の売上、利益の状況(売上高別)

売上高(千万)	¥3未満	¥3-¥5未満	¥5-¥10未満	¥10-¥20未満	¥20-¥30未満	¥30-¥50未満	¥50-¥100未満	¥100以上	合計
業績									
① 変化なし	35	3	1	9	1	2	3	10	64
② 売上減少	15	4	4	2	2	3	3	3	36
③ 利益減少	3	1	1	2	0	0	0	2	9
④ 両方減少	22	10	3	6	4	4	11	11	71
⑤ 両方増加	1	0	2	2	0	0	1	4	10
⑥ 無回答	16	8	1	0	0	1	0	0	26
減少企業数	40	15	8	10	6	7	14	16	116
企業数計(社)	92	26	12	21	7	10	18	30	216
減少企業割合(%)	51.9	83.3	72.7	47.6	85.7	77.8	77.8	53.3	

(図表21) 現時点(2019年7月)までにリーマンショック以前まで業績回復しない企業(売上高別)

売上高(千万)	¥3未満	¥3-¥5未満	¥5-¥10未満	¥10-¥20未満	¥20-¥30未満	¥30-¥50未満	¥50-¥100未満	¥100以上	合計
減少企業数	40	15	8	10	6	7	14	16	116
① 回復せず	26	10	5	3	2	4	8	4	62
割合(%)	65	66.7	62.5	30	33.3	57.1	64.3	31.3	

次に製造品種別に同様の分析を実施した。(図表22)に示すようにリーマンショック後の落ち込みが多いのは「部品製造」や「ユニット製造」という発注元企業からの下請け企業の割合が70%以上と自社ブランド製造企業と比較して多いことが分かる。(図表23)に示すように、業績回復状況において自社ブランド製造企業の方が回復傾向が高いことが分かる。

(図表22) リーマンショック後の売上、利益の状況(製造品種別)

製造品種 業績	①部品製造	②ユニット製造	③OEM 完成品製造	④自社ブランド 完成品製造	⑤自社ブランド 素材製造	合計
① 変化なし	1	1	11	31	20	64
② 売上減少	8	3	7	9	9	36
③ 利益減少	0	0	4	0	5	9
④ 両方減少	15	5	5	24	22	71
⑤ 増加	0	2	0	5	3	10
⑥ 無回答	2	2	2	8	12	26
①+⑤の企業	1	3	11	39	23	74
減少企業数	23	8	16	33	36	116
企業数計(社)	26	13	29	77	71	216
減少割合(%)	92	72.7	59.3	47.8	61	61.1

(図表23) 現時点(2019年7月)までにリーマンショック以前まで業績回復しない企業(製造品種別)

製造品種	①部品製造	②ユニット 製造	③OEM 完成品製造	④自社ブランド 完成品製造	⑤自社ブランド 素材製造	全体合計
企業数(社)	26	13	29	77	71	216
① 回復せず	12	3	12	14	19	60
② 無回答	3	2	3	9	10	27
①の割合(%)	46.2	23.1	41.4	18.2	26.8	27.8
他社・自社(%)	39.7			22.3		

中小企業の生き残り戦略 ～海外進出の要は、自社ブランド保有か？～

また、国内残留企業と海外進出企業に関しても同様の分析を実施した。分析企業の母数の違いはあるが（図表24）に示すようにリーマンショック後の落ち込みが多いのは、国内残留企業で60%以上あり、海外進出企業の平均40%と比較すると海外進出企業の方がダメージは少なかったと言える。更に（図表25）に示すように、業績回復状況においても海外進出企業の方が回復傾向は高いことが分かる。特に国内残留企業における回復率は、リーマンショックから12年も経過した現在でも20%（無回答社を除く）しかないことは想定外であった。

（図表24）リーマンショック後の売上、利益の状況（国内残留企業と海外進出企業）

製造拠点 業績	国内のみ	海外拠点あり			全体合計
		①工場のみ	②販売のみ	③両方あり	
① 変化なし	58	2	4	0	64
② 売上減少	33	2	1	0	36
③ 利益減少	9	0	0	0	9
④ 両方減少	68	1	0	2	71
⑤ 増加	7	2	0	1	10
⑥ 無回答	25	0	0	1	26
①+⑤の企業	65	4	4	1	74
減少企業数	110	3	1	2	116
企業数計（社）	200	7	5	4	216
減少割合(%)	62.9	42.9	20	66.7	61.1
減少割合(%)	62.9	40			

（図表25）現時点（2019年7月）までにリーマンショック以前まで業績回復しない企業
（国内残留企業と海外進出企業）

海外拠点の有無	国内のみ	海外拠点あり			全体合計
		①工場のみ	②販売のみ	③両方あり	
減少企業数	110	3	1	2	116
業績					
① 回復せず	61	1	0	1	63
② 無回答(社)	34	0	1	0	35
①の割合(%)	80.3	33.3	--	50	77.8
国内・海外(%)	80.3	40			

【2.8章での調査データ分析結果のポイント】

- (1) リーマンショック後の企業業績が悪化した企業は、
 1. 売上高が少ない企業ほど多い。
 2. 自社ブランド製品を持っていない企業ほど多い。
 3. 海外拠点を持っていない企業ほど多い。
- (2) リーマンショック後の企業業績が2017年7月時点でリーマンショック以前の水準まで業績が回復していない企業は、
 1. 売上高が少ない企業ほど多い。
 2. 自社ブランド製品を持っていない企業ほど多い。
 3. 海外拠点を持っていない企業ほど多い。

3. 本研究からの知見および今後の課題

中小企業庁は1999年10月に「中小企業基本法⁽⁵⁾」の改正を実施した。改正の理由は「21世紀を見据えて、政策体系を抜本的に再構築し、今後の中長期的な政策展開の機軸を明確にする」ことであった。

「政策理念の転換」としては、従来は「経済の二重構造を背景とした非近代的な中小企業構造を克服するという「格差の是正」が政策目標であり、いわば「脱中小企業論」である」。改正後は「多様で活力ある中小企業こそが我が国の経済の発展と活力の源泉であり、中小企業の自助努力を正面から支援する」となっている。

また「重点政策の転換」としては、従来は「スケールメリットの追究（中小企業構造の高度化）が中心で、「創造」等の位置づけはしない」。改正後は「資金、人材、技術、情報等の経営資源の面での支援を基盤的な施策とし（「経済基盤の確保」、これに創業・経営革新等の前向きな事業活動を行う者への支援と大規模な金融危機等の場合のセーフティーネットの整備を重点政策として位置付ける」としている。

要するに改正後の重点ポイントをまとめると、

- ①多様で活力のある中小企業者の育成と支援（結果として格差の存在は是認）
 - ②経営の革新および創業の促進
 - ③経済的社会的環境の変化への適応の円滑化（中小企業者の自主的な努力を前提）
- ということになる。

今回の中小企業調査において言える事は、従業員数が100人未満の小規模製造メーカーであっても「自社ブランド製品」を持ち、積極的に「海外進出」をしている企業の方がリーマンショックなどの社会的リスクからの回避が容易であり、且つ売上高も大きくなっている傾向がつかめた。

今後の課題としては、前述の中小企業庁の指針どおりの経営をしても、競合企業と戦っていくには「企業の固有技術が競合他社よりも優れており、また顧客に受け入れられる物の製造やインフラ構築」をしなければ企業の継続的な発展は期待できない。その為、対象となる中小企業がどのような固有技術（企業の強み）を有するのかを調査する必要があると考える。

〔注記〕

- (1) Original Equipment Manufacturer の略。 他社ブランドの製品を製造すること、またはその企業のこと。
- (2) 食品製造、食品添加物製造、繊維製造、プラスチック素材製造、化学薬品製造、梱包資材製造、紙製品製造、医薬品製造、貴金属製造、家具製造、製缶、合板製造、ネジ製造など。
- (3) デジタル機器においても、部品の組み合わせによるユニット（機械ユニットや電子基盤ユニットなど）製造は、完成品に組み込まれた時の完成品の品質バラツキをユニット段階でアナログ的に部品修正を事前に行うことにより品質が安定する。アナログ微調整は日本人が得意とする分野でもある。
- (4) 東北地方太平洋沖地震およびこれに伴う福島第一原子力発電所の事故により、特に大手半導体メーカーの工場が被災し、自動車メーカーを筆頭に多くの完成品製造メーカーが製品を作れなくなった。復旧までには約1年を要した。
- (5) 中小企業に関する施策について、その基本理念、基本方針その他の基本となる事項を定めると共に、国および地方公共団体の責務等を明らかにすることにより、中小企業に関する施策を総合的に推進し、もって国民経済の健全な発展および国民生活の向上を図ることを目的として制定された日本の法律。1999年に抜本的な改正がなされた。

〔参考文献〕

- 経済産業省／厚生労働省／文部科学省：ものづくり白書（2019年版）、経済産業調査会、
2019, pp.4-26, 191-192
- 国際協力銀行：わが国製造企業の海外事業展開に関する調査報告 -2019年度 海外直接投資アンケート結果（第31回）-、国際協力銀行 企画部門 調査部、2019, pp.3-11
- 高橋文行：東アジア新興国における中小企業の海外展開、日本経済大学大学院紀要、
2015, Vol.3, No.2, pp.83-92
- 中小企業庁：中小企業白書 2019年版、日経印刷、2019, pp.2-59, 313-395
- 中小企業庁：小規模企業白書 2019年版、日経印刷、2019, pp.30-35
- 中小企業庁：中小企業基本法、1999, 第二章 基本的施策
- 中沢孝夫：中小企業の底力、筑摩書房、2014, pp.23-24

三村孝雄：中小企業の生き残り戦略 - 海外進出か国内残留か -、産業能率大学紀要 第38巻
第1号、2017, pp.29-45

三村孝雄：中小企業の生き残り戦略と経営者の属性、産業能率大学紀要 第39巻 第1号、
2018, pp.23-43

〔インターネット調査の概要〕

1. 実施期間：2019年7月8日～7月19日
2. 対象企業数：中小企業500社（内、従業員数100人以下の企業数は216社）
3. 対象企業所在地：全国
4. 回答企業所在地：茨城県、栃木県、群馬県、千葉県、東京都、神奈川県、静岡県、愛知県、
大阪府、福岡県（1都1府8県）
5. 回答者：経営者（345名）、経営役員（155名）
6. 従業員数：1名～299名
7. 質問形式：選択式34問（一部、自由記述項目有り）

チェビシェフ多項式基本型とエルミート多項式基本型との関係

The relationship between the fundamental styles of Chebyshev and Hermite polynomials

手代木 琢磨

Takuma Teshirogi

勝間 豊

Yutaka Katsuma

Abstract

The previous paper discussed the relationship between the fundamental styles of Chebyshev and Laguerre polynomials. In this paper, we discuss the relationship between the fundamental styles of Chebyshev and Hermite polynomials.

1. 序論

手代木と勝間〔2020〕は、チェビシェフ多項式基本型とラゲール多項式基本型との関係を議論した。

本稿では第一種および第二種のチェビシェフ多項式基本型とエルミート多項式基本型の関係を議論する。

2. チェビシェフ多項式基本型

2. 1 第一種のチェビシェフ多項式基本型とその微分方程式

第一種のチェビシェフ多項式基本型は次式で表される。

$${}_0T_N(x) = 2^{N-1} \cdot [x^N + \sum_{k=1}^N \{(-1)^k \cdot {}_NC_{2k} \cdot \prod_{j=1}^k (\frac{2j-1}{2N-2j}) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k}\}]$$

この式を ${}_0T_N(x) = 2^{N-1} \cdot x^N + 2^{N-1} \cdot \sum_{k=1}^N \{(-1)^k \cdot \frac{{}_NC_{2k}}{2^k} \cdot \prod_{j=1}^k (\frac{2j-1}{N-j}) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k}\}$ と表す。

チェビシエフ多項式基本型とエルミート多項式基本型との関係

ただし $N=0$, $N=1$ の場合は ${}_0T_0(x)=1$, ${}_0T_1(x)=x$ である。この ${}_0T_N(x)$ の微分方程式は

$$\left(1 - \frac{x^2}{\gamma^2}\right) \cdot {}_0T_N(x)'' - \frac{x}{\gamma^2} \cdot {}_0T_N(x)' + \frac{N^2}{\gamma^2} \cdot {}_0T_N(x) = 0 \quad \text{で表される。}$$

この多項式と微分方程式は $\gamma^2 = -1$ でも成立する。

2. 2 第二種のチェビシエフ多項式基本型とその微分方程式

第二種のチェビシエフ多項式基本型は次式で表される。

$${}_0U_N(x) = 2^N \cdot [x^N + \sum_{k=1}^N \{(-1)^k \cdot {}_NC_{2k}\} \prod_{j=1}^k \left(\frac{2j-1}{2N-2j+2}\right) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k}]$$

この式を ${}_0U_N(x) = 2^N \cdot x^N + 2^N \cdot \sum_{k=1}^N \{(-1)^k \cdot \frac{{}_NC_{2k}}{2^k} \cdot \prod_{j=1}^k \left(\frac{2j-1}{N-j+1}\right) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k}\}$ と表す。

ただし $N=0$, $N=1$ の場合は ${}_0U_0(x)=1$, ${}_0U_1(x)=2x$ である。この ${}_0U_N(x)$ の微分方程式は

$$\left(1 - \frac{x^2}{\gamma^2}\right) \cdot {}_0U_N(x)'' - \frac{3x}{\gamma^2} \cdot {}_0U_N(x)' + \frac{N(N+2)}{\gamma^2} \cdot {}_0U_N(x) = 0 \quad \text{で表される。}$$

この多項式と微分方程式は $\gamma^2 = -1$ でも成立する。

3. チェビシエフ多項式基本型とエルミート多項式基本型との関係

3. 1 エルミート多項式の微分方程式とその解

エルミート多項式 $H_N(x)$ の微分方程式は次式で表され、

$$H_N(x)'' - 2x \cdot H_N(x)' + 2N \cdot H_N(x) = 0$$

この微分方程式の解は一般に次式で表される。

$$H_N(x) = (2x)^N - \frac{N(N-1)}{1!} (2x)^{N-2} + \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{2!} (2x)^{N-4} - \dots$$

3. 2 エルミート多項式基本型の微分方程式

エルミート多項式基本型 ${}_0H_N(x)$ の微分方程式を次式で定義する。

$${}_0H_N(x)'' - \frac{2x}{\gamma^2} \cdot {}_0H_N(x)' + \frac{2N}{\gamma^2} \cdot {}_0H_N(x) = 0$$

3. 3 第一種のチェビシェフ多項式基本型とエルミート多項式基本型との関係

第一種のチェビシェフ多項式基本型 ${}_0T_N(x)$ を 2 倍して、エルミート多項式基本型 ${}_0H_N(x)$ は

次式で表されると仮定して $f_N(k)$ を求める。ただし係数 2^N を省いて検討する。

$${}_0H_N(x) = 2^N \cdot x^N + 2^N \cdot \sum_{k=1}^N [(-1)^k \cdot \frac{{}_NC_{2k}}{2^k} \cdot \prod_{j=1}^k \left\{ \left(\frac{2j-1}{N-j} \right) \cdot f_N(k) \right\} \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k}]$$

$$\begin{cases} {}_0H_N(x)' = Nx^{N-1} + \sum_{k=1}^N [(-1)^k \cdot \frac{{}_NC_{2k}}{2^k} \cdot (N-2k) \cdot \prod_{j=1}^k \left\{ \left(\frac{2j-1}{N-j} \right) \cdot f_N(k) \right\} \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k-1}] \\ {}_0H_N(x)'' = N(N-1)x^{N-2} \\ \quad + \sum_{k=1}^N [(-1)^k \cdot \frac{{}_NC_{2k}}{2^k} \cdot (N-2k)(N-2k-1) \cdot \prod_{j=1}^k \left\{ \left(\frac{2j-1}{N-j} \right) \cdot f_N(k) \right\} \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k-2}] \end{cases}$$

$$k=1 \text{ のとき } 4 \cdot {}_NC_2 \cdot \frac{1}{2N-2} \cdot f_N(1) = N(N-1) \quad \text{から} \quad f_N(1) = N-1$$

$$k>1 \text{ のとき } 4k \cdot \frac{2k-1}{2N-2k} \cdot {}_NC_{2k} \cdot f_N(k) = (N-2k+2)(N-2k+1) \cdot {}_NC_{2k-2} \cdot f_N(k-1)$$

を解いて $f_N(k) = (N-k) \cdot f_N(k-1)$ なる漸化式が得られる。

$$f_N(1) = N-1 \quad \text{から} \quad f_N(k) = \prod_{j=1}^k (N-j) \quad \text{となるので} \quad {}_0H_N(x) \text{ は次式で表される。}$$

$$\begin{aligned} {}_0H_N(x) &= 2^N \cdot x^N + 2^N \cdot \sum_{k=1}^N \left\{ (-1)^k \cdot \frac{{}_NC_{2k}}{2^k} \cdot \prod_{j=1}^k (2j-1) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k} \right\} \\ &= 2^N \cdot x^N + \sum_{k=1}^N \left\{ (-1)^k \cdot 2^{N-k} \cdot {}_NC_{2k} \cdot \prod_{j=1}^k (2j-1) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k} \right\} \end{aligned}$$

3. 4 第二種のチェビシェフ多項式基本型とエルミート多項式基本型との関係

第二種のチェビシェフ多項式基本型 ${}_0U_N(x)$ を用いて、エルミート多項式基本型 ${}_0H_N(x)$ では

次式で表されると仮定して $g_N(k)$ を求める。ただし係数 2^N を省いて検討する。

$${}_0H_N(x) = 2^N \cdot x^N + 2^N \cdot \sum_{k=1}^N [(-1)^k \cdot \frac{{}_NC_{2k}}{2^k} \cdot \prod_{j=1}^k \left\{ \left(\frac{2j-1}{N-j+1} \right) \cdot g_N(k) \right\} \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k}]$$

$$\begin{cases} {}_0H_N(x)' = Nx^{N-1} + \sum_{k=1}^N [(-1)^k \cdot \frac{{}_N C_{2k}}{2^k} \cdot (N-2k) \cdot \prod_{j=1}^k \left\{ \left(\frac{2j-1}{N-j+1} \right) \cdot g_N(k) \right\} \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k-1}] \\ {}_0H_N(x)'' = N(N-1)x^{N-2} \\ \quad + \sum_{k=1}^N [(-1)^k \cdot \frac{{}_N C_{2k}}{2^k} \cdot (N-2k)(N-2k-1) \cdot \prod_{j=1}^k \left\{ \left(\frac{2j-1}{N-j+1} \right) \cdot g_N(k) \right\} \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k-2}] \end{cases}$$

$$k=1 \text{ のとき } 4 \cdot {}_N C_{2k} \cdot \frac{1}{2N} \cdot g_N(1) = N(N-1) \quad \text{から} \quad g_N(1) = N$$

$$k>1 \text{ のとき } 4k \cdot \frac{2k-1}{2N-2k+2} \cdot {}_N C_{2k} \cdot g_N(k) = (N-2k+2)(N-2k+1) \cdot {}_N C_{2k-2} \cdot g_N(k-1)$$

を解いて $g_N(k) = (N-k+1) \cdot g_N(k-1)$ なる漸化式が得られる。

$$g_N(1) = N \quad \text{から、} \quad g_N(k) = \prod_{j=1}^k (N-j+1) \quad \text{となるので} \quad {}_0H_N(x) \text{ は次式で表される。}$$

$${}_0H_N(x) = 2^N \cdot x^N + \sum_{k=1}^N \{ (-1)^k \cdot 2^{N-k} \cdot {}_N C_{2k} \cdot \prod_{j=1}^k (2j-1) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k} \}$$

この結果は、第一種のチェビシェフ多項式基本型 ${}_0T_N(x)$ から得られた結果と一致する。しかし、

後に述べるエルミート陪多項式基本型 ${}_0H_N(x)^{(m)}$ と同じ表現にするために、次式のように書く。

$${}_0H_N(x) = {}_N P_0 \cdot [2^N \cdot x^N + \sum_{k=1}^N \{ (-1)^k \cdot 2^{N-k} \cdot {}_N C_{2k} \cdot \prod_{j=1}^k (2j-1) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k} \}]$$

ただし簡略化のために順列の記号、 ${}_N P_0$ を使い、 ${}_N P_0 = \frac{N!}{(N-0)!} = 1$ である。

4. エルミート多項式基本型の性質

4. 1 エルミート多項式基本型とその微分方程式の関係

エルミート多項式基本型の微分方程式とエルミート多項式基本型の中の γ^2 に、 $\gamma^2 = -1$ を代入しても、両者の関係はそのまま成立する。論文の最後の方に、関数 ${}_0H_N(x)$ をまとめておいたが、例えば ${}_0H_7(x)$ の中の γ^2 と、エルミート多項式基本型の微分方程式の γ^2 を $\gamma^2 = -1$ として計算

すると、エルミート多項式基本型は ${}_0H_7(x) = 128x^7 + 1344x^5 + 3360x^3 + 1680x$ となり、

エルミート多項式基本型の微分方程式は ${}_0H_N(x)'' + 2x \cdot {}_0H_N(x)' - 2N \cdot {}_0H_N(x) = 0$ となる。

検算のために、この関数の一階微分および二階微分をとり、計算すると

$$\begin{aligned} {}_0H_7(x)'' + 2x \cdot {}_0H_7(x)' &= 5376x^5 + 26880x^3 + 20160x \\ &\quad + 1792x^7 + 13440x^5 + 20160x^3 + 3360x \\ &= 1792x^7 + 18816x^5 + 47040x^3 + 23520x \\ &= 14 \cdot (128x^7 + 1344x^5 + 3360x^3 + 1680x) = 2 \cdot 7 \cdot {}_0H_7(x) \end{aligned}$$

となり、 $\gamma^2 = -1$ としても成立することが確認できる。

4. 2 エルミート多項式基本型の漸化式

エルミート多項式基本型 ${}_0H_{N-1}(x)$, ${}_0H_N(x)$, ${}_0H_{N+1}(x)$ の間に、

${}_0H_{N+1}(x) - \alpha(N) \cdot x \cdot {}_0H_N(x) + \beta(N) \cdot {}_0H_{N-1}(x) = 0$ なる漸化式が成立すると仮定する。

$$\begin{cases} {}_0H_{N-1}(x) = 2^{N-1} \cdot x^{N-1} + \sum_{k=1}^{N-1} \{ (-1)^k \cdot 2^{N-1-k} \cdot {}_{N-1}C_{2k} \cdot \prod_{j=1}^k (2j-1) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-1-2k} \} \\ {}_0H_N(x) = 2^N \cdot x^N + \sum_{k=1}^N \{ (-1)^k \cdot 2^{N-k} \cdot {}_NC_{2k} \cdot \prod_{j=1}^k (2j-1) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k} \} \\ {}_0H_{N+1}(x) = 2^{N+1} \cdot x^{N+1} + \sum_{k=1}^{N+1} \{ (-1)^k \cdot 2^{N+1-k} \cdot {}_{N+1}C_{2k} \cdot \prod_{j=1}^k (2j-1) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N+1-2k} \} \end{cases}$$

まず ${}_0H_{N+1}(x) - \alpha(N) \cdot x \cdot {}_0H_N(x)$ の x^{N+1} の項が 0 となるので、 $\alpha(N) = 2$

次に ${}_0H_{N+1}(x) - \alpha(N) \cdot x \cdot {}_0H_N(x) + \beta(N) \cdot {}_0H_{N-1}(x) = 0$ の $\gamma^2 \cdot x^{N-1}$ の項も 0 となるので、

$$-2^N \cdot {}_{N+1}C_2 \cdot \gamma^2 + 2 \cdot 2^{N-1} \cdot {}_NC_2 \cdot \gamma^2 + 2^{N-1} \cdot \beta(N) = 0 \quad \text{から} \quad \beta(N) = 2N \cdot \gamma^2$$

結局漸化式は ${}_0H_{N+1}(x) - 2x \cdot {}_0H_N(x) + 2N \cdot \gamma^2 \cdot {}_0H_{N-1}(x) = 0$ となるはずである。

確認のために ${}_0H_{N+1}(x) - 2x \cdot {}_0H_N(x)$ に $k=l$ を代入して $\gamma^{2l} \cdot x^{N+1-2l}$ の項を計算すると、

$$\begin{aligned} {}_0H_{N+1}(x) - 2x \cdot {}_0H_N(x) &= (-1)^l \cdot 2^{N+1-l} \cdot ({}_{N+1}C_{2l} - {}_NC_{2l}) \cdot \prod_{j=1}^l (2j-1) \cdot \gamma^{2l} \cdot x^{N+1-2l} \\ &= (-1)^l \cdot 2^{N+1-l} \cdot \frac{2l}{N+1-2l} \cdot {}_NC_{2l} \cdot \prod_{j=1}^l (2j-1) \cdot \gamma^{2l} \cdot x^{N+1-2l} \end{aligned}$$

となり、 $2N \cdot \gamma^2 \cdot {}_0H_{N-1}(x)$ に $k=l-1$ を代入して $\gamma^{2l} \cdot x^{N+1-2l}$ の項を計算すると、

$$\begin{aligned} 2N \cdot \gamma^2 \cdot {}_0H_{N-1}(x) &= (-1)^{l-1} \cdot 2N \cdot \gamma^2 \cdot 2^{N-l} \cdot {}_{N-1}C_{2l-2} \cdot \prod_{j=1}^{l-1} (2j-1) \cdot \gamma^{2l-2} \cdot x^{N+1-2l} \\ &= (-1)^{l-1} \cdot 2^{N+1-l} \cdot \frac{2l(2l-1)}{N+1-2l} \cdot {}_NC_{2l} \cdot \prod_{j=1}^{l-1} (2j-1) \cdot \gamma^{2l} \cdot x^{N+1-2l} \\ &= (-1)^{l-1} \cdot 2^{N+1-l} \cdot \frac{2l}{N+1-2l} \cdot {}_NC_{2l} \cdot \prod_{j=1}^l (2j-1) \cdot \gamma^{2l} \cdot x^{N+1-2l} \end{aligned}$$

となるので、漸化式が成立していることが解る。

4. 3 エルミート陪多項式基本型とその漸化式

エルミート多項式基本型 ${}_0H_N(x)$ を m 回微分して得られる関数 ${}_0H_N(x)^{(m)}$ を $N-m$ 次のエルミート陪多項式基本型と呼ぶ。まずこの関数の一般式は次のようになる。

$$\begin{aligned} {}_0H_N(x)^{(m)} &= 2^N \cdot \frac{N!}{(N-m)!} \cdot x^{N-m} + \sum_{k=1} \{ (-1)^k \cdot \frac{2^{N-k}}{(2k)!} \cdot \frac{N!}{(N-2k-m)!} \cdot \prod_{j=1}^k (2j-1) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k-m} \} \\ &= {}_NP_m \cdot [2^N \cdot x^{N-m} + \sum_{k=1} \{ (-1)^k \cdot 2^{N-k} \cdot \frac{(N-m)!}{(2k)!(N-2k-m)!} \cdot \prod_{j=1}^k (2j-1) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k-m} \}] \\ &= {}_NP_m \cdot [2^N \cdot x^{N-m} + \sum_{k=1} \{ (-1)^k \cdot 2^{N-k} \cdot {}_{N-m}C_{2k} \cdot \prod_{j=1}^k (2j-1) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k-m} \}] \end{aligned}$$

ただし、簡略化のために順列の記号、 $\frac{N!}{(N-m)!} = {}_NP_m$ を使って書きなおした。

エルミート陪多項式基本型の ${}_0H_{N-1}(x)^{(m)}$, ${}_0H_N(x)^{(m)}$, ${}_0H_{N+1}(x)^{(m)}$ の間に

${}_0H_{N+1}(x)^{(m)} - \alpha(N) \cdot x \cdot {}_0H_N(x)^{(m)} + \beta(N) \cdot {}_0H_{N-1}(x)^{(m)} = 0$ なる漸化式が成立すると考える。

$$\left\{ \begin{aligned} {}_0H_{N-1}(x)^{(m)} &= {}_{N-1}P_m \cdot [2^{N-1} \cdot x^{N-1-m} + \sum_{k=1} \{ (-1)^k \cdot 2^{N-1-k} \cdot {}_{N-1-m}C_{2k} \cdot \prod_{j=1}^k (2j-1) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-1-2k-m} \}] \\ {}_0H_N(x)^{(m)} &= {}_NP_m \cdot [2^N \cdot x^{N-m} + \sum_{k=1} \{ (-1)^k \cdot 2^{N-k} \cdot {}_{N-m}C_{2k} \cdot \prod_{j=1}^k (2j-1) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k-m} \}] \\ {}_0H_{N+1}(x)^{(m)} &= {}_{N+1}P_m \cdot [2^{N+1} \cdot x^{N+1-m} + \sum_{k=1} \{ (-1)^k \cdot 2^{N+1-k} \cdot {}_{N+1-m}C_{2k} \cdot \prod_{j=1}^k (2j-1) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N+1-2k-m} \}] \end{aligned} \right.$$

まず ${}_0H_{N+1}(x)^{(m)} - \alpha(N) \cdot x \cdot {}_0H_N(x)^{(m)} = 0$ の x^{N+1-m} の項から、 $\alpha(N) = \frac{2(N+1)}{N+1-m}$ 。

次に ${}_0H_{N+1}(x)^{(m)} - \alpha(N) \cdot x \cdot {}_0H_N(x)^{(m)} + \beta(N) \cdot {}_0H_{N-1}(x)^{(m)} = 0$ の $\gamma^2 \cdot x^{N-1-m}$ の項も

0 となるので、 $\beta(N) = \frac{2N(N+1)}{N+1-m} \cdot \gamma^2$ となり、結局漸化式は次式となる。

$$(N+1-m) \cdot {}_0H_{N+1}(x)^{(m)} - 2(N+1) \cdot x \cdot {}_0H_N(x)^{(m)} + 2N(N+1) \cdot \gamma^2 \cdot {}_0H_{N-1}(x)^{(m)} = 0$$

確認のために $(N+1-m) \cdot {}_0H_{N+1}(x)^{(m)} - 2(N+1) \cdot x \cdot {}_0H_N(x)^{(m)}$ に $k=l$ を代入して

$\gamma^{2l} \cdot x^{N+1-2l-m}$ の項を計算して次式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^l}{2^l} \cdot \{(N+1-m) \cdot 2^{N+1} \cdot {}_{N+1}P_m \cdot {}_{N+1-m}C_{2l} - 2(N+1) \cdot 2^N \cdot {}_N P_m \cdot {}_{N-m}C_{2l}\} \cdot \prod_{j=1}^l (2j-1) \\ &= (-1)^l \cdot 2^{N+1-l} \cdot \frac{(N+1)!}{(2l)!} \cdot \frac{2l}{(N+1-m-2l)!} \cdot \prod_{j=1}^l (2j-1) \\ &= (-1)^l \cdot 2^{N+1-l} \cdot \frac{1}{(2l-1)!} \cdot {}_{N+1}P_{m+2l} \cdot \prod_{j=1}^l (2j-1) \end{aligned}$$

一方、 $2N(N+1) \cdot \gamma^2 \cdot {}_0H_{N-1}(x)^{(m)}$ に $k=l-1$ を代入して、 $\gamma^{2l} \cdot x^{N+1-2l-m}$ の項を計算して、

$$\begin{aligned} & (-1)^{l-1} \cdot 2N(N+1) \cdot 2^{N-l} \cdot {}_{N-1}P_m \cdot {}_{N-1-m}C_{2l-2} \\ &= (-1)^{l-1} \cdot 2^{N+1-l} \cdot N(N+1) \cdot \frac{(N-1)!}{(N-1-m)!} \cdot \frac{(N-1-m)!}{(N+1-m-2l)! \cdot (2l-2)!} \cdot \prod_{j=1}^{l-1} (2j-1) \\ &= (-1)^{l-1} \cdot 2^{N+1-l} \cdot \frac{(2l-1)}{(2l-1)!} \cdot \frac{(N+1)!}{(N+1-m-2l)!} \cdot \prod_{j=1}^{l-1} (2j-1) \\ &= (-1)^{l-1} \cdot 2^{N+1-l} \cdot \frac{1}{(2l-1)!} \cdot {}_{N+1}P_{m+2l} \cdot \prod_{j=1}^l (2j-1) \end{aligned}$$

となって、漸化式が成立していることが確認できる。

このエルミート陪多項式基本型の漸化式に $m=0$ を代入すると、すでに述べたエルミート多項式基本型の漸化式に等しくなるので、エルミート陪多項式基本型の漸化式は $m=0$ でも成立する。

また、エルミート多項式基本型の漸化式を m 回微分すると、次式が得られる。

チェビシェフ多項式基本型とエルミート多項式基本型との関係

$${}_0H_{N+1}(x)^{(m)} - 2x \cdot {}_0H_N(x)^{(m)} - 2m \cdot {}_0H_N(x)^{(m-1)} + 2N \cdot \gamma^2 \cdot {}_0H_{N-1}(x)^{(m)} = 0$$

この式とエルミート陪多項式基本型との漸化式から、別の漸化式が得られる。

$${}_0H_{N+1}(x)^{(m)} = 2(N+1) \cdot {}_0H_N(x)^{(m-1)}$$

$$(N+1-m) \cdot {}_0H_N(x)^{(m-1)} - x \cdot {}_0H_N(x)^{(m)} + N \cdot \gamma^2 \cdot {}_0H_{N-1}(x)^{(m)} = 0$$

さらにエルミート多項式基本型の微分方程式を m 回微分して ${}_0H_N(x)^{(m)}$ の微分方程式を得る。

$${}_0H_N(x)^{(m+2)} - \frac{2x}{\gamma^2} \cdot {}_0H_N(x)^{(m+1)} + \frac{2(N-m)}{\gamma^2} \cdot {}_0H_N(x)^{(m)} = 0$$

これらの漸化式と微分方程式は $\gamma^2 = -1$ の場合にも成立する。

また ${}_0H_{N+1}(x)^{(m)} = 2(N+1) \cdot {}_0H_N(x)^{(m-1)}$ の m に $m=1$ を代入すれば

$${}_0H_{N+1}(x)^{(1)} = 2(N+1) \cdot {}_0H_N(x) \quad \text{になると思われるので、このことを証明する。まず次式}$$

$${}_0H_{N+1}(x)^{(m)} = {}_{N+1}P_m \cdot [2^{N+1} \cdot x^{N+1-m} + \sum_{k=1}^m \{ (-1)^k \cdot 2^{N+1-k} \cdot {}_N C_{2k} \cdot \prod_{j=1}^k (2j-1) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N+1-2k-m} \}]$$

の m に $m=1$ を代入し、さらに整理して証明できる。

$$\begin{aligned} {}_0H_{N+1}(x)^{(1)} &= {}_{N+1}P_1 \cdot [2^{N+1} \cdot x^N + \sum_{k=1}^1 \{ (-1)^k \cdot 2^{N+1-k} \cdot {}_N C_{2k} \cdot \prod_{j=1}^k (2j-1) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k} \}] \\ &= 2(N+1) \cdot [2^N \cdot x^N + \sum_{k=1}^1 \{ (-1)^k \cdot 2^{N-k} \cdot {}_N C_{2k} \cdot \prod_{j=1}^k (2j-1) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k} \}] \\ &= 2(N+1) \cdot {}_0H_N(x) \end{aligned}$$

さらに ${}_0H_{N+1}(x)^{(m)} = 2(N+1) \cdot {}_0H_N(x)^{(m-1)}$ の N に $N+1$ を、 m に $m=2$ を代入して、

$${}_0H_{N+2}(x)^{(2)} = 2(N+2) \cdot {}_0H_{N+1}(x)^{(1)} \quad \text{が得られ、} \quad {}_0H_{N+1}(x)^{(1)} = 2(N+1) \cdot {}_0H_N(x) \quad \text{を用いて}$$

$${}_0H_{N+2}(x)^{(2)} = 2^2(N+2)(N+1) \cdot {}_0H_N(x) \quad \text{となる。この議論を繰り返して、一般に次式が得られる。}$$

$${}_0H_{N+m}(x)^{(m)} = 2^m \cdot {}_{N+m}P_m \cdot {}_0H_N(x)$$

4. 4 エルミート直交関数とその微分方程式

エルミート多項式 $H_N(x)$ と $e^{-\frac{x^2}{2}}$ との積 $y_N = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot H_N(x)$ をエルミート直交関数という。

この関数の一階微分および二階微分を求める。

$$\begin{cases} y_N' = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \{-x \cdot H_N(x) + H_N(x)'\} \\ y_N'' = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \{-H_N(x) + x^2 \cdot H_N(x) - 2x \cdot H_N(x)' + H_N(x)''\} \end{cases}$$

y_N'' とエルミート多項式 $H_N(x)$ の微分方程式を利用して次式が得られる。

$$\begin{aligned} y_N'' &= e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \{H_N(x)'' - 2x \cdot H_N(x)' + 2N \cdot H_N(x) + x^2 \cdot H_N(x) - 2N \cdot H_N(x) - H_N(x)\} \\ &= e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot H_N(x) \cdot (x^2 - 2N - 1) = (x^2 - 2N - 1) \cdot y_N \end{aligned}$$

結局 $y_N = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot H_N(x)$ の微分方程式は $y_N'' + (-x^2 + 2N + 1) \cdot y_N = 0$ で表される。

4. 5 エルミート直交関数基本型とその微分方程式

エルミート多項式基本型 ${}_0H_N(x)$ と $e^{-\frac{x^2}{2\gamma^2}}$ との積、 ${}_0y_N = e^{-\frac{x^2}{2\gamma^2}} \cdot {}_0H_N(x)$ をエルミート

直交関数基本型と定義する。この関数の一階微分および二階微分をとると、次のようになる。

$$\begin{cases} {}_0y_N' = e^{-\frac{x^2}{2\gamma^2}} \cdot \left\{ -\frac{x}{\gamma^2} \cdot {}_0H_N(x) + {}_0H_N(x)' \right\} \\ {}_0y_N'' = e^{-\frac{x^2}{2\gamma^2}} \cdot \left\{ \frac{x^2}{\gamma^4} \cdot {}_0H_N(x) - \frac{1}{\gamma^2} \cdot {}_0H_N(x) - \frac{2x}{\gamma^2} \cdot {}_0H_N(x)' + {}_0H_N(x)'' \right\} \end{cases}$$

${}_0y_N'$ と ${}_0y_N''$ とエルミート多項式基本型 ${}_0H_N(x)$ の微分方程式を利用して次式が得られる。

$$\begin{aligned} {}_0y_N'' &= e^{-\frac{x^2}{2\gamma^2}} \cdot \left\{ \frac{x^2}{\gamma^4} \cdot {}_0H_N(x) - \frac{1+2N}{\gamma^2} \cdot {}_0H_N(x) \right\} = e^{-\frac{x^2}{2\gamma^2}} \cdot {}_0H_N(x) \cdot \left(\frac{x^2}{\gamma^4} - \frac{1+2N}{\gamma^2} \right) \\ &= {}_0y_N \cdot \left(\frac{x^2}{\gamma^4} - \frac{1+2N}{\gamma^2} \right) \end{aligned}$$

チェビシェフ多項式基本型とエルミート多項式基本型との関係

結局エルミート直交関数基本型の微分方程式は ${}_0y_N'' + \left(-\frac{x^2}{\gamma^4} + \frac{1+2N}{\gamma^2}\right) \cdot {}_0y_N = 0$ となる。

このエルミート直交関数基本型の微分方程式は $\gamma^2 = -1$ でも成立する。

例えば ${}_0y_7 = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot (128x^7 + 1344x^5 + 3360x^3 + 1680x)$ の一階微分、二階微分は次式となり、

$$\begin{aligned} {}_0y_7' &= e^{\frac{x^2}{2}} \cdot (128x^8 + 2240x^6 + 10080x^4 + 11760x^2 + 1680) \\ {}_0y_7'' &= e^{\frac{x^2}{2}} \cdot (128x^9 + 3264x^7 + 23520x^5 + 52080x^3 + 25200x) \\ &= e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \{ x^2 \cdot (128x^7 + 1344x^5 + 3360x^3 + 1680x) \\ &\quad + 15(128x^7 + 1344x^5 + 3360x^3 + 1680x) \} \end{aligned}$$

${}_0y_7'' = (x^2 + 1 + 2 \cdot 7) \cdot {}_0y_7$ となるので ${}_0y_7'' - (x^2 + 1 + 2 \cdot 7) \cdot {}_0y_7 = 0$ が成立する。

下にエルミート多項式基本型 ${}_0H_N(x)$ とエルミート陪多項式基本型 ${}_0H_N(x)^{(m)}$ を挙げる。

$${}_0H_0(x) = 1, \quad {}_0H_0(x)^{(1)} = 0$$

$${}_0H_1(x) = {}_1P_0 \cdot 2^1 \cdot x, \quad {}_0H_1(x)^{(1)} = {}_1P_1 \cdot 2^1$$

$${}_0H_2(x) = {}_2P_0 \cdot (2^2 \cdot x^2 - 2^1 \cdot {}_2C_2 \cdot \gamma^2), \quad {}_0H_2(x)^{(1)} = {}_2P_1 \cdot 2^2 \cdot x, \quad {}_0H_2(x)^{(2)} = {}_2P_2 \cdot 2^2$$

$${}_0H_3(x) = {}_3P_0 \cdot (2^3 \cdot x^3 - 2^2 \cdot {}_3C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x)$$

$${}_0H_3(x)^{(1)} = {}_3P_1 \cdot (2^3 \cdot x^2 - 2^2 \cdot {}_2C_2 \cdot \gamma^2), \quad {}_0H_3(x)^{(2)} = {}_3P_2 \cdot 2^3 \cdot x, \quad {}_0H_3(x)^{(3)} = {}_3P_3 \cdot 2^3$$

$${}_0H_4(x) = {}_4P_0 \cdot (2^4 \cdot x^4 - 2^3 \cdot {}_4C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^2 + 2^2 \cdot {}_4C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4)$$

$${}_0H_4(x)^{(1)} = {}_4P_1 \cdot (2^4 \cdot x^3 - 2^3 \cdot {}_3C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x),$$

$${}_0H_4(x)^{(2)} = {}_4P_2 \cdot (2^4 \cdot x^2 - 2^3 \cdot {}_2C_2 \cdot \gamma^2), \quad {}_0H_4(x)^{(3)} = {}_4P_3 \cdot 2^4 \cdot x, \quad {}_0H_4(x)^{(4)} = {}_4P_4 \cdot 2^4$$

$${}_0H_5(x) = {}_5P_0 \cdot (2^5 \cdot x^5 - 2^4 \cdot {}_5C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^3 + 2^3 \cdot {}_5C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x)$$

$${}_0H_5(x)^{(1)} = {}_5P_1 \cdot (2^5 \cdot x^4 - 2^4 \cdot {}_4C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^2 + 2^3 \cdot {}_4C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4)$$

$${}_0H_5(x)^{(2)} = {}_5P_2 \cdot (2^5 \cdot x^3 - 2^4 \cdot {}_3C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x)$$

$${}_0H_5(x)^{(3)} = {}_5P_3 \cdot (2^5 \cdot x^2 - 2^4 \cdot {}_2C_2 \cdot \gamma^2) \quad , \quad {}_0H_5(x)^{(4)} = {}_5P_4 \cdot 2^5 \cdot x \quad , \quad {}_0H_5(x)^{(5)} = {}_5P_5 \cdot 2^5$$

$${}_0H_6(x) = {}_6P_0 \cdot (2^6 \cdot x^6 - 2^5 \cdot {}_6C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^4 + 2^4 \cdot {}_6C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^2 - 2^3 \cdot {}_6C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6)$$

$${}_0H_6(x)^{(1)} = {}_6P_1 \cdot (2^6 \cdot x^5 - 2^5 \cdot {}_5C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^3 + 2^4 \cdot {}_5C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x)$$

$${}_0H_6(x)^{(2)} = {}_6P_2 \cdot (2^6 \cdot x^4 - 2^5 \cdot {}_4C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^2 + 2^4 \cdot {}_4C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4)$$

$${}_0H_6(x)^{(3)} = {}_6P_3 \cdot (2^6 \cdot x^3 - 2^5 \cdot {}_3C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x)$$

$${}_0H_6(x)^{(4)} = {}_6P_4 \cdot (2^6 \cdot x^2 - 2^5 \cdot {}_2C_2 \cdot \gamma^2) \quad , \quad {}_0H_6(x)^{(5)} = {}_6P_5 \cdot 2^6 \cdot x \quad , \quad {}_0H_6(x)^{(6)} = {}_6P_6 \cdot 2^6$$

$${}_0H_7(x) = {}_7P_0 \cdot (2^7 \cdot x^7 - 2^6 \cdot {}_7C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^5 + 2^5 \cdot {}_7C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^3 - 2^4 \cdot {}_7C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x)$$

$${}_0H_7(x)^{(1)} = {}_7P_1 \cdot (2^7 \cdot x^6 - 2^6 \cdot {}_6C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^4 + 2^5 \cdot {}_6C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^2 - 2^4 \cdot {}_6C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6)$$

$${}_0H_7(x)^{(2)} = {}_7P_2 \cdot (2^7 \cdot x^5 - 2^6 \cdot {}_5C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^3 + 2^5 \cdot {}_5C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x)$$

$${}_0H_7(x)^{(3)} = {}_7P_3 \cdot (2^7 \cdot x^4 - 2^6 \cdot {}_4C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^2 + 2^5 \cdot {}_4C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4)$$

$${}_0H_7(x)^{(4)} = {}_7P_4 \cdot (2^7 \cdot x^3 - 2^6 \cdot {}_3C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x) \quad ,$$

$${}_0H_7(x)^{(5)} = {}_7P_5 \cdot (2^7 \cdot x^2 - 2^6 \cdot {}_2C_2 \cdot \gamma^2) \quad , \quad {}_0H_7(x)^{(6)} = {}_7P_6 \cdot 2^7 \cdot x \quad , \quad {}_0H_7(x)^{(7)} = {}_7P_7 \cdot 2^7$$

$${}_0H_8(x) = {}_8P_0 \cdot (2^8 \cdot x^8 - 2^7 \cdot {}_8C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^6 + 2^6 \cdot {}_8C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^4 - 2^5 \cdot {}_8C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x^2 + 2^4 \cdot {}_8C_8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \gamma^8)$$

$${}_0H_8(x)^{(1)} = {}_8P_1 \cdot (2^8 \cdot x^7 - 2^7 \cdot {}_7C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^5 + 2^6 \cdot {}_7C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^3 - 2^5 \cdot {}_7C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x)$$

$${}_0H_8(x)^{(2)} = {}_8P_2 \cdot (2^8 \cdot x^6 - 2^7 \cdot {}_6C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^4 + 2^6 \cdot {}_6C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^2 - 2^5 \cdot {}_6C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6)$$

$${}_0H_8(x)^{(3)} = {}_8P_3 \cdot (2^8 \cdot x^5 - 2^7 \cdot {}_5C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^3 + 2^6 \cdot {}_5C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x)$$

$${}_0H_8(x)^{(4)} = {}_8P_4 \cdot (2^8 \cdot x^4 - 2^7 \cdot {}_4C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^2 + 2^6 \cdot {}_4C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4)$$

$${}_0H_8(x)^{(5)} = {}_8P_5 \cdot (2^8 \cdot x^3 - 2^7 \cdot {}_3C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x)$$

$${}_0H_8(x)^{(6)} = {}_8P_6 \cdot (2^8 \cdot x^2 - 2^7 \cdot {}_2C_2 \cdot \gamma^2) \quad , \quad {}_0H_8(x)^{(7)} = {}_8P_7 \cdot 2^8 \cdot x \quad , \quad {}_0H_8(x)^{(8)} = {}_8P_8 \cdot 2^8$$

$$\begin{aligned} {}_0H_9(x) = {}_9P_0 \cdot (2^9 \cdot x^9 - 2^8 \cdot {}_9C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^7 + 2^7 \cdot {}_9C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^5 - 2^6 \cdot {}_9C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x^3 \\ + 2^5 \cdot {}_9C_8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \gamma^8 \cdot x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_0H_9(x)^{(1)} = {}_9P_1 \cdot (2^9 \cdot x^8 - 2^8 \cdot {}_8C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^6 + 2^7 \cdot {}_8C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^4 - 2^6 \cdot {}_8C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x^2 \\ + 2^5 \cdot {}_8C_8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \gamma^8) \end{aligned}$$

$${}_0H_9(x)^{(2)} = {}_9P_2 \cdot (2^9 \cdot x^7 - 2^8 \cdot {}_7C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^5 + 2^7 \cdot {}_7C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^3 - 2^6 \cdot {}_7C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x)$$

$${}_0H_9(x)^{(3)} = {}_9P_3 \cdot (2^9 \cdot x^6 - 2^8 \cdot {}_6C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^4 + 2^7 \cdot {}_6C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^2 - 2^6 \cdot {}_6C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6)$$

$${}_0H_9(x)^{(4)} = {}_9P_4 \cdot (2^9 \cdot x^5 - 2^8 \cdot {}_5C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^3 + 2^7 \cdot {}_5C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x)$$

$${}_0H_9(x)^{(5)} = {}_9P_5 \cdot (2^9 \cdot x^4 - 2^8 \cdot {}_4C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^2 + 2^7 \cdot {}_4C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4)$$

$${}_0H_9(x)^{(6)} = {}_9P_6 \cdot (2^9 \cdot x^3 - 2^8 \cdot {}_3C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x) \quad ,$$

$${}_0H_9(x)^{(7)} = {}_9P_7 \cdot (2^9 \cdot x^2 - 2^8 \cdot {}_2C_2 \cdot \gamma^2) \quad , \quad {}_0H_9(x)^{(8)} = {}_9P_8 \cdot 2^9 \cdot x \quad , \quad {}_0H_9(x)^{(9)} = {}_9P_9 \cdot 2^9$$

$$\begin{aligned} {}_0H_{10}(x) = {}_{10}P_0 \cdot (2^{10} \cdot x^{10} - 2^9 \cdot {}_{10}C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^8 + 2^8 \cdot {}_{10}C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^6 - 2^7 \cdot {}_{10}C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x^4 \\ + 2^6 \cdot {}_{10}C_8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \gamma^8 \cdot x^2 - 2^5 \cdot {}_{10}C_{10} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \gamma^{10}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_0H_{10}(x)^{(1)} = {}_{10}P_1 \cdot (2^{10} \cdot x^9 - 2^9 \cdot {}_9C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^7 + 2^8 \cdot {}_9C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^5 - 2^7 \cdot {}_9C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x^3 \\ + 2^6 \cdot {}_9C_8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \gamma^8 \cdot x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_0H_{10}(x)^{(2)} = {}_{10}P_2 \cdot (2^{10} \cdot x^8 - 2^9 \cdot {}_8C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^6 + 2^8 \cdot {}_8C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^4 - 2^7 \cdot {}_8C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x^2 \\ + 2^6 \cdot {}_8C_8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \gamma^8) \end{aligned}$$

$${}_0H_{10}(x)^{(3)} = {}_{10}P_3 \cdot (2^{10} \cdot x^7 - 2^9 \cdot {}_7C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^5 + 2^8 \cdot {}_7C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^3 - 2^7 \cdot {}_7C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x)$$

$${}_0H_{10}(x)^{(4)} = {}_{10}P_4 \cdot (2^{10} \cdot x^6 - 2^9 \cdot {}_6C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^4 + 2^8 \cdot {}_6C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^2 - 2^7 \cdot {}_6C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6)$$

$${}_0H_{10}(x)^{(5)} = {}_{10}P_5 \cdot (2^{10} \cdot x^5 - 2^9 \cdot {}_5C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^3 + 2^8 \cdot {}_5C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x)$$

$${}_0H_{10}(x)^{(6)} = {}_{10}P_6 \cdot (2^{10} \cdot x^4 - 2^9 \cdot {}_4C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^2 + 2^8 \cdot {}_4C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4)$$

$${}_0H_{10}(x)^{(7)} = {}_{10}P_7 \cdot (2^{10} \cdot x^3 - 2^9 \cdot {}_3C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x)$$

$${}_0H_{10}(x)^{(8)} = {}_{10}P_8 \cdot (2^{10} \cdot x^2 - 2^9 \cdot {}_2C_2 \cdot \gamma^2), \quad {}_0H_{10}(x)^{(9)} = {}_{10}P_9 \cdot 2^{10} \cdot x, \quad {}_0H_{10}(x)^{(10)} = {}_{10}P_{10} \cdot 2^{10}$$

$$\begin{aligned} {}_0H_{11}(x) = {}_{11}P_0 \cdot (2^{11} \cdot x^{11} - 2^{10} \cdot {}_{11}C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^9 + 2^9 \cdot {}_{11}C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^7 - 2^8 \cdot {}_{11}C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x^5 \\ + 2^7 \cdot {}_{11}C_8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \gamma^8 \cdot x^3 - 2^6 \cdot {}_{11}C_{10} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \gamma^{10} \cdot x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_0H_{11}(x)^{(1)} = {}_{11}P_1 \cdot (2^{11} \cdot x^{10} - 2^{10} \cdot {}_{10}C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^8 + 2^9 \cdot {}_{10}C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^6 - 2^8 \cdot {}_{10}C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x^4 \\ + 2^7 \cdot {}_{10}C_8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \gamma^8 \cdot x^2 - 2^6 \cdot {}_{10}C_{10} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \gamma^{10}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_0H_{11}(x)^{(2)} = {}_{11}P_2 \cdot (2^{11} \cdot x^9 - 2^{10} \cdot {}_9C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^7 + 2^9 \cdot {}_9C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^5 - 2^8 \cdot {}_9C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x^3 \\ + 2^7 \cdot {}_9C_8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \gamma^8 \cdot x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_0H_{11}(x)^{(3)} = {}_{11}P_3 \cdot (2^{11} \cdot x^8 - 2^{10} \cdot {}_8C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^6 + 2^9 \cdot {}_8C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^4 - 2^8 \cdot {}_8C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x^2 \\ + 2^7 \cdot {}_8C_8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \gamma^8) \end{aligned}$$

$${}_0H_{11}(x)^{(4)} = {}_{11}P_4 \cdot (2^{11} \cdot x^7 - 2^{10} \cdot {}_7C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^5 + 2^9 \cdot {}_7C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^3 - 2^8 \cdot {}_7C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x)$$

$${}_0H_{11}(x)^{(5)} = {}_{11}P_5 \cdot (2^{11} \cdot x^6 - 2^{10} \cdot {}_6C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^4 + 2^9 \cdot {}_6C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^2 - 2^8 \cdot {}_6C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6)$$

$${}_0H_{11}(x)^{(6)} = {}_{11}P_6 \cdot (2^{11} \cdot x^5 - 2^{10} \cdot {}_5C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^3 + 2^9 \cdot {}_5C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x)$$

$${}_0H_{11}(x)^{(7)} = {}_{11}P_7 \cdot (2^{11} \cdot x^4 - 2^{10} \cdot {}_4C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^2 + 2^9 \cdot {}_4C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4)$$

$${}_0H_{11}(x)^{(8)} = {}_{11}P_8 \cdot (2^{11} \cdot x^3 - 2^{10} \cdot {}_3C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x),$$

$${}_0H_{11}(x)^{(9)} = {}_{11}P_9 \cdot (2^{11} \cdot x^2 - 2^{10} \cdot {}_2C_2 \cdot \gamma^2), \quad {}_0H_{11}(x)^{(10)} = {}_{11}P_{10} \cdot 2^{11} \cdot x, \quad {}_0H_{11}(x)^{(11)} = {}_{11}P_{11} \cdot 2^{11}$$

$$\begin{aligned} {}_0H_{12}(x) = {}_{12}P_0 \cdot (2^{12} \cdot x^{12} - 2^{11} \cdot {}_{12}C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^{10} + 2^{10} \cdot {}_{12}C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^8 - 2^9 \cdot {}_{12}C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x^6 \\ + 2^8 \cdot {}_{12}C_8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \gamma^8 \cdot x^4 - 2^7 \cdot {}_{12}C_{10} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \gamma^{10} \cdot x^2 \\ + 2^6 \cdot {}_{12}C_{12} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \gamma^{12}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_0H_{12}(x)^{(1)} = {}_{12}P_1 \cdot (2^{12} \cdot x^{11} - 2^{11} \cdot {}_{11}C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^9 + 2^{10} \cdot {}_{11}C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^7 - 2^9 \cdot {}_{11}C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x^5 \\ + 2^8 \cdot {}_{11}C_8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \gamma^8 \cdot x^3 - 2^7 \cdot {}_{11}C_{10} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \gamma^{10} \cdot x) \end{aligned}$$

$${}_0H_{12}(x)^{(2)} = {}_{12}P_2 \cdot (2^{12} \cdot x^{10} - 2^{11} \cdot {}_{10}C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^8 + 2^{10} \cdot {}_{10}C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^6 - 2^9 \cdot {}_{10}C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x^4 \\ + 2^8 \cdot {}_{10}C_8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \gamma^8 \cdot x^2 - 2^7 \cdot {}_{10}C_{10} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \gamma^{10})$$

$${}_0H_{12}(x)^{(3)} = {}_{12}P_3 \cdot (2^{12} \cdot x^9 - 2^{11} \cdot {}_9C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^7 + 2^{10} \cdot {}_9C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^5 - 2^9 \cdot {}_9C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x^3 \\ + 2^8 \cdot {}_9C_8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \gamma^8 \cdot x)$$

$${}_0H_{12}(x)^{(4)} = {}_{12}P_4 \cdot (2^{12} \cdot x^8 - 2^{11} \cdot {}_8C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^6 + 2^{10} \cdot {}_8C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^4 - 2^9 \cdot {}_8C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x^2 \\ + 2^8 \cdot {}_8C_8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \gamma^8)$$

$${}_0H_{12}(x)^{(5)} = {}_{12}P_5 \cdot (2^{12} \cdot x^7 - 2^{11} \cdot {}_7C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^5 + 2^{10} \cdot {}_7C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^3 - 2^9 \cdot {}_7C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x)$$

$${}_0H_{12}(x)^{(6)} = {}_{12}P_6 \cdot (2^{12} \cdot x^6 - 2^{11} \cdot {}_6C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^4 + 2^{10} \cdot {}_6C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^2 - 2^9 \cdot {}_6C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6)$$

$${}_0H_{12}(x)^{(7)} = {}_{12}P_7 \cdot (2^{12} \cdot x^5 - 2^{11} \cdot {}_5C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^3 + 2^{10} \cdot {}_5C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x)$$

$${}_0H_{12}(x)^{(8)} = {}_{12}P_8 \cdot (2^{12} \cdot x^4 - 2^{11} \cdot {}_4C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^2 + 2^{10} \cdot {}_4C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4)$$

$${}_0H_{12}(x)^{(9)} = {}_{12}P_9 \cdot (2^{12} \cdot x^3 - 2^{11} \cdot {}_3C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x),$$

$${}_0H_{12}(x)^{(10)} = {}_{12}P_{10} \cdot (2^{12} \cdot x^2 - 2^{11} \cdot {}_2C_2 \cdot \gamma^2), \quad {}_0H_{12}(x)^{(11)} = {}_{12}P_{11} \cdot 2^{12} \cdot x, \quad {}_0H_{12}(x)^{(12)} = {}_{12}P_{12} \cdot 2^{12}$$

$${}_0H_{13}(x) = {}_{13}P_0 \cdot (2^{13} \cdot x^{13} - 2^{12} \cdot {}_{13}C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^{11} + 2^{11} \cdot {}_{13}C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^9 - 2^{10} \cdot {}_{13}C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x^7 \\ + 2^9 \cdot {}_{13}C_8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \gamma^8 \cdot x^5 - 2^8 \cdot {}_{13}C_{10} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \gamma^{10} \cdot x^3 \\ + 2^7 \cdot {}_{13}C_{12} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \gamma^{12} \cdot x)$$

$${}_0H_{13}(x)^{(1)} = {}_{13}P_1 \cdot (2^{13} \cdot x^{12} - 2^{12} \cdot {}_{12}C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^{10} + 2^{11} \cdot {}_{12}C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^8 - 2^{10} \cdot {}_{12}C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x^6 \\ + 2^9 \cdot {}_{12}C_8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \gamma^8 \cdot x^4 - 2^8 \cdot {}_{12}C_{10} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \gamma^{10} \cdot x^2 \\ + 2^7 \cdot {}_{12}C_{12} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \gamma^{12})$$

$${}_0H_{13}(x)^{(2)} = {}_{13}P_2 \cdot (2^{13} \cdot x^{11} - 2^{12} \cdot {}_{11}C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^9 + 2^{11} \cdot {}_{11}C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^7 - 2^{10} \cdot {}_{11}C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x^5 \\ + 2^9 \cdot {}_{11}C_8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \gamma^8 \cdot x^3 - 2^8 \cdot {}_{11}C_{10} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \gamma^{10} \cdot x)$$

$${}_0H_{13}(x)^{(3)} = {}_{13}P_3 \cdot (2^{13} \cdot x^{10} - 2^{12} \cdot {}_{10}C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^8 + 2^{11} \cdot {}_{10}C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^6 - 2^{10} \cdot {}_{10}C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x^4 \\ + 2^9 \cdot {}_{10}C_8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \gamma^8 \cdot x^2 - 2^8 \cdot {}_{10}C_{10} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \gamma^{10})$$

$${}_0H_{13}(x)^{(4)} = {}_{13}P_4 \cdot (2^{13} \cdot x^9 - 2^{12} \cdot {}_9C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^7 + 2^{11} \cdot {}_9C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^5 - 2^{10} \cdot {}_9C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x^3 + 2^9 \cdot {}_9C_8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \gamma^8 \cdot x)$$

$${}_0H_{13}(x)^{(5)} = {}_{13}P_5 \cdot (2^{13} \cdot x^8 - 2^{12} \cdot {}_8C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^6 + 2^{11} \cdot {}_8C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^4 - 2^{10} \cdot {}_8C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x^2 + 2^9 \cdot {}_8C_8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \gamma^8)$$

$${}_0H_{13}(x)^{(6)} = {}_{13}P_6 \cdot (2^{13} \cdot x^7 - 2^{12} \cdot {}_7C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^5 + 2^{11} \cdot {}_7C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^3 - 2^{10} \cdot {}_7C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x)$$

$${}_0H_{13}(x)^{(7)} = {}_{13}P_7 \cdot (2^{13} \cdot x^6 - 2^{12} \cdot {}_6C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^4 + 2^{11} \cdot {}_6C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^2 - 2^{10} \cdot {}_6C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6)$$

$${}_0H_{13}(x)^{(8)} = {}_{13}P_8 \cdot (2^{13} \cdot x^5 - 2^{12} \cdot {}_5C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^3 + 2^{11} \cdot {}_5C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x)$$

$${}_0H_{13}(x)^{(9)} = {}_{13}P_9 \cdot (2^{13} \cdot x^4 - 2^{12} \cdot {}_4C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^2 + 2^{11} \cdot {}_4C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4)$$

$${}_0H_{13}(x)^{(10)} = {}_{13}P_{10} \cdot (2^{13} \cdot x^3 - 2^{12} \cdot {}_3C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x)$$

$${}_0H_{13}(x)^{(11)} = {}_{13}P_{11} \cdot (2^{13} \cdot x^2 - 2^{12} \cdot {}_2C_2 \cdot \gamma^2), \quad {}_0H_{13}(x)^{(12)} = {}_{13}P_{12} \cdot 2^{13} \cdot x, \quad {}_0H_{13}(x)^{(13)} = {}_{13}P_{13} \cdot 2^{13}$$

$${}_0H_{14}(x) = {}_{14}P_0 \cdot (2^{14} \cdot x^{14} - 2^{13} \cdot {}_{14}C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^{12} + 2^{12} \cdot {}_{14}C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^{10} - 2^{11} \cdot {}_{14}C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x^8 + 2^{10} \cdot {}_{14}C_8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \gamma^8 \cdot x^6 - 2^9 \cdot {}_{14}C_{10} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \gamma^{10} \cdot x^4 + 2^8 \cdot {}_{14}C_{12} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \gamma^{12} \cdot x^2 - 2^7 \cdot {}_{14}C_{14} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \gamma^{14})$$

$${}_0H_{14}(x)^{(1)} = {}_{14}P_1 \cdot (2^{14} \cdot x^{13} - 2^{13} \cdot {}_{13}C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^{11} + 2^{12} \cdot {}_{13}C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^9 - 2^{11} \cdot {}_{13}C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x^7 + 2^{10} \cdot {}_{13}C_8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \gamma^8 \cdot x^5 - 2^9 \cdot {}_{13}C_{10} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \gamma^{10} \cdot x^3 + 2^8 \cdot {}_{13}C_{12} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \gamma^{12} \cdot x)$$

$${}_0H_{14}(x)^{(2)} = {}_{14}P_2 \cdot (2^{14} \cdot x^{12} - 2^{13} \cdot {}_{12}C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^{10} + 2^{12} \cdot {}_{12}C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^8 - 2^{11} \cdot {}_{12}C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x^6 + 2^{10} \cdot {}_{12}C_8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \gamma^8 \cdot x^4 - 2^9 \cdot {}_{12}C_{10} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \gamma^{10} \cdot x^2 + 2^8 \cdot {}_{12}C_{12} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \gamma^{12})$$

$${}_0H_{14}(x)^{(3)} = {}_{14}P_3 \cdot (2^{14} \cdot x^{11} - 2^{13} \cdot {}_{11}C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^9 + 2^{12} \cdot {}_{11}C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^7 - 2^{11} \cdot {}_{11}C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x^5 + 2^{10} \cdot {}_{11}C_8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \gamma^8 \cdot x^3 - 2^9 \cdot {}_{11}C_{10} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \gamma^{10} \cdot x)$$

$${}_0H_{14}(x)^{(4)} = {}_{14}P_4 \cdot (2^{14} \cdot x^{10} - 2^{13} \cdot {}_{10}C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^8 + 2^{12} \cdot {}_{10}C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^6 - 2^{11} \cdot {}_{10}C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x^4 + 2^{10} \cdot {}_{10}C_8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \gamma^8 \cdot x^2 - 2^9 \cdot {}_{10}C_{10} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \gamma^{10})$$

チェビシェフ多項式基本型とエルミート多項式基本型との関係

$${}_0H_{14}(x)^{(5)} = {}_{14}P_5 \cdot (2^{14} \cdot x^9 - 2^{13} \cdot {}_9C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^7 + 2^{12} \cdot {}_9C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^5 - 2^{11} \cdot {}_9C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x^3 + 2^{10} \cdot {}_9C_8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \gamma^8 \cdot x)$$

$${}_0H_{14}(x)^{(6)} = {}_{14}P_6 \cdot (2^{14} \cdot x^8 - 2^{13} \cdot {}_8C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^6 + 2^{12} \cdot {}_8C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^4 - 2^{11} \cdot {}_8C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x^2 + 2^{10} \cdot {}_8C_8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \gamma^8)$$

$${}_0H_{14}(x)^{(7)} = {}_{14}P_7 \cdot (2^{14} \cdot x^7 - 2^{13} \cdot {}_7C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^5 + 2^{12} \cdot {}_7C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^3 - 2^{11} \cdot {}_7C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x)$$

$${}_0H_{14}(x)^{(8)} = {}_{14}P_8 \cdot (2^{14} \cdot x^6 - 2^{13} \cdot {}_6C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^4 + 2^{12} \cdot {}_6C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^2 - 2^{11} \cdot {}_6C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6)$$

$${}_0H_{14}(x)^{(9)} = {}_{14}P_9 \cdot (2^{14} \cdot x^5 - 2^{13} \cdot {}_5C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^3 + 2^{12} \cdot {}_5C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x)$$

$${}_0H_{14}(x)^{(10)} = {}_{14}P_{10} \cdot (2^{14} \cdot x^4 - 2^{13} \cdot {}_4C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^2 + 2^{12} \cdot {}_4C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4)$$

$${}_0H_{14}(x)^{(11)} = {}_{14}P_{11} \cdot (2^{14} \cdot x^3 - 2^{13} \cdot {}_3C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x)$$

$${}_0H_{14}(x)^{(12)} = {}_{14}P_{12} \cdot (2^{14} \cdot x^2 - 2^{13} \cdot {}_2C_2 \cdot \gamma^2), \quad {}_0H_{14}(x)^{(13)} = {}_{14}P_{13} \cdot 2^{14} \cdot x, \quad {}_0H_{14}(x)^{(14)} = {}_{14}P_{14} \cdot 2^{14}$$

以上のデータをもとに、すでに述べた ${}_0H_{N+m}(x)^{(m)} = 2^m \cdot {}_{N+m}P_m \cdot {}_0H_N(x)$ を検討する。

N に $N=6$ を、 m に $m=1$ から $m=4$ を代入して、データを抜き出し、整理すると

$${}_0H_6(x) = 2^0 \cdot {}_6P_0 \cdot (2^6 \cdot x^6 - 2^5 \cdot {}_6C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^4 + 2^4 \cdot {}_6C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^2 - 2^3 \cdot {}_6C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6)$$

$${}_0H_7(x)^{(1)} = 2^1 \cdot {}_7P_1 \cdot (2^6 \cdot x^6 - 2^5 \cdot {}_6C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^4 + 2^4 \cdot {}_6C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^2 - 2^3 \cdot {}_6C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6)$$

$${}_0H_8(x)^{(2)} = 2^2 \cdot {}_8P_2 \cdot (2^6 \cdot x^6 - 2^5 \cdot {}_6C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^4 + 2^4 \cdot {}_6C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^2 - 2^3 \cdot {}_6C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6)$$

$${}_0H_9(x)^{(3)} = 2^3 \cdot {}_9P_3 \cdot (2^6 \cdot x^6 - 2^5 \cdot {}_6C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^4 + 2^4 \cdot {}_6C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^2 - 2^3 \cdot {}_6C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6)$$

$${}_0H_{10}(x)^{(4)} = 2^4 \cdot {}_{10}P_4 \cdot (2^6 \cdot x^6 - 2^5 \cdot {}_6C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^4 + 2^4 \cdot {}_6C_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^2 - 2^3 \cdot {}_6C_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6)$$

となり、導入した式が正しいことが判明した。

5. 総括

第一種のチェビシエフ多項式基本型 ${}_0T_N(x)$ の微分方程式：

$$\left(1 - \frac{x^2}{\gamma^2}\right) \cdot {}_0T_N(x)'' - \frac{x}{\gamma^2} \cdot {}_0T_N(x)' + \frac{N^2}{\gamma^2} \cdot {}_0T_N(x) = 0$$

第二種のチェビシエフ多項式基本型 ${}_0U_N(x)$ の微分方程式：

$$\left(1 - \frac{x^2}{\gamma^2}\right) \cdot {}_0U_N(x)'' - \frac{3x}{\gamma^2} \cdot {}_0U_N(x)' + \frac{N(N+2)}{\gamma^2} \cdot {}_0U_N(x) = 0$$

第一種のチェビシエフ多項式基本型 ${}_0T_N(x)$ の一般式：

$${}_0T_N(x) = 2^{N-1} \cdot x^N + 2^{N-1} \cdot \sum_{k=1}^N \{(-1)^k \cdot \frac{{}_NC_{2k}}{2^k} \cdot \prod_{j=1}^k \left(\frac{2j-1}{N-j}\right) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k}\}$$

第二種のチェビシエフ多項式基本型 ${}_0U_N(x)$ の一般式：

$${}_0U_N(x) = 2^N \cdot x^N + 2^N \cdot \sum_{k=1}^N \{(-1)^k \cdot \frac{{}_NC_{2k}}{2^k} \cdot \prod_{j=1}^k \left(\frac{2j-1}{N-j+1}\right) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k}\}$$

エルミート多項式基本型 ${}_0H_N(x)$ の微分方程式：

$${}_0H_N(x)'' - \frac{2x}{\gamma^2} \cdot {}_0H_N(x)' + \frac{2N}{\gamma^2} \cdot {}_0H_N(x) = 0$$

エルミート多項式基本型 ${}_0H_N(x)$ の一般式：

$${}_0H_N(x) = {}_NP_0 \cdot [2^N \cdot x^N + \sum_{k=1}^N \{(-1)^k \cdot 2^{N-k} \cdot {}_NC_{2k} \cdot \prod_{j=1}^k (2j-1) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k}\}]$$

エルミート多項式基本型の漸化式： ${}_0H_{N+1}(x) - 2x \cdot {}_0H_N(x) + 2N \cdot \gamma^2 \cdot {}_0H_{N-1}(x) = 0$

$N-m$ 次のエルミート陪多項式基本型 ${}_0H_N(x)^{(m)}$ の微分方程式：

$${}_0H_N(x)^{(m+2)} - \frac{2x}{\gamma^2} \cdot {}_0H_N(x)^{(m+1)} + \frac{2(N-m)}{\gamma^2} \cdot {}_0H_N(x)^{(m)} = 0$$

チェビシェフ多項式基本型とエルミート多項式基本型との関係

$N-m$ 次のエルミート陪多項式基本型の ${}_0H_N(x)^{(m)}$ の一般式 :

$${}_0H_N(x)^{(m)} = {}_N P_m \cdot [2^N \cdot x^{N-m} + \sum_{k=1}^m \{(-1)^k \cdot 2^{N-k} \cdot {}_{N-m} C_{2k} \cdot \prod_{j=1}^k (2j-1) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k-m}\}]$$

エルミート陪多項式基本型の漸化式 :

$$(N+1-m) \cdot {}_0H_{N+1}(x)^{(m)} - 2(N+1) \cdot x \cdot {}_0H_N(x)^{(m)} + 2N(N+1) \cdot \gamma^2 \cdot {}_0H_{N-1}(x)^{(m)} = 0$$

$${}_0H_{N+1}(x)^{(m)} = 2(N+1) \cdot {}_0H_N(x)^{(m-1)}$$

$${}_0H_{N+m}(x)^{(m)} = 2^m \cdot {}_{N+m} P_m \cdot {}_0H_N(x)$$

$$(N+1-m) \cdot {}_0H_N(x)^{(m-1)} - x \cdot {}_0H_N(x)^{(m)} + N \cdot \gamma^2 \cdot {}_0H_{N-1}(x)^{(m)} = 0$$

$$\text{エルミート直交関数基本型 } {}_0y_N \quad : \quad {}_0y_N = e^{-\frac{x^2}{2\gamma^2}} \cdot {}_0H_N(x)$$

$$\text{エルミート直交関数基本型 } {}_0y_N \text{ の微分方程式 } : \quad {}_0y_N'' + \left(-\frac{x^2}{\gamma^4} + \frac{1+2N}{\gamma^2}\right) \cdot {}_0y_N = 0$$

参考文献

手代木 琢磨、勝間 豊：チェビシェフ多項式基本型とラゲール多項式基本型との関係、
産業能率大学紀要、40 (2), 2020, pp71-96

執筆者紹介（掲載順）

2020年9月現在

平 田 譲 二	産業能率大学経営学部 教授
三 村 孝 雄	産業能率大学経営学部 教授
手代木 琢 磨	産業能率大学情報マネジメント学部 元教授
勝 間 豊	産業能率大学情報マネジメント学部 教授

ご協力いただいた査読者の方々にお礼申し上げます。

産業能率大学 紀要

第41巻第1号（通巻78号）

2020年9月30日 発行

編 集 産業能率大学紀要審査委員会

発 行 産業能率大学

〒158-8630 東京都世田谷区等々力6-39-15

経営学部 経営学科

マーケティング学科

〒259-1197 神奈川県伊勢原市上粕屋1573

情報マネジメント学部

現代マネジメント学科

発行事務局 産業能率大学 湘南キャンパス図書館

〒259-1197 神奈川県伊勢原市上粕屋1573

T E L 0463 (92) 2218

印 刷 渡辺印刷株式会社

〒152-0031 東京都目黒区中根2-7-1

T E L 03 (3718) 2161

SANNO University Bulletin

School of Information-Oriented Management
School of Management

Vol. 41 No.1 September 2020

Articles

Validity of “PASCAL for Global”: The Global Management Trait Diagnosis

Joji Hirata.....1

Survival Strategies for Small and Medium-sized Enterprises:

-Are having their own branded products key to overseas expansion?-

Takao Mimura.....19

Research Note

The relationship between the fundamental styles of Chebyshev and Hermite polynomials

Takuma Teshirogi

Yutaka Katsuma.....41