ISSN　1881－2171

産業能率大学紀要

第40巻　第1号
2019年　9月

論文

研究ノート

産業能率大学

「産業能率大学紀要」執筆要項

産業能率大学紀要審査委員会

1．投稿資格

次の条件を満たすものとする。

⑴　産業能率大学情報マネジメント学部・経営学部および自由が丘産能短期大学の専任教員を原則とする。

⑵　共著の場合には、少なくとも一名は、上記⑴の資格を有するものであること。

⑶　本務校を持たない産業能率大学情報マネジメント学部・経営学部および自由が丘産能短期大学の兼任教員。

⑷　上記⑴、⑵、⑶以外で、紀要審査委員会が適当と認めた者。

2．原稿の種類

原稿は、邦文もしくは欧文の、他の刊行物に未発表のもので、論文、研究ノート、事例研究、資料、その他（書評、紹介、報告）のいずれかに該当するものに限る。

3．原稿構成

原稿には、次のものを含むこと。

⑴　邦文および欧文の表題。

⑵　邦文および欧文で書かれた執筆者名と所属。

⑶　論文と研究ノートの場合は150語程度の欧文抄録。

4．原稿の量および投稿方法

⑴　14,000字前後とする。

⑵　欧文原稿の場合は、A４判の用紙を用い、ダブルスペースで30枚以内を原則とする。

⑶　完成原稿をメール添付にて事務局宛に送付する。手書きは不可。なお、セキュリティ上、パスワードを設定し、送信履歴を残す。

5．表記

⑴　原則として、常用漢字、現代かなづかいを用いる。

⑵　表題の脚注

(a) 学会等に発表している場合には、「本論文は、学会名、講演会名、発表日、場所、において発表した。」というように注記する。

(b) 原稿受理日は、事務的に入れる。

⑶　章、節などの記号

章の記号は、１.２.……、節の記号は、１.１、１.２……、２.１、２.２……のように付ける。

⑷　脚注

⑴、⑵のように、注記の一連番号を参照箇所の右肩に書き、注記そのものは、本文の最後に一連番号を付けてまとめる。

(例)

……価格理論の一部として、取り扱われていることになり⑴……（本文）

⑴　価格理論では、このことを特に「機能的分配の理論」と呼んでいる。(注記)

⑸　文献の引用

文章の一部に引用文献の著者名を含む場合は、著者名、続いて文献の発行年度を〔　〕で囲む（例1）

文章の外で文献を引用する場合は、著者名、発行年度を〔　〕で囲む（例2）同一著者、同一年度の文献を複数個引用する場合は、発行年度の次に a, b,……と一連の記号を付ける。

(例1) 文章中の引用

Minsky と Papert〔1969〕のパーセプトロンでは……岩尾〔1979a〕は、すでに述べた…

（例2）文章の外の引用

関係完備制が証明された〔Codd 1971a〕

Example〔von Neumann and Morgenstern 1944〕

⑹　参考文献

本文中で引用した文献は、参考文献として著者名のアルファベット順にまとめる。書誌記述は、単行図書の場合は『著者名：書名、出版社、出版年、（その単行図書の一部を引用する場合には）ページ』の順に記述する。

（例1）和書の場合

テイラー，Ｆ．Ｗ．著 上野陽一訳編：科学的管理法、産業能率短期大学出版部、1969

（例2）洋書の場合

Ablial.J.R.：Data Semantics, Proc.IFIP Working Conference on Data Base Management, North-Holland, 1974, pp.1-60

雑誌の場合は『執筆者名：表題、雑誌名、巻（号）、出版年、ページ』の順とする。

（例1）和雑誌の場合

小田稔：マイクロ波の朝永理論、科学、49（12）, 1979, pp.795-798

（例2）洋雑誌の場合

Kipp, E.M.：Twelve Guides to Effecive Human Relations in R. & D., Research Management, 7(6), 1964, pp.419-428

⑺　図・表

図・表は、一枚の用紙に一つだけ書き、図・表のそれぞれに、図1－1（Figure 1-1）、表1－1（Table 1-1）のように一連番号を付け、タイトルを記入する。

6．投稿期日

９月刊行の号は４月上旬、２月刊行の号は９月中旬を締め切りとする。ただし、投稿は随時受け付ける。

7．投稿原稿の審査

原稿の採否は紀要審査委員会において決定する。採用された原稿について、加筆、修正が必要な場合は、一部の書き直しを要求する場合がある。また、表記などの統一のため、紀要審査委員会で一部改める場合もある。なお、原稿のテーマによっては紀要審査委員以外のものに原稿の査読を依頼することがある。

8．執筆者校正

校正は執筆者の責任において行うこととする。（校正段階における加筆は、印刷の進行に支障を来すので、完全原稿を提出すること。）

9．著作物の電子化と公開許諾

本誌に掲載された著作物の著作権は執筆者に帰属するが、次の件は了承される。

⑴　執筆者は、掲載著作物の本文、抄録、キーワードに関して紀要審査委員会に「電子化公開許諾書」を提出し、著作物の電子化及び公開を許諾するものとする。共著の場合は、すべての執筆者の提出が必要である。

⑵　上記により難い場合は、紀要審査委員会に相談する。

10．掲載論文の別刷

掲載された論文１編につき、本誌１部、別刷100部を無償で執筆者に贈呈する。別刷100部以上は有料とする。

（1991.6.5）
（1994.7.6改正）
（2003.1.7改正）
（2003.9.17改正）
（2013.4.29改正）
（2015.4.24改正）

［論文］

Sanno University Bulletin Vol. 40 No. 1 September 2019

東急線・副都心線沿線の主要都市の来街頻度に関する分析

A Study on the Visitation Frequency of Major Cities Located Along the Tokyu-Line and the Fukutoshin-Line

寺嶋　正尚

Masanao Terashima

都留　信行

Nobuyuki Tsuru

武内　千草

Chigusa Takeuchi

Abstract

In this study, we analyzed the changes in the visitation frequency of major cities located along the Tokyu-Line and the Fukutoshine-Line. We carried out a questionnaire survey on the Internet. First, we analyzed demographic factors such as sex and age group differences. We also analyzed factors related to interests and lifestyles. In the latter half of the study, we conducted a factor analysis and a test of the mean difference. Taking Jiyugaoka City as an example, we found that women, older people, and people longing for fulfilling lives tend to decrease their visitation frequencies.

1.　はじめに

近年、JRや私鉄沿線の都市に関する書籍等が人気を博している。「住みたい街ランキング」の類である。ここ数年に発売されたものを見ても、『沿線格差　首都圏鉄道路線の知られざる通信簿（首都圏鉄道路線研究会（2016)』)、『駅格差 首都圏鉄道駅の知られざる通信簿（同(2017))』、『東京どこに住む？住所格差と人生格差（速水健朗（2016))』、『首都圏「街」格差（首都圏「街」格差研究会（2017))』など、枚挙に暇がない。

その中でも毎年大きな注目を集めているのが、株式会社リクルートが運営する、不動産に

2019年4月2日　受理

関する大手ポータルサイト・SUUMOの「住みたい街ランキング」であろう。その最新版を見ると表1のようになった。そこでは横浜、目黒、武蔵小杉といった東急線沿線の街がランクインしていることが分かる。さらに20位まで広げると、12位に中目黒、13位に渋谷、17位に二子玉川、19位に自由が丘が入っている。東急線は人気路線であると言って良いだろう。

これを5年前と比較すると、その顔触れは幾分異なってくる。2014年の1位は吉祥寺であったがそれが3位に、3位の池袋は11位に、6位の自由が丘は19位にランクを下げている。一方、5位の横浜は首位に、23位だった大宮は4位に、7位の新宿は5位に順位をあげている。近年の傾向としては、横浜、恵比寿、大宮、品川、浦和のように、JR線沿線の大都市が好まれる傾向があると言えるかも知れない。日経新聞(2018)は、「交通の便が良い郊外のターミナル駅で、都市へのアクセスと生活の便の良さを兼ね備えた街の人気が高まっているようだ」とし、日経MJ(2017)は、最近吉祥寺が住みたい街ランキング1位の座から陥落したことを取上げ、「(横浜などが)人々をひき付けるのは通勤のしやすさやコスパの良さ」と分析している。

表1　住みたい街ランキング(2014及び2019年の比較)

	2014	2019
1	吉祥寺	横浜
2	恵比寿	恵比寿
3	池袋	吉祥寺
4	中目黒	大宮
5	横浜	新宿
6	自由が丘	品川
7	新宿	目黒
8	品川	浦和
9	武蔵小杉	武蔵小杉
10	表参道	鎌倉
19		自由が丘

出所)SUUMO(2014)、SUUMO(2019)

本論文はこうした状況を踏まえ、人気路線である東急線および東急東横線と相互乗入れをする東京メトロ副都心線(以下、副都心線)に焦点をあて、その沿線都市に関する分析を行うものである。後述するようにネット調査を実施し、来街頻度に関する考察を行う。来街頻度が増加した人、減った人はどのような属性の人だろうか。

なお本稿の筆者は、いずれも自由が丘に立地する総合大学に勤務する教員であり、大学附

設の地域創生・産学連携研究所の研究員を兼任している。これまで10年以上にわたって、地域活性化に関する研究活動プロジェクトの一環として、自由が丘等に関する研究を行ってきた。本論文も同研究所が2018年に実施した「自由が丘イメージ調査」をもとにしたものである。自由が丘商店街振興組合、ユニアデックス株式会社、株式会社オズマピーアール、産業能率大学が4社協定を締結し、その枠組みの中で行った共同研究である。

以下、章を改め、先行研究を考察した後、実際に行ったネット調査の概要、分析結果、分析からの知見を記す。

2. 先行研究

住みたい街や好きな街に関する先行研究は、ウェブ上に掲載されているものや新聞記事等が多く、学術論文として記されているものは多くない。以下、①需要サイドに立った研究、②供給サイドに立った研究、に分け考察する。

(1) 需要サイドに立った研究

需要サイドすなわち消費者や来街者の視点に立った先行研究は下記の通りである。なお本論文も、需要サイドに立った研究に位置づけられる。

青柳・桜井（1987）は、バブル経済時代に行われたものであるが、当時の女性が抱く沿線イメージについて、アンケート調査を実施したものである。20代の女性を中心に、調査している。その結果を見ると、好きな沿線のトップは東急東横線であり、その理由としては「きれい」「スマート」「おしゃれ」があげられている。既に当時から、東急線が人気であったことがうかがえる。

同様に、消費者を対象にアンケート調査を行ったものとしては、産業能率大学（2007）、同（2008）、同（2010）、同（2011）、同（2012）、同（2015）、同（2016）、同（2017）、同（2018）がある。毎年自由が丘等に関するアンケートを行うことで、定点観測し、その変化を見ることを目的にした調査報告書である。2007、2012、2016、2017はいずれも自由が丘への来街者に対してアンケートを実施している。「自由が丘への来街頻度」「自由が丘への来街頻度の変化（過去2〜3年）」「来街頻度の変化の理由」「自由が丘と聞いて思い浮かぶ商品や店」「自由が丘以外でよく行く街及びその理由」「自由が丘の街に対する要望、改善すべきところなど」等について分析している。

産業能率大学（2008）は、上記の自由が丘への来街者アンケートを、代官山への来街者に対して行ったもの、同（2018）は、中目黒への来街者に対して行ったものである。また同（2010）は、ネット調査を実施し、自由が丘、代官山、二子玉川、吉祥寺、下北沢の5つの街のイメージについて比較考察を行っている。結果としては、「おしゃれな街」は自由が丘（回答者の

83％があてはまるとした)、代官山（同80％)、「高級な街」は代官山（同67％)、「若者の街」は下北沢（同34％）となった。また「それぞれの街に人生のどの時期に住みたいか」に関しては、「独身時代」は下北沢（同34％)、吉祥寺（同31％)、「子育て期」は二子玉川（同36％)、「新婚時代」は自由が丘（同34％）となった。産業能率大学（2011）は、同（2010）を受けて、自由が丘と吉祥寺を取り上げ、その都市間比較を、ネット・グループ・インタビューにより行ったものである。本論文は、自由が丘を初めとする東急線及び副都心線沿線の街に関する考察をするものであるから、前述の産業能率大学（2008)、同（2010)、同（2011）の内容を、さらに発展させたものとして位置づけることが出来る。

また産業能率大学（2015）は、同大学のセザンジュという地域活動（自由が丘の街案内等の活動）において、その取組みをした学生の業務日誌データを分析したものである。来街者からどのような質問・要望が寄せられたかといったテキスト情報の分析を行っている。

(2) 供給サイドに立った研究

次に供給サイドに立った研究を列挙する。本論文は前述したように需要サイドに立った研究であるため、これらと立ち位置を異にするが、しかし先行研究を見ると、供給サイドからの研究は少なからず存在する。いわゆる鉄道事業者等の視点に立った論文である。

齋藤他（2016）は、主要駅を対象にその満足度について分析したものである。利用者がどのような項目を評価しているか、アンケート調査を行い、因子分析を行っている。満足度にかかわる因子としては、「トイレ満足」「駅員満足」「清潔感満足」などをあげている。住みたい街や好きな街の1つの重要な要素として通勤・通学の駅を考えるとき、こうした鉄道事業者による駅の整備も重要な視点といえる。田中・高見沢（2010）は、大手民間鉄道事業者が、自社の沿線価値向上のためにどのような施策を講じているか分析したものである。大手民間鉄道事業者15社に対してアンケート調査を行い（回答は6社)、子育て支援や高齢者向けサービスの実施、住み替えやリフォームに関する支援、情報誌や情報サイトによる沿線情報の提供などの項目について、沿線別の比較考察を行っている。

鉄道会社に勤務する著者が、実際に取組んだ街開発について論じたものとしては、太田（2017）がある。東急田園都市線のたまプラーザを例に、まちづくりの事例を記している。WISE CITY（賢者の街）プロジェクトを紹介し、そのキーワードとして、W（Wellness & Walkable)、I（Intelligence & ICT)、S（Smart, Sustainable & Safety)、E（Ecology, Energy & Economy）をあげている。住みたい街、好きな街のコンセプトとして参考になる。また三木（2017）も、東急電鉄に勤務する筆者が特別講演を行い、その概要を記したものだが、東急電鉄全体における街づくりの方針を確認したうえで、渋谷に焦点をあて、開発事業を考察している。

吉田肇（2017）は、住みたい街ランキングなど、ランキングそのものについて考察したものである。全部で6つの調査を取り上げ、その概要を記している。また事例としては、吉祥寺と米国・ポートランド市を取り上げ、魅力の要因を考察している。

（3）本論文の目的及び学術的意義

前述したように、本論文は東急線及び副都心線沿線の街に訪れる頻度を分析するものである。ネットによるアンケート調査を基に考察するものであり、需要サイドに立った研究の流れに位置づけられる。本論文では、研究対象の街を東急線及び副都心線沿線に広げたが、こうした広範囲の街を対象とした先行研究は存在しない。本論文の新規性、独自性を担保するものといえる。

なお本論文は、来街頻度の変化に対し、どのような人が良く訪れるようになり、逆に訪れなくなったか考察することを主目的とする。アンケート調査で尋ねたフェイス情報等を元にその分析を行う。こうした定量的アプローチに基づく先行研究もない。

3.　分析結果

3. 1　アンケート調査の概要

東横線・副都心線沿線の主要都市に関する関心度を把握すべく、ネットアンケート調査を実施した。その概要は表2に示すとおりである。

表2　アンケート調査の概要

アンケート名	東急東横線・副都心線利用者に関するネットリサーチ
実施日	2019 年 1 月
対象者	株式会社ドゥハウスのモニター（名称：my アンケート） ・自由が丘に行ったことがない人を除去（スクリーニング基準として設定） ・男女同数になるように無作為抽出を実施
調査方法	ネット調査
回答者数	400 人（上記「my アンケート」のモニターから事前調査に応じた 1635 名のうち、スクリーニング基準を満たした人を抽出）
実施主体	株式会社ドゥハウス

3. 2　回答者の概要及び分析対象都市

次に同アンケートの回答者400人のプロフィールを示す。

性別は元々スクリーニングの段階で、男女半々になるように調整しているため、「男性」50.0%、「女性」50.0%となった。世代は「15～19歳」2.0%、「20～29歳」32.0%、「30～39歳」10.5%、「40～49歳」23.0%、「50～59歳」14.0%、「60～69歳」12.0%、「70歳以上」6.5%となり、20代と40代が多くなった。未既婚は、「未婚」46.0%、「既婚」52.8%、「その他」1.3%であり、職業は、多い順に示すと「会社員」41.0%、「専業主婦・主夫」16.5%、「パート・アルバイト」11.3%、「無職」10.0%、「学生」6.8%、「自営業」3.5%、「会社役員」「専門職」「その他」が同数で1.8%、「教職」が0.5%となった。

以上、本アンケートの回答者の平均的なプロフィールとしては、「20代もしくは40代の既婚の会社員」と言うことになろう。

なお東急線･副都心線沿線の主要都市としては、池袋、新宿三丁目（新宿)、明治神宮前（原宿)、渋谷、恵比寿、代官山、中目黒、自由が丘、武蔵小杉、横浜、みなとみらい、二子玉川、三軒茶屋、吉祥寺とした。恵比寿、吉祥寺、三軒茶屋は東急線及び副都心線沿線の都市ではないが、恵比寿は中目黒及び代官山と近隣でありそれらと合わせて街の評価を行う目的から、吉祥寺及び三軒茶屋は住みたい街ランキングの常連であることから分析対象とした。

3. 3　主要都市に対する来街頻度

各街への訪れる頻度は、表3のようになった。

これを見ると、「週に1回以上訪れる」で10%以上となった街は、多い順で池袋、新宿三丁目、渋谷、横浜となった。また「月に1回以上訪れる」で20%以上となった街も、順位こそ違うが、渋谷、池袋、新宿三丁目、横浜となった。いずれもターミナル駅や乗り換えが出来る駅等に訪れる頻度が高いことが分かる。

一方、来街頻度が少ないものとしては、「週に1回以上」で見ても、「月に1度以上」で見ても、最も少ないのは自由が丘となり、次いで三軒茶屋となった。前述したように、近年自由が丘は住みたい街ランキング等でその順位を下げている。そうした傾向は、この来街頻度によっても確認出来るものとなった。

表3　各街への来街頻度（N ＝400、%）

	ほとんど毎日	週に4～5回程度	週に2～3回程度	週に1回程度	月に2～3回程度	月に1回程度	2～3か月に1回程度	年に2～3回程度	それ以下（行ったことはある）	行ったことがない	週に1回以上	月に１回以上
池袋	3.0	2.3	3.8	6.8	5.3	7.0	8.5	17.5	44.0	2.0	15.9	28.2
新宿三丁目（新宿）	1.8	1.8	2.8	6.3	4.8	7.5	9.0	14.5	47.8	4.0	12.7	25.0
明治神宮前（原宿）	0.5	1.3	1.3	4.8	2.8	7.3	8.5	14.0	56.8	3.0	7.9	18.0
渋谷	1.5	1.5	3.8	5.3	9.3	8.8	16.8	13.8	38.0	1.5	12.1	30.2
恵比寿	0.8	1.8	1.5	4.0	2.5	4.3	9.3	11.8	57.5	6.8	8.1	14.9
代官山	1.0	1.0	1.3	3.5	2.3	5.3	4.0	7.0	64.8	10.0	6.8	14.4
中目黒	1.0	1.0	1.8	2.8	1.5	5.8	4.3	8.5	64.5	9.0	6.6	13.9
自由が丘	0.5	1.0	1.0	3.5	2.0	4.0	5.5	7.3	75.3	0.0	6.0	12.0
武蔵小杉	1.3	1.0	2.5	2.3	2.5	3.3	4.3	9.5	52.3	21.3	7.1	12.9
横浜	2.0	1.8	2.0	4.8	4.8	5.8	8.5	15.8	53.3	1.5	10.6	21.2
みなとみらい	1.3	2.0	1.3	4.0	2.8	5.5	8.3	11.5	57.0	6.5	8.6	16.9
二子玉川	1.3	1.3	1.3	3.0	1.5	4.0	5.0	6.8	61.3	14.8	6.9	12.4
三軒茶屋	0.8	0.8	1.5	3.0	2.3	2.0	4.3	6.3	62.5	16.8	6.1	10.4
吉祥寺	1.8	1.0	1.0	4.0	2.8	3.8	5.8	10.0	58.8	11.3	7.8	14.4

（注1）いずれの街も、表3において、行の合計が100％になるようになっている。
（注2）「週に1回以上」「月に1回以上」は、該当する箇所を合計したもの。

3．4　来街者の関心度

次に来街者に対し、日ごろ関心のある事柄について尋ねた。先行研究などをもとに、以下の25の項目を設けた。「外食・飲食」「料理・調理」「ファッション」「美容」「健康・医療・介護」「仕事」「教育（習い事・塾・自己啓発等）」「家族・恋人」「ペット」「人付き合い」「コンサート・観劇・映画鑑賞」「パソコン・スマホ」「インターネット・SNS」「ゲーム・カラオケ」「スポーツ・アウトドア」「自動車」「国内旅行」「海外旅行」「住宅」「日曜大工・園芸」「ボランティア・地域活動」「お金・投資・保険」「ギャンブル」「政治・経済」「環境問題」の25項目である。

それぞれについて、「大変関心がある」「関心がある」「どちらとも言えない」「関心がない」「全く関心がない」のリッカート型尺度による5段階評定を行った。「大変関心がある」を5、「関心がある」を4、「どちらとも言えない」を3、「あまり関心がない」を2、「全く関心がない」を1とし、因子分析を行った結果が表4である。その結果4つの因子軸が抽出された。「上質な暮らしに対する関心」「社会に対する関心」「娯楽に対する関心」「情報感度」と名付けることとした。

なお因子分析における固有値の数値等は表5に整理した。

表4　来街者の関心事に関する因子分析の結果（その1）（回転後の成分行列）

	上質な暮らし	社会	娯楽	情報感度
Q3-4.美容の関心度	0.828	0.103	0.17	0.066
Q3-3.ファッションの関心度	0.794	0.085	0.237	0.07
Q3-2.料理、調理の関心度	0.742	0.145	0.153	0.052
Q3-1.外食、飲酒の関心度	0.608	0.022	0.196	0.213
Q3-5.健康、医療、介護の関心度	0.558	0.413	0.028	0.268
Q3-17.国内旅行の関心度	0.558	0.289	0.027	0.331
Q3-18.海外旅行の関心度	0.522	0.395	0.162	0.215
Q3-7.教育（習い事、塾、自己啓発）の関心度	0.51	0.379	0.342	0.159
Q3-24.政治、経済の関心度	0.083	0.832	0.135	0.163
Q3-25.環境問題の関心度	0.285	0.752	0.18	0.163
Q3-22.お金、投資、保険の関心度	0.151	0.612	0.174	0.369
Q3-21.ボランティア・地域活動の関心度	0.305	0.562	0.535	-0.088
Q3-19.住宅の関心度	0.442	0.546	0.282	0.169
Q3-23.ギャンブル（パチンコ、競馬など）の関心度	-0.002	0.219	0.707	0.116
Q3-14.ゲーム、カラオケの関心度	0.188	-0.182	0.666	0.435
Q3-16.自動車の関心度	0.175	0.358	0.636	0.065
Q3-9.ペットの関心度	0.285	0	0.634	0.144
Q3-15.スポーツ、アウトドアの関心度	0.211	0.25	0.608	0.241
Q3-20.日曜大工（DIY）、園芸の関心度	0.155	0.524	0.591	-0.032
Q3-13.インターネット、SNSの関心度	0.197	0.121	0.244	0.816
Q3-12.パソコン、スマホの関心度	0.207	0.253	0.203	0.797
Q3-8.家族、恋人の関心度	0.482	0.281	0.047	0.456
Q3-11.コンサート、観劇、映画鑑賞の関心度	0.474	0.229	0.117	0.405
Q3-10.人付き合いの関心度	0.466	0.315	0.287	0.367
Q3-6.仕事の関心度	0.388	0.3	0.384	0.193

（注1）因子抽出法：主成分分析
（注2）回転法：Kaiser の正規化を伴うバリマックス法。10 回の反復で回転が収束

表5　来街者の関心事に関する因子分析の結果（その2）（説明された分散の合計）

成分	初期の固有値			抽出後の負荷量平方和			回転後の負荷量平方和		
	合計	分散の %	累積 %	合計	分散の %	累積 %	合計	分散の %	累積 %
1	10.14	40.561	40.561	10.14	40.561	40.561	4.914	19.657	19.657
2	1.895	7.582	48.143	1.895	7.582	48.143	3.785	15.139	34.796
3	1.535	6.138	54.281	1.535	6.138	54.281	3.553	14.213	49.009
4	1.349	5.396	59.678	1.349	5.396	59.678	2.667	10.669	59.678
5	0.994	3.978	63.655						
6	0.916	3.664	67.319						
7	0.763	3.051	70.37						
8	0.735	2.938	73.309						
9	0.684	2.735	76.044						
10	0.646	2.583	78.626						
11	0.568	2.271	80.897						
12	0.524	2.096	82.994						
13	0.492	1.969	84.962						
14	0.475	1.9	86.863						
15	0.425	1.701	88.563						
16	0.417	1.669	90.232						
17	0.379	1.518	91.75						
18	0.352	1.406	93.157						
19	0.348	1.391	94.547						
20	0.317	1.267	95.814						
21	0.272	1.088	96.902						
22	0.263	1.051	97.953						
23	0.187	0.749	98.702						
24	0.172	0.689	99.391						
25	0.152	0.609	100						

（注1）因子抽出法：主成分分析

3．5　来街頻度の変化に関する考察

（1）デモグラフィックな要因で見た考察

以上の準備を踏まえ、本節では来街頻度の変化に関する分析を行う。

住みたい街ランキング等に見るように、街に対する評価は年々変化している。そしてそれに伴って、来街頻度も変化している。どのような人が来街頻度をあげ、また逆に下げているのだろうか。

そこで先ず、基本的な属性として、デモグラフィックな要因を取り上げる。来街者の性別

及び世代である。これらにより、来街頻度の変化にはどのような違いが見られるだろうか。

なお分析では、各街を訪れる頻度として、過去5〜6年において「非常に増えた」を5点、「やや増えた」を4点、「どちらとも言えない」を3点、「やや減った」を2点、「非常に減った」を1点としてその平均値を算出した。今便宜上、この数値を「来街頻度指数」と呼ぶことにする。先ずは性別で分析する。分析結果は、図1に示すとおりである。

図1　過去5〜6年における来街頻度の変化（性別）

来街頻度指数が大きいものほど、来街頻度が高いことを意味している。「どちらとも言えない」が3点であるため、3点より大きければ、現在の来街頻度は5〜6年前に比べて高くなっていることを、3点より小さければ低くなっていることを意味する。

その結果、男性では新宿三丁目、横浜、みなとみらい、池袋、明治神宮前、武蔵小杉、渋谷の順に高くなり、かつこれらの街が3.0以上となった。逆に、自由が丘、三軒茶屋等が低くなった。

一方、女性を見ると、武蔵小杉のみが3.0となり、それ以外の街はいずれも3.0未満となった。全体的にみて、過去に比べて外出等の機会が減っていることが分かる。なお、なかでも減っている街は、自由が丘、中目黒、吉祥寺となった。こうした結果も、前述したように、 近年、自由が丘や吉祥寺に住みたいという声が、相対的にみて少なくなりつつある現状を裏付ける

ものと言える。

次に世代別に見た考察を行う（図2参照）。「15～19歳」「20代」「30代」「40代」「50代」「60代」「70代以上」に分けた。評点に関しては、図1同様である。

これを見ると、各街によって若干の変動はあるものの、軒並み世代があがるに連れて、来街頻度が減少していることが分かる。来街頻度が増えているのは、10代、20代、30代である。逆に60代や70代以上は、大幅に来街頻度を下げている。

図2　過去5～6年における来街頻度の変化（世代）

60代、70代以上の人たちは、全体的に見て来街頻度を下げているなかで、横浜やみなとみらいに関しては、その減少の幅が小さくなった。こうした都市は、比較的シニア層の獲得に成功していると言って良いだろう。

（2）消費者の関心度やライフスタイル別の考察

次に、3章4節で行った因子分析を行った結果をもとに考察する。そこで抽出された因子は、「上質な暮らしに対する関心」「社会に対する関心」「娯楽に対する関心」「情報感度」の4つであった。

これら因子に対し、各個人がプラスの評価をしているもの（変数の値が1.0以上）、マイナス

の評価をしているもの（同1.0未満）に分けた。例えば「上質な暮らしに対する関心がある人」と「上質な暮らしに対する関心がない人」では、来街頻度がどのように変化したかといったものである。4つの軸、すべてについて分析する。平均の差の検定を行った（表6)。

以下、その結果に対し、自由が丘を例に解釈を加える。来街頻度の数値に関しては前節同様である。3. 5. (1）で定義づけた来街頻度係数である。

先ず上質な暮らしに対する関心であるが、関心がある人の来街頻度指数は2.76、関心がない人のそれは2.92となった。つまり上質な暮らしに関心がある人は、そうでない人に比べて、より自由が丘への来街頻度を減らしていることになる。こうした人たちは、むしろ他の街への来街頻度を増やしている可能性が高く、相対的に見ると、横浜、みなとみらい、武蔵小杉に流れている可能性を示唆するものとなった。

次に「社会経済に関心がある人」の来街頻度指数は、自由が丘に関しては2.82、「社会経済に関心がない人」は同2.88となった。これも僅かではあるが、関心がある人の方が、より来街頻度を下げている実態が分かった。

またギャンブル等の娯楽に関心がある人の来街頻度指数は2.63、関心がない人のそれは3.08となった。これは自由が丘以外の街でも、関心がない人の数値はいずれも3.0以上となった。これらの街では、ギャンブル等に関心がある人達ではなく、むしろこうしたことに関心がない人を集めている可能性が高いと言える。おしゃれな街、上品な街を目指す都市においては、その街づくりやイメージ戦略に功を奏していると言えるだろう。なお同数値は、いずれの都市においても5％水準で有意となった。

最後に情報感度の高い人の来街頻度指数は2.80、情報感度の低い人のそれは2.91となった。情報感度の高い人はそうでない人に比べ、より来街頻度を下げていることになる。流行に敏感で、新しいものに関心がある人たちは、むしろ自由が丘から足を遠ざけている可能性があるというわけで、今後同街に関していえば、情報発信のあり方等を改善する余地があると言って良いのかも知れない。なお情報感度に関しては、武蔵小杉のみが3.0を超える結果となった。武蔵小杉の情報戦略は、情報感度の高い人に合致したものである可能性が高い。

表6　関心事別見た来街頻度の変化

上質な暮らし

	1.池袋	2.新宿三丁目	3.明治神宮前	4.渋谷	5.恵比寿	6.代官山	7.中目黒	8.自由が丘	9.武蔵小杉	10.横浜	11.みなとみらい	12.二子玉川	13.三軒茶屋	14.吉祥寺
プラスの評価をした人	2.87	2.86	2.80	2.79	2.81	2.80	2.81	2.76	2.90	2.91	2.90	2.83	2.80	2.82
マイナスの評価をした人	3.09	3.08	3.12	3.04	3.03	3.01	2.96	2.92	3.11	3.06	3.06	3.02	2.99	2.99
合計	2.99	2.99	2.98	2.93	2.94	2.92	2.90	2.86	3.02	2.99	2.99	2.94	2.91	2.92

社会経済

	1.池袋	2.新宿三丁目	3.明治神宮前	4.渋谷	5.恵比寿	6.代官山	7.中目黒	8.自由が丘	9.武蔵小杉	10.横浜	11.みなとみらい	12.二子玉川	13.三軒茶屋	14.吉祥寺
プラスの評価をした人	2.99	2.99	2.98	2.93	2.95	2.88	2.88	2.82	2.98	2.97	2.93	2.88	2.81	2.90
マイナスの評価をした人	2.99	2.99	2.99	2.94	2.93	2.96	2.91	2.88	3.05	3.01	3.05	2.98	2.99	2.94
合計	2.99	2.99	2.98	2.93	2.94	2.92	2.90	2.86	3.02	2.99	2.99	2.94	2.91	2.92

娯楽

	1.池袋	2.新宿三丁目	3.明治神宮前	4.渋谷	5.恵比寿	6.代官山	7.中目黒	8.自由が丘	9.武蔵小杉	10.横浜	11.みなとみらい	12.二子玉川	13.三軒茶屋	14.吉祥寺
プラスの評価をした人	2.72	2.77	2.78	2.71	2.73	2.68	2.69	2.63	2.84	2.76	2.82	2.74	2.65	2.65
マイナスの評価をした人	3.25	3.20	3.19	3.15	3.14	3.15	3.10	3.08	3.17	3.22	3.16	3.13	3.15	3.17
合計	2.99	2.99	2.98	2.93	2.94	2.92	2.90	2.86	3.02	2.99	2.99	2.94	2.91	2.92

情報感度

	1.池袋	2.新宿三丁目	3.明治神宮前	4.渋谷	5.恵比寿	6.代官山	7.中目黒	8.自由が丘	9.武蔵小杉	10.横浜	11.みなとみらい	12.二子玉川	13.三軒茶屋	14.吉祥寺
プラスの評価をした人	2.94	2.95	2.98	2.91	2.86	2.86	2.84	2.80	3.01	2.92	2.94	2.94	2.89	2.87
マイナスの評価をした人	3.05	3.03	2.98	2.96	3.02	2.98	2.96	2.91	3.02	3.07	3.04	2.94	2.92	2.97
合計	2.99	2.99	2.98	2.93	2.94	2.92	2.90	2.86	3.02	2.99	2.99	2.94	2.91	2.92

（注）網掛け街は、平均の差の検定を行った結果、5％水準で有意となったものを示す。

4. 本研究からの知見

以上の整理を今一度しておきたい。

本論文は、人気路線とされる東急線及び東急東横線と相互乗入れをしている副都心線沿線の都市を対象に、人々の来街頻度の変化について分析したものである。来街頻度が増えた人、減った人は、どのような属性の人であるか、その詳細を考察した。

本論文では、その属性情報として、デモグラフィックなもの（性別及び世代）、そして人々の関心やライフスタイルを採用した。それらと来街頻度の変化の関係性を分析するという流れである。

結論としては、性別で見ると、男性より女性の方が、世代別で見ると年代が高くなればなるほど、各街を訪れる頻度が低下していることが分かった。また街ごとのバラツキも見てとれ、横浜、みなとみらいといった街が、比較的来街頻度の減少を抑えているのに対し、自由が丘、吉祥寺等はやや減少幅が大きいことが分かった。

次に人々の関心やライフスタイルについて因子分析を行い、抽出された「上質な暮らしに対する関心」「社会に対する関心」「娯楽に対する関心」「情報感度」の因子について、それぞれプラスの評価をする人、マイナスの評価をする人に分けて来街頻度を考察した。全体的な傾向としては、いずれの指標もプラスの評価をした人の方が、マイナスの評価をした人に比べて来街頻度の減少幅が大きくなった。

街には様々なイメージがある。高級なイメージ、おしゃれなイメージ、庶民的なイメージのある街、インテリジェンスなイメージ、教育に強い、娯楽に強い、流行の最先端のイメージなどである。そしてそういうイメージが好きな人たちが街に集まり、街を評価するようになる。以下自由が丘を例に考察してみよう。

自由が丘は昔から、30代～40代の女性に支持される、ファッションや美容に強い街というイメージがあった。フランスをイメージした街づくりを行い、これまでずっと流行の最先端をいく街であった。しかし分析結果を見ると、こうしたこれまで同街を支持してきた女性層、シニア層、さらに上質な暮らしを求める人たちなどは、同街への来街頻度を下げていることが分かった。この傾向が続くと、いずれ街のイメージは変わっていくことになろう。もちろんその場合には、新しい魅力が生まれ、新しいターゲットが集まる街になる。しかし古くからの自由が丘のファンは、こうした傾向を感じ取るや否や、加速度的に足を運ばなくなってしまうかも知れない。

このように本研究の成果は、街づくりに関する施策を決定したり、イベントを実施したりする際などに、その知見を活用することが出来る。そして想定するターゲット層がきちんと街を訪れているか、またどのような新規の来街者が訪れつつあるかなどを考察する際、有用となろう。本研究では自由が丘を例に、その分析結果の解釈を行ったが、他の街に関しても

同様の意義があると考える。

5. 今後の課題

本論文では、東急線及び副都心線沿線の都市に対する来街頻度について、どのような人が、各街への来街頻度を高め、また下げているか考察した。

しかし本来は、こうした現状分析に止まることなく、その理由や原因について考察することも重要である。今回のアンケート調査では、その理由や原因について自由回答で尋ねているが、こうした分析についても今後合わせて行って参りたい。

また本論文では、属性を示すものとして、性別、世代別、人々の関心等の指標を採用したが、より厳密な分析を行うためには、それら以外の指標も考慮する必要がある。こうした変数選択の問題も、今後の課題として掲げておきたい。

さらに分析としては、各街の細かい事情まで考慮したものとは言い難い点も付記しなければならない。みなとみらいと横浜で微妙な差がある場合、その理由は何であるかなど、各街の視点に立った、より詳細なケーススタディが不可欠というわけである。こうした点についても、今後分析を深めて参りたい。

6. 参考文献

・青柳秀和・桜井真夕美「街頭100人調査　ファッションタウンと郊外住宅地をリードする現代女性の沿線新イメージ」ACROSS，パルコ，1987年5月号。

・太田雅文「次なる世代に向けた鉄道沿線まちづくりの取り組み－東急田園都市における事例－」都市住宅学97，pp55-60，都市住宅学会，2017年9月。

・齋藤宣弘・寺部慎太郎・武藤雅威・葛西誠「都市鉄道顧客満足度調査からみた満足度と愛着の関係」土木学会論文集72-5（土木計画学研究・論文集33），pp231-239，土木学会，2016年。

・首都圏鉄道路線研究会『沿線格差　首都圏鉄道路線の知られざる通信簿』SB 新書，2016年。

・首都圏鉄道路線研究会『駅格差 首都圏鉄道駅の知られざる通信簿』SB 新書，2017年。

・首都圏「街」格差研究会『首都圏「街」格差』KADOKAWA，2017年。

・産業能率大学『第2回自由が丘調査　自由が丘エリアの来街者アンケート調査報告書』産業能率大学，2007年3月。

・産業能率大学『第2回代官山調査　代官山エリアの来街アンケート調査報告書』産業能率大学，2008年3月。

・産業能率大学『第4回自由が丘調査　自由が丘の街のイメージ調査－自由が丘と代官山・二子玉川・吉祥寺・下北沢との比較を中心に－』産業能率大学，2010年3月。

・産業能率大学『第5回自由が丘エリア調査　自由が丘と吉祥寺の都市間比較調査』産業能率

大学，2011年3月。
・産業能率大学『第6回自由が丘調査　自由が丘エリアの来街者アンケート調査報告書』産業能率大学，2012年3月。
・産業能率大学（武内千草・寺嶋正尚・都留信行著）「2014地域活性化に関する調査研究報告」Content Business Research Center Annual Report Vol1，pp4-7，産業能率大学・コンテンツビジネス研究所，2015年3月。
・産業能率大学（武内千草・寺嶋正尚・都留信行著）「2015地域活性化に関する調査研究報告」Content Business Research Center Annual Report Vol2，pp4-9，産業能率大学・コンテンツビジネス研究所，2016年3月。
・産業能率大学（武内千草・寺嶋正尚・都留信行著）「2016地域活性化に関する調査研究報告」Content Business Research Center Annual Report Vol3，pp4-7，産業能率大学・コンテンツビジネス研究所，2017年3月。
・産業能率大学（武内千草・寺嶋正尚・都留信行著）「2017地域活性化に関する調査研究報告」Content Business Research Center Annual Report Vol4，pp2-6，産業能率大学・コンテンツビジネス研究所，2018年3月。
・SUUMO（2019），関東住みたい街ランキング2019年。
https://suumo.jp/edit/sumi_machi/2019/kanto/
・SUUMO（2014），関東編 総合 住みたい街ランキング2014年。
https://suumo.jp/edit/sumi_machi/2014/kanto/
・田中絢人・高見沢実「大手民間鉄道事業者による沿線価値向上に向けた取り組みに関する研究」都市計画報告集8，日本都市計画学会，pp213-216，2010年2月。
・日経 MJ（2017），「住めば都　穴場は北千住・蔵前　近くて便利　西＜東」2017年5月3日。
・日経新聞（2018），「「住みたい街」横浜が首位　吉祥寺陥落」日経新聞2018年2月28日。
・速水健朗『東京どこに住む？住所格差と人生格差』朝日新書，2016年。
・三木尚「特別講演　渋谷における東急の開発事業」工学教育65（6），pp41-43，日本工学教育協会，2017年。
・吉田肇「都市の評価・ランキングにみるまちの魅力に関する考察」都市経済研究年報17，pp97-112，宇都宮共和大学，2017年。

［論文］

Sanno University Bulletin Vol. 40 No. 1 September 2019

生きいき働く高年齢者の要因に関する研究
～高年齢勤務者 10 名を対象として～

Study on actively working senior citizens
- Based on interviews on 10 senior employees -

川並　剛
Tsuyoshi Kawanami
城戸　康彰
Yasuaki Kido

Abstract

This study sought to identify factors that help senior employees（aged 60 or older）play active roles in workplaces. As is widely known, Japan is experiencing a decrease in the working-age population concomitant with a rapidly aging society；therefore, it is necessary to promote the employment of senior citizens. Indeed, elderly people remain highly motivated and willing to work. For this study, I interviewed 10 senior employees, most of whom are in their 60s, and analyzed their answers. The results reveal the keys to an active work life：being trusted（i.e.,being desired by peers），having stable human relationships with many people on the job, actively interacting with younger people on the job, being willing to engage in close human relationships in the workplace, enjoying continuous learning on the job, and consequently being highly satisfied with the job.

1.　問題の背景と研究目的

企業における高年齢者の雇用は、65歳までの継続雇用が進んできたといえる。また、日本の高年齢者自身の就業意欲は世界に類を見ない高さとなっており、清家・山田（2004）は、「生涯現役社会」を実現することが可能な国であると指摘している。「生涯現役社会」の実現には、生きいきと仕事をすることが望まれるものの、高年齢者の就業を取り巻く事情や環境は様々である。

高年齢者就業の諸施策として、高年齢者雇用安定法の平成24（2012）年（2013年4月1日施行）

2019年4月3日　受理

の改正において、対象者の年齢による経過措置はあるものの、65歳までの雇用確保が確実なものとなっている。『高齢社会白書』平成29年版において、高年齢者の雇用確保措置を実施済の企業は、従業員31人以上の企業約15万社のうち、99.5％となっており、さらに、7割以上の企業で希望者全員が65歳以上まで働くことができると示されている。法改正の後押しで高年齢者の雇用が進行していると言える。

高年齢者の就業意欲について、『高齢者の日常生活に関する意識調査』（2014年）では、働けるうちはいつまでも働きたいと思っている人を含め71.9％が65歳以上も働く希望を持っていることが示されている。この多くの高年齢者が働く希望を持っていることを国際比較で見ると、清家・山田（2004）は、「実効引退年齢」と公的年金の受給開始年齢と等しい年齢と定義した「公的引退年齢」を比較し、日本は、他国に比べて実効引退年齢が公的引退年齢をはるかに上回る特異な実態があることを指摘している。また、『2018データブック国際労働比較』によると、欧米諸国は、60～64歳で退職する傾向が見られるが、日本では、65～69歳並びに70～74歳において働く人が多く、特に70～74歳でも2割の人が働いている。このように高年齢者の働く意欲は高く、国際的に見ても多くの人が働くことを希望していると言える。

高年齢者雇用の進行と働く意欲が高いことが明らかではあるが、他方で、賃金の問題、定年はいくつがいいかという議論や役職をどうするかという議論も多く出ている。そこでは、労働者側の視点で、生活費のために働く、健康を維持するために働くといった再雇用後の労働条件について議論がある。また、企業側の視点で、再雇用後の仕事の設計・処遇といった人事管理上の議論も展開されている。

しかしながら、個別の人事管理上の議論も重要であるが、本稿ではむしろ高年齢者の意識の側面に焦点を当てたい。つまり、高年齢者が生きいき働くとはどういうことなのかということに注目したい。

生きいき働くことに注目した理由を、個人に関わる側面と組織に関わる側面からみる。個人に関しては、仕事に満足していることで、生きがい・やりがいが高まり、それは幸福感が増すことにつながると考えられる。単なる自己満足は生きがいではないと思われる。また、生きいきしていると肉体的にも健康的にも良好となり、これは本人にとっても良い状態であると言える。組織に関しては、生きいき働くことで、仕事の生産性が向上し、本人の能力が発揮され、望ましい成果を上げることができる。また、その過程において、若い人への専門的な技術やスキルの伝承を積極的に行うことが考えられる。仕事への満足度が高い人は組織に貢献していると言え、これは明らかに組織に取ってプラスであり、有益とみられる。

しかし、高年齢者の再雇用は、個人的あるいは組織的に多様な要因が関係している。労働条件や仕事の設計・処遇といった人事管理上の問題が議論されている一方で、生きいき働くことの実態が十分説明されているとは言えないのではないだろうか。

本研究では、高年齢者の人たちが、実際にどのような働き方をしているのか、特にそれを「生きいき」という観点から明らかにすることを目的とする。研究においては、高年齢者の雇用の状況や働く意欲に関する先行研究を考察し、その中からリサーチ・クエスチョンを設定する。そしてそれを説明するために高年齢の被雇用者（概ね60歳代）に対するインタビュー調査により、生きいきと仕事をするための要因を明らかにしていく。

2. 高年齢者の働く意欲に関する研究とリサーチ・クエスチョンの設定

2. 1 高年齢者雇用の実態

高年齢者雇用の実態については、様々な統計資料が出ている。

『第9回中高年者縦断調査』（2013年）では、高年齢者が働く理由として、「社会とのつながりを維持したい」、「今の仕事が好きだから」、「社会に役立ちたいから」といった積極的な理由が挙げられている反面、「現在の生活費のため」、「将来の生活資金のため」、「健康を維持するため」といった消極的な理由も挙げられている。

『団塊世代の高齢期10年間調査の研究報告書』（2016年）では、全体的には「現在の生活のため」、「老後の生活に備えるため」、「健康のため」といった消極的理由が高い割合であると報告されている。一方で、勤務年数が「長期」の人の働く理由では、「社会とのつながりを維持したいから」、「今の仕事が好きだから」、「自分の経験や能力を発揮したいから」、「会社や職場の仲間から働いて欲しいと頼まれているから」という回答が多くなっている。

高年齢者が働く理由を見てみると、「生活のため」といった衛生要因的な理由がある一方で、「今の仕事が好きだから」といったいわゆる動機付け要因が挙げられることもあり、積極的理由、消極的理由の双方があるといえよう。

2. 2 先行研究に見る働く意欲の要因

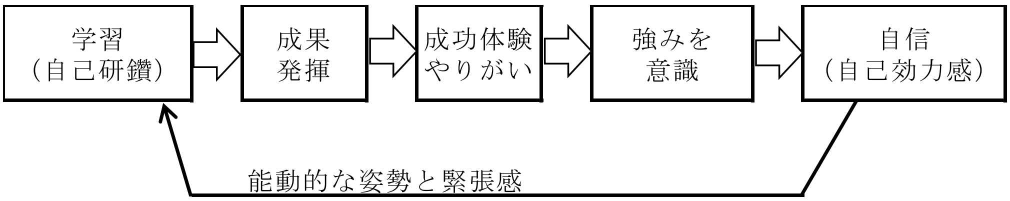
高年齢者の就労意欲や働く生きがいについての研究は、近年多く見られるようになっている。

福島（2007）は、高年齢者の就労動機や就労価値観に注目し、高年齢者の働く意欲や意識について検証している。インタビューの分析から就労に対する意欲や意識には、「誰かのために役に立ちたい」、「無理なく働きたい」という2つの要因が重要なものであることを明らかにしている。つまり、前述の高年齢者の就労実態の結果と同様に、「誰かのために役に立ちたい」という積極的理由と、「無理なく働きたい」という衛生要因的な側面が混在していることを指摘している。

松本（2006）は、就労意欲に関係する要因を経済上や健康上及びライフスタイルという多方面の観点から探っている。その中で就労意欲に影響する要因として、「生涯学び続けたい」など自己啓発的な生活意識としての向学心の強さを指摘している。また、その生活意識には

積極的な自己研鑽を図り、緊張感をもって物事に能動的に取組む姿勢がみてとれるという。「生涯学び続けたい」という学習意欲の強さが、一種の学習のメカニズムを形成しており、学習の結果、仕事の成果をあげることで、成功体験ややりがいを感じ、それが自信つまり自己効力感につながるということを明らかにしている。この点は本研究にとって参考になる内容であり、これを「学習のメカニズム」としてまとめると次のようになる。

図表1　高年齢者における学習のメカニズム



出所：筆者作成

戸田（2015）は、高年齢者雇用の現実から、どのような人が仕事に生きがいをもっているか探っている。高年齢者にとっては、仕事内容への満足度が生きがいとなり、そこには職場での地位の高さや人間関係・雰囲気はあまり関係なく、賃金水準も生きがいには影響が薄いとしている。一方で、定年を経験すると仕事への生きがいを感じなくなり、生きがいを持たない傾向があることを示している。このことは後述する「接続期」における処遇と役割の変化がモチベーションの低下につながっているという問題とも関係している。

田尾ほか（2001）は、仕事の中身や働きやすい職場があれば、加齢があったとしても能力やパフォーマンスを十分維持できるとしている。つまり、担当する仕事や上司との関係、またゆとりある仕事環境などが整っていると、高年齢者の能力やパフォーマンスは低下しないとしている。また、仕事の満足度や組織コミットメントの情緒的な愛着は年齢と共に高まる傾向があり、会社への貢献意欲はむしろ高まることを指摘している。

就労意欲の要因を探る研究があるとともに、高年齢者の就労意欲を解明・測定しようとする研究もある。永野（2012）は、仕事にどの程度熱中し、どの程度満足しているかを示す概念を「仕事熱中満足度」と名付けている。「仕事熱中満足度」は、9項目からなる指標であり、高年齢者が「生きいきと仕事をしている状態」を捉えるものとして、本研究でも参考になるものである。

これまでは生きいきに影響する要因を示してきたが、他方でそれを阻害する要因も示されている。『ホワイトカラー高齢社員の活躍をめぐる現状・課題と取組み』（2016年）では、55～59歳層を、60歳以降の高年齢期につながる世代として「接続期」と名付けている。この接

続期における大きな変化として、役職から外れる、いわゆる「役職定年」があり、役職定年を経験した者は、意欲の大きな減退を経験する者が多いと報告されている。そして、60～65歳の継続雇用者の5割以上に意欲の減退が生じており、その中でも接続期で意欲が減退した者は、60歳以降も約2割が引きずることが明らかになっている。

2. 3　リサーチ・クエスチョンの設定

定年後の雇用では、仕事内容や給与等の処遇などの変化により、働く意欲も変化することが予想される。実態調査結果や先行研究を見ても、働く意欲に関係する要因には、「自分の能力や経験を活かしたい」という積極的な理由もあれば、「生活費や健康のため」といった消極的な理由もあり、種々の理由が交錯している。また、そもそも「生きいきと働く」とはどういうことかに関して永野（2012）の研究はあるものの、その内容が十分に解明されているわけではない。そこで、リサーチ・クエスチョン（RQ）1を次のように設定した。

RQ1：高年齢者にとって生きいきとした働き方とは、どのようなことなのか。

RQ1により、生きいきとした働き方は、どういうことか、また、生きいきとした働き方に影響している要因を明らかにしてみたい。

定年後の働き方は、「接続期」での指摘のように定年前の仕事経験が関係している。また、松本（2006）の研究にもあるように、個人のもつ学習志向性の強さや、それによる知識やスキルの向上、仕事経験を通しての経験知の蓄積や自信・自己効力感の向上が定年後の「生きいきとした働き方」に影響していることが考えられる。そこで、次のようにRQ2を設定した。

RQ2：高年齢者にとって生きいきとした働き方は、どのように形成されるのであろうか。

3. 「生きいきと働くこと」の調査の枠組み

3. 1　調査のための分析モデル

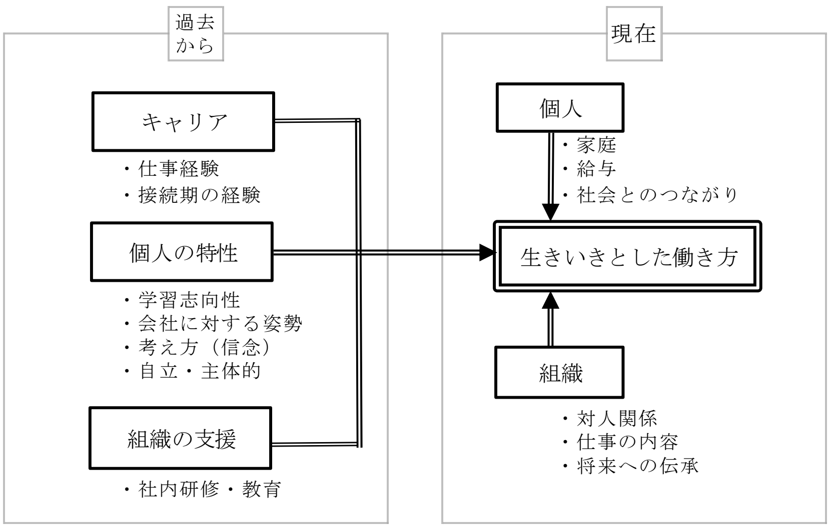
RQ1並びにRQ2を受けて双方を解明するために分析モデルを作成した。このモデルは、「現在」の状態と「過去から」続いているものという二つの視点で構成している。

RQ1については、図表2の「現在」にあるように「生きいきとした働き方」に対して、個人的要因、組織要因がどのように関係しているかを探るものである。「個人」に関しては、「生活費や将来の生活資金」といった「家庭」状況や「給与」、「社会的なつながり」といった高年齢者の就労条件に関するものから構成される。「組織」に関しては、「対人関係」や「仕事の内容」、「将来への伝承」といった高年齢者の職場における位置付けや役割に関するものから構成される。これらの項目ついて、「個人」に関しては、まず、「家庭」が高年齢者の働き方に影響すると考えた。「生活費や将来の生活資金」といった家庭状況があったり、福島（2007）のいう「無理なく働きたい」というのも家庭状況を考えての働き方と考えられるからである。

また、定年後において社会的な関係を保つために就業することが考えられるため「社会的なつながり」も分析モデルに加えた。戸田（2015）は高年齢者が働く要因として「賃金」をあげており、本モデルでは「給与」としている。組織に関する要因を採り上げている研究は少ないが、永野（2012）は職場行動の一つとして「調和」をあげている。本研究では、これに関連して「対人関係」を入れ、他に「仕事の内容」や「将来への伝承」を組織要因として加えた。高年齢者には技能の伝承を役割として期待されることもあり「将来への伝承」を加えた。

RQ2に対応するのが、「過去から」に該当する要因群である。まず、「キャリア」として、どのような仕事経験を積んできたか、及び前述の「接続期」に関係するものが含まれる。他に、学習志向性や会社に対する姿勢などから成る「個人の特性」、および社内での研修にみられる「組織の支援」といった要因から「過去から」は構成され、「生きいきとした働き方」との関係が調べられる。これらの項目について、「キャリア」に関しては、戸田（2015）や日本経済団体連合会（2016年）の調査研究で用いられているものを使用した。「個人の特性」に関しては、松本（2006）が用いている学習意欲を「学習志向性」に含めたほか、田尾ほか（2001）や永野（2012）、戸田（2015）らが高年齢者の態度として用いている仕事への満足度や関与度、組織コミットメントを「会社に対する姿勢」に含めた。「組織の支援」に関しては、先行研究では使用されていないものの、高年齢者の働き方にはキャリア支援などは大事なことと考えるので独自に加えた。

図表2　調査のための分析モデル



出所：筆者作成

3. 2　調査及び分析方法とインタビュー調査の対象者

本研究の調査方法として、高年齢の被雇用者（概ね60歳代）10名へのインタビューが用いられる。インタビューは、半構造化された形式で行われた。インタビューの内容は、全て記録媒体に保管して、逐語録を作成し、この逐語録が分析の基本資料となっている。

データの分析方法として、インタビュイーの逐語録から生きいきとした働き方及びそれに関係すると思われる発言を抽出し、抽出した発言内容を、調査のための分析モデルにある項目別（個人的要因、組織要因、キャリア、個人の特性、組織の支援）に分類した。分類した内容に関して、10名の中で頻度の高い事象を絞り込んで、生きいきとした働き方や分析モデルにある要因との関係を導き出した。

インタビュー調査の対象者は、図表3インタビュイーリストの通りである。

図表3　インタビュイーリスト

インタビュイー	インタビュー時期	インタビュー年齢	職務経歴
A 氏	2018/10	69 歳	音響機器メーカーに 29 年勤務。転職後起業、IT 企業の常勤監査役を兼任、現在は非常勤
B 氏	2018/10	70 歳	金融機関に 25 年勤務。転職後総合金融業（グループの持株会社）の常勤監査役、現在に至る
C 氏	2018/10	61 歳	金融機関に 37 年勤務、現在に至る
D 氏	2018/11	62 歳	金融機関に 38 年勤務、現在に至る
E 氏	2018/11	64 歳	金融機関に 40 年勤務、現在に至る
F 氏	2018/11	62 歳	総合通信・情報システム企業に 38 年勤務、現在に至る
G 氏	2018/11	61 歳	総合通信・情報システム企業に 36 年勤務、現在に至る
H 氏	2018/11	61 歳	製薬メーカーに 40 年勤務、現在関連会社に出向中
I 氏	2018/11	61 歳	製薬メーカーに 36 年勤務、現在に至る
J 氏	2018/11	61 歳	製薬メーカーに 38 年勤務、現在に至る

出所：筆者作成

4. インタビュー調査結果の分析

4. 1 個人に関わる要因について

まず、図表2の「現在」を構成している、「個人」や「組織」に関わる側面が現在の働き方にどう影響しているかを見てみる。

「個人」の中の「家庭」に関しては、健康のためや生活費のためといった家庭の状況から就業しているという回答は少なく、この点に言及があったのは10名中2名（D 氏・F 氏）からであった。家庭が現在の就業に強く関係しているという結果は得られなかった。

「給与」については、定年後の給与の減額は仕方がないと認めていることは共通している点であった。ただし、それが働き方にどう関係するかは個人による違いが見られた。一つは、減額された給与分に応じた働き方をすればよいと割り切った対応する人たち（E 氏・F 氏）である。その代表として、E 氏の「生活に不自由はないので今の給与水準を受容している。」F 氏の「（筆者注：給料は）下がっているから、60歳以上の働き方は好きにしたい」という観点である。もう一つのタイプは、給与とは関係なく、高いモチベーションで仕事をしている G 氏である。G 氏は、「仕事の内容が変わらなかったのでモチベーションを下げることはなかった。給料はものすごく下がっているが、そこには引っ張られない。そもそも給料のために仕事をしている感じではない。」という回答に代表されるように、自分の存在意義ややりがいのため働いている人たちである。

定年後の就労理由として、「社会とのつながり」のためという人は、ほとんどいなかった。しかし、定年後の就労によって「社会とのつながり」を感ずるようになったり、その大事さがわかってきたという回答は複数名（D 氏、F 氏並びに H 氏）から得られた。

4. 2 組織に関わる要因について

組織における要因として職場などでの対人関係があるが、そこで多くのインタビュイーが回答していることは、「頼りにされること」であり、専門的な能力やスキルの高さや経験の蓄積、人間性などが「頼りにされること」につながっていた。

例をあげると、「業務のプロとして専門性を身に付け、他者にない経験の積み重ねがあること」（C 氏）、「長い営業経験による豊富で多彩な人脈が60歳を過ぎても必要とされていること」（I 氏並びに J 氏）、「長い会社の人間関係の中で築かれてきた信頼性が困難な仕事の場面で自分を選んでもらえること」（H 氏）などが、「頼りにされること」の源泉となっていた。

「頼りにされること」は、人間関係の質にも関係している。つまり、上司や同僚との間で良質な人間関係が形成されていることである。定年後の就労の場合、立場が変わることもあり対人関係が円滑にいかないケースが見られる。例えば、F 氏は、「（筆者注：物事を決める場合に）様々比較した上で良い方向に決めたいので妥協はあまりしない。（筆者注：妥協すると）

結局上司に流される自分に腹が立つ。良い方向に何とか持って行きたいこだわりがある。最善の選択を行うことに（筆者注：調整等）時間が取られる。」と上司との関係があまり円滑ではないことを述べている。「頼りにされること」の背景には、周囲との間で良質な人間関係があることが想定される。

「頼りにされること」の注目される効果は、それがその人の会社における「存在意義」や「やりがい」につながっていることである。G 氏は、「頼りにされることが、“頼りにされるポジショニング”を社内で形成し、それが独自の存在意義になっている」と言う。期待されている高い専門性や豊富な人脈を使い仕事をすることが同僚の強い味方になり、それが「やりがい」につながっていると考えられる。難しい仕事の局面で信頼されていることも、その人の「存在意義」を高め、それが「やりがい」を生んでいるともいえよう。

経験を積んだ高年齢者には、仕事のノウハウ・コツ、経験知などを伝承することが期待される。この伝承に関しては、方法や力の入れ方に違いはあるがインタビュイー全員が行っていたことであった。

「伝承を行わないと蓄積されたノウハウが喪失してしまう」という危機感を抱いている人（E 氏、F 氏並びに G 氏）もおり、F 氏と G 氏は、「危機意識から営業支援のやり方を伝えることが自分たちがやらねばならないミッションである」と述べている。また、E 氏のように「若手や中途採用者を対象とした勉強会を開催する」といった積極的な伝承をしている人もいた。E 氏は、自分のこれまでの経験を整理した資料を作成してそれを使った勉強会を行い、受講生からも高評価を得ているとのことであった。他方で、目立たない形で伝承を行っている人もいた。J 氏は、「比較的自由に動いて営業の助っ人的立場で伝承を行っている」と述べていた。前面に出るのではなく、気づいた点などをアドバイスするというやり方である。支援ということで今までとは異なる視点で見ることができること、また経験から俯瞰的な見方ができることが良い教え方になっていると J 氏は自己評価していた。

4. 3　生きいきとした働き方

調査分析モデルに従い「現在」に関して、「個人的要因」と「組織要因」の2つの観点から見てきた。そこで、明らかになったのは、「生きいきと働いているか」については、個人的要因はあまり強く関係していないことである。「社会とのつながり」やその重要性は、定年後働くことの結果として感じられているが、「生活費や給与のため」や「健康のため」といった就労理由は、「生きいきとした働き方」との強いつながりは見られなかった。

むしろ、組織要因、とくに対人関係の質や高年齢者に期待される役割を認識し行動することが「生きいきとした働き方」につながっていた。専門的能力や経験知、人脈といった高年齢者が培ってきた知的財産がベースとなり「頼りにされること」が形成されていた。また、

能力や信頼性といった人間性から「良質な人間関係」が構築されていた。社員との積極的な交流から「伝承を行っていること」が特徴的に見られた。これらが相まって「生きいきとした働き方」を生み出していることが、明らかになった。

組織要因がもたらす結果として、仲間からいつも望まれる存在になっており「存在意義」が感じられていること、仲間から期待されたり実際に成果を出すことで「やりがい」を感じていること、これらが「生きいきとした働き方」の源泉になっている。また、仕事をしながら学んでいるという楽しさを感じていること、会社や仕事における人間関係に喜びを感じていること、言うなれば会社生活に「高い満足度」を感じていることも特徴であり、これも「生きいきとした働き方」を形成しているとみることができる。

4. 4 「生きいきとした働き方」の形成

4. 4. 1　キャリアと生きいきした働き方

「生きいきとした働き方」は、どのように形成されてきたのかを3つの観点から探ってみた。最初は、「キャリア」であるが、10人のインタビュイーに共通することは、過去のキャリアから現在の「生きいきとした働き方」に通ずる経験をしていることである。すなわち、厳しい仕事状況に直面しながら、そこから学びとろうという前向きな姿勢があり、失敗や成功から着実な学習がなされていることである。

「挫折と苦労の経験」（A 氏）や「修羅場の経験」（E 氏）、「子会社での社長や役員という責任ある地位で苦労したこと」（H 氏）など、苦しい状況をほとんどの人が経験している。そういう場に直面しながらも、「ポジティブ志向」（A 氏）や「常に学習する姿勢」（C 氏）を持つことで乗り切り、それを自分の成長につなげているのも共通した特徴となっている。

A 氏は、挫折と苦労の経験において同時に「多様で多彩な人との出会い」も伴っている。ポジティブにこれらの人たちと接することにより難局を乗り切り、多彩な対人関係をつくり協働する力を身につけたことが生きいき働く源泉となっている。A 氏は次のように述べている。「悩むのは好きではない。自分なりに課題を与えてその解決に向けて進む。（中略）やってみて駄目だったら、そこで考えればよい。（中略）勤務先以外の人と付き合うようになってから広がったし自分は楽しい。外との付き合いがあるからこそ、いろいろな世界が広がった。知らないけど学べばできることはある。」

C 氏は、人事異動後の仕事において、会社としてもこれまでに経験したことがない厳しい環境下での運営を余儀なくされた。この中で「他者にない経験の積み重ね」や「常に学習する姿勢」を持つことで厳しい状況を乗り切り、その過程で業務のプロとしての専門性を身につけたことが「頼りにされること」の源泉になっている。C 氏は次のように述べている。「（筆者注：担当している業務は）世の中のルールがよく変わる。（中略）変化が激しいから、絶対

に乗り遅れまいとしている。しっかり勉強しておくと、社長にも説得力がある。（中略）そのようなハードルがあった方が変化に飛んでいて面白い。」

E 氏は、複数回の「修羅場の経験」を乗り越えながら、ベースになる業務をしっかり継続しつつ新たな専門性を身に付けることができ、これが長期にわたる勤務を可能にしている。特に50歳代で新たな専門性を身に付けたことは、「接続期」での過ごし方の一つの解決方法を示唆している。E 氏は次のように述べている。「（筆者注：50歳代から60歳過ぎに関して）最終的には8年間でやったことが、私の専門性を高めることになった。そういう意味では収穫だった。60歳で終わりにしようかなと思っていたところに、大きなプロジェクトを手伝ってくれとなったので、2年間事務局をやった。これは充実していた。よかった。」

H 氏は、子会社での社長や役員という責任ある地位で苦労しながら、一方で新しいことにチャレンジしてきた。その経験からマネジャーは組織風土を変化させる方向に大きく旗を振ることが役割であることを学び、これが現在もやりがいを持って仕事に取組んでいることにつながっている。H 氏は次のように述べている。「子会社の社長といわれた時はびっくりしたが、新しいことにチャレンジしてきた。（中略）自分の役割は変える方に大きく旗を振ること。（中略）社員にも容易ではない方向や方針は話した。一方で信頼を高められるようなところについては積極的に話した。（中略）結果的に会社が強くなることが社員にとってはよいと思っていた。」

4．4．2　個人の特性と組織の支援

「個人の特性」として浮かび上がってきたのは、多くの人が仕事の経験を通して「納得感」を得ようとしていたことである。仕事の目的やその背景にある理由などを考える志向を持ち、仕事の結果によりその実現度を確認することを習慣的に行っていたといえよう。このことが、組織人としてより深い意味合いでの学習につながっていたことが想像できる。また、「納得感」があると、仕事が楽しくでき、ストレス度も低いという言葉も聞かれた。

A 氏は「自分は言われたこと以上のことをやってきたし、それができた。」という。納得感があれば言われた以上の仕事の結果を出すことができるといえる。B 氏は「組織の中では幹部にはなれないかもしれないが、納得がいく仕事をできるために頑張った。」という。自分なりに納得のいく仕事をするためにやってきたといえる。　若い時分より「変化への認識」「スピード感」「変革（破壊と構築）志向」「目標達成志向」を持っていたという人たちもいる（G 氏や H 氏）。これらの志向性は、定年後も少しも衰えをみせておらず、これがむしろ「やりがい」や自己の会社における「存在意義」になっていると両氏は言っている。

「学習志向性」は、インタビュイーの多くが現役時より持っており、それがキャリアの発達や成長にも強く影響していると述べている。インタビュー調査の結果から、学ぶきっかけが、仕事上必要であること、あるいは自ら必要と判断して始めた等様々であるものの、いずれの

場合も学ぶ楽しさを感じている。そして学ぶ楽しさを生きいき働くことにつなげている。

A氏は「知らないことでも、学べばできることは沢山ある」という。これは学習が仕事に役立ってきたということを述べているといえよう。B氏やD氏は新聞・業界誌等に目を通すことを「知らなかったことを知る機会がある点では刺激がある」という。これは、日常的に何からでも学び取ろうという学習志向性を表す事例である。F氏やH氏は「仕事において接触するコンサルタントからの学びを楽しんでいる」という。普段から、接触する人から学ぶということが姿勢として現われており、絶えず学ぶことを述べている。

他方で、定年（60歳）までの研修の提供といった「組織の支援」の「生きいきとした働き方」への影響に関しては、インタビュー調査の結果では出てこなかった。定年までに組織の支援を得るといった受け身的な姿勢は、定年後の意欲的な就労には寄与しないことが考えられる。むしろ、インタビューの中で目立ったのは、組織の境界にとらわれない積極的な越境行動による人間関係の構築であった。部門や組織の壁を越えて人的な接触をして良質な人間関係が構築されていたことである。こういった良質な人間関係は、仕事を進展させ、「頼りにされる」関係をつくることになっていた。たとえば、B氏は、「出向先で人事、経営企画担当として、プロパー社長や2代目と目される人と直接やり取りできて、やりがいを感じた。自分が頼りにされ、自分の発言や提案で会社が動いた。この出向は自分にとってよい経験となった。」と述べている。B氏は過去の出向先での前向きな経験から、今の勤務先では70歳に至る現在も周りの役員や社員から頼りにされている。特に経営者から相談されることがモチベーションとなり、生きいき働くことができている。こういった良質な人間関係は、定年後の仕事での有力な支援材料になっているほか、人間関係を作り拡げる力は、定年後の仕事での新たな人間関係作りにも活用されていた。

5. 考察

5. 1 主たる発見

本研究では、定年後の高年齢者が「生きいき」と働くことはどういうことかを探るためにRQを2つ設定してインタビュー調査を行った。ここで、インタビュー調査から明らかになったことを整理して、高年齢者の「生きいきとした働き方」の構造を示したい。また、他にも1点、新たな発見があり、それを次項で明らかにする。

「高年齢者にとって生きいきとした働き方とは、どのようなことなのか」というRQ1に関して、先行研究と一致した結果として次のようなものがある。「誰かの役に立ちたいという姿勢」（福島2007）、個人の特性としての「積極的に学ぶ姿勢」（松本2006）、「仕事内容の満足度」、「能動的な姿勢」（戸田2015、田尾ほか2001）などである。

RQ1についての本研究の主たる発見をまとめると次のようになる。まず、個人の「健康の

ため」や「生活のため」といった要因は、「生きいきとした働き方」に強く影響しておらず、強く関係しているのは「組織要因」ということである。その中で、「生きいきとした働き方」に関係するものとしてほとんどのインタビュイーが挙げたのが周囲の人から「頼りにされること」並びに「良質な人間関係」が構築されていることである。ともに、人と人の「関係性」に関するものである。良い「関係性」が形成されていると、「生きいきとした働き方」ができるというものである。

良い「関係性」があると、効果的に仕事が遂行でき、他者への支援的な仕事もうまく遂行できている。若手との交流も活発になり、知識やスキルの伝承も円滑になっている。これらのことが結果的に、高年齢者の「存在意義」や「やりがい」を高めている。つまり、仕事に「やりがい」を感じており、周囲の人から望まれる存在になっている。見方を変えれば、「自分の『居場所』が会社内にある」ということであり、また、「仕事や対人関係への満足度が高い」という捉え方もできる。これらの「意識」は、さらに仕事への動機づけを高め、高い仕事の成果をもたらす要因となっていると考えられる。

RQ2は、「高年齢者にとって生きいきとした働き方は、どのように形成されるのであろうか」であった。具体的には、過去からの積み重ねが現在の「生きいきとした働き方」に関係しているのかどうかについての問いであった。分析の結果、過去からの「キャリア」が個人の「学習志向性」とも相まって「生きいきとした働き方」につながっていることが明らかになった。苦しい仕事状況に置かれそれを一つひとつクリアしていくことで成長していった姿が見られた。このような仕事経験が専門性を築き高めることになったり、経験知となって蓄積されていった。また、その時にできた人間関係や人間関係をつくり活用する力もその人の財産となっていた。さらに、良好な人間関係を継続することにより、その人の「信頼性」が形成されることになっていた。

このように過去から形成されたものが、現在の仕事にも活用され会社の仕事の成果を高めることに貢献していた。また、これが現在の「頼りにされること」「良質な人間関係」の基盤にもなっていた。

以上述べたRQ1およびRQ2の発見事項から、高年齢者の「生きいきとした働き方」として次のようなことが言えるであろう。まず、専門性や経験知等の「過去からの積み重ね」並びに「頼りにされること」と「良質な人間関係」からなる「関係性」という二つのことが、「生きいきとした働き方」のベースとなっていることである。この二つが揃うことで、定年後の効果的な仕事行動につながっている。そして「頼りにされること」や効果的な仕事行動が、「存在意義」の高まりや「やりがい」等の「意識」を高年齢者にもたらしている。さらに、この「意識」が高まることで、効果的な仕事行動が進むことになり、「意識」と「仕事行動」は相互に影響・強化し合う関係となる。こうした高年齢者の「生きいきとした働き方」の構造を図解

したものが図表4である。

ここで重要なことは、「過去からの積み重ね」は高年齢者の財産であるが、それだけでは「生きいきとした働き方」にはつながらないことである。「頼りにされること」と「良質な人間関係」からなる「関係性」が構築されて初めて、「生きいきとした働き方」ができるということである。

図表4　高年齢者の生きいきとした働き方の構造

出所：筆者作成

5. 2　新たな発見

2. 2において55～59歳の「接続期」では、これまで考えても見なかった不安が高まることが多く、この時期にモチベーションの低下が始まり、そのことが60歳を過ぎての働き方に悪影響を及ぼすことがあることが一般的に指摘されている（例えば、日本経済団体連合会，2016年）。

今回のインタビュイーの中には、「接続期」においてモチベーションを維持して、60歳以降も生きいき働くことにつなげた事例がみられた（E氏、G氏並びにI氏）。

E氏は、50歳を過ぎてから、当時これまでにない概念で注目されつつあった「新しい業務」を勉強し、60歳までにその専門家になった。50歳代で専門性を高めたことで60歳代に活かすことができ、生きいき働くことができている。E氏は次のように述べている。「最終的には8年間でやったことが、私の専門性を高めることになった。そういう意味では収穫だった。60歳で終わりにしようかなと思っていたところに、大きなプロジェクトを手伝ってくれとなったので、2年間事務局をやった。これは充実していた。よかった。」

G氏は、「接続期」におけるモチベーションの低下の要因を自分なりに分析した。分析の結果、役割を再定義し、新たに自分の居場所（ポジショニング）を確立すべきという考えに至った。そのことでモチベーションを維持することができている。G氏は次のように述べている。「55歳の役職定年となった人で（中略）、伝えることがない人はモチベーションが下がると思う。

現役を去る間際にやることは、成果を上げることではなく、成果を上げる手段を残すことに切り替えると、そちらにモチベーションを移せるはずだという仮説を立てた。」さらにG氏は述べる。「59歳･60歳になってモチベーションが変わらない自分がいた。この仮説は正しかった。指導するものがあって、自分が頼られるポジショニングみたいなものがきっちり出来る人が、役職に関係なく、存在意義を感じられるだろう。」

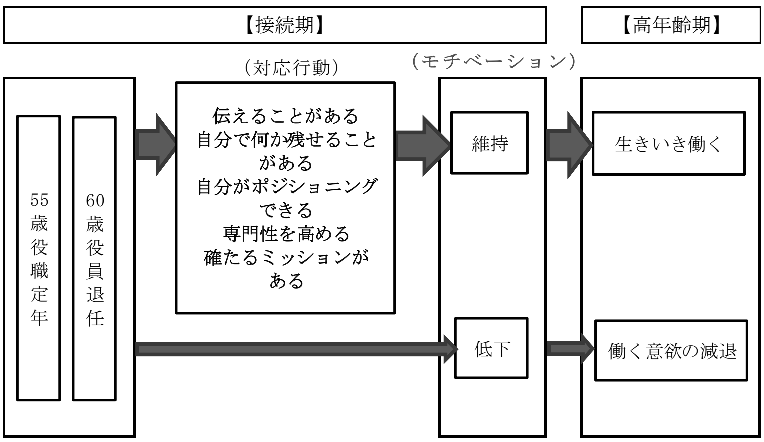
I氏は、勤務先が合併した際に営業面で確たるミッションがあり、それを目標に活動したことで60歳に至るまでモチベーションを維持している。I氏は次のように述べている。「自分は上司から、合併相手の企業が苦手なところの人間関係を必ず絶対に維持してくれ、というミッションがあるのでよかった。だから、自分のモチベーションは下がっていない。」

今回ほとんどのインタビュイーからは、一般的に指摘される「接続期」のモチベーションの低下に関連する発言が確認されなかった。つまり、今回調査対象としたインタビュイーの多くは、「接続期」を含めた50歳代においてキャリアの変化を受け止め、適切な対応行動を取っていたのである。

こうした彼らがとっていたモチベーション維持の行動をまとめると図表5のようになる。

このことから、実践的示唆として次のことが言えよう。図表5にある「接続期」の対応行動として、自分のミッションが何であるか再認識すること、及び役割を再定義して自分の居場所（ポジショニング）を確立すること、専門性を高めること等ができれば、モチベーションを維持することができて、60歳以降の高年齢期も生きいき働くことが可能となろう。一方で、このような対応行動を取ることができなければ、モチベーションは低下して、60歳以降は働く意欲が減退することが予想される。

図表5 「接続期」のモチベーション維持のメカニズム



出所：筆者作成

5．3　本研究の課題

今回の研究において使用したデータは、高年齢の被雇用者10名を対象としたインタビューから得られたものである。今回の発見は、少数のサンプルから得られたものであり一般性は低く、高年齢者の「生きいきとした働き方」を解明するにはもっと多くのサンプルを収集する必要があることを最後に述べ本稿を閉じたい。

［参考文献］

福島さやか、2007、「高齢者の就労に対する意欲分析」、『日本労働研究雑誌』、No.558

厚生労働省、2013、『第9回中高年者縦断調査』

独立行政法人高齢・障害・求職者雇用支援機構、2016、『団塊世代の高齢期10年間調査の研究報告書』

松本恵、2006、「高齢者の就労意欲に関わる要因―生活意識との関係性についての考察―」、『Works Review』、Vol.1、162－173

永野仁、2012、「65歳以上高齢者の就業の現状」、『明治大学政経論叢』、第80巻第3・4号、127－149

内閣府、2014、『高齢者の日常生活に関する意識調査』

内閣府、2017、『平成29年版高齢社会白書』

一般社団法人日本経済団体連合会、2016、『ホワイトカラー高齢社員の活躍をめぐる現状・課題と取組み』

清家篤、山田篤裕、2004、『高齢者就業の経済学』、日本経済新聞社

田尾雅夫、高木浩人他、2001、『高齢者就労の社会心理学』、ナカニシヤ出版

戸田淳二、2015、「誰が仕事に生きがいを感じているのか―シニア層が仕事でさらに活躍できる社会にむけて―」、『Works Review』、Vol.10、88－99

独立行政法人労働政策研究・研修機構、2018、『2018データブック国際労働比較』

［論文］

Sanno University Bulletin Vol. 40 No. 1 September 2019

簿記の学習を難しくしているものは何か
―本学『簿記入門』を受講する学生を対象にした実証研究―

What Makes Bookkeeping Difficult to Learn?
Empirical study of university students enrolled in “Introductions to bookkeeping”

友寄　隆哉
Takaya Tomoyose

Abstract

When the number of people learning bookkeeping increases, the Japanese economy is strengthened. However, many believe that acquisition of bookkeeping skills is difficult. Consequently, the number of university graduates with training in bookkeeping is decreasing. To solve this problem it is necessary to make bookkeeping classes more interesting. In this study of 53 university students enrolled in an introductory bookkeeping course, I first discuss why bookkeeping is difficult to learn.

A time series analysis of the data suggested the following factors that make bookkeeping difficult to learn；(1) principles of double entry bookkeeping；(2) large number of account titles；(3) large number of rules and principles associated with bookkeeping；(4) difficulties calculating depreciation；(5) difficulties calculating cost of sales；(6) difficulties creating bookkeeping worksheets. Additionally, the decrease in available study time leading up to final exams, was identified as an external factor contributing to make bookkeeping difficult to learn.

1.　はじめに

筆者は、簿記を学ぶ人口（以下簿記人口という）が増えれば日本経済は強くなると考えている。経済活動の中核をなす企業活動は、簿記のフレームワークを通して認識・測定・記録・報告される。簿記を学ぶことは、単に記帳技術の習得にとどまらず、企業活動を包括的に理解する力を養うことにつながり、その結果として、目的適合的な行動を選択できる可能性を高めることができる。このような人材が増えれば、企業活動は円滑に進み、ひいては日本経済に対してよい影響を与えることにつながると考える。簿記を含む財務会計の知識は、ビジ

2019年4月3日　受理

ネスマンに必須の教養とされるが、残念ながら、以下に示す通り、近年の簿記人口は減少傾向にあるといわざるを得ない。簿記教育に携わる一人として、この状況には危機感を覚える。そこで本研究では、簿記人口の増加を最終的な目標とし、その足元を固めるため大学における簿記導入教育に焦点を当てる。簿記の習得は難しいといわれて久しいが、この問題の解決へ向けた第1歩として「何が簿記の習得を難しくしているのか」を明らかにしたい。簿記人口の推移を概観するため簿記関連資格の受験状況を以下に示す。

日本商工会議所のホームページによると日商簿記検定3級の受験者は過去10年間8万人から12万人の間でほぼ横ばいで推移している。2級も同様に約5万人から7万人の間で推移している。一見、簿記人口は、過去10年で安定的に推移し、増加も減少もしていないとみることもできる。ところが、日商簿記1級の受験者は、最も受験者数が多かったのが2010年11月試験で22,008人であった。これに対し直近の2018年11月試験では、受験者数が9,852人であった。日商簿記1級は2010年11月試験をピークに減少傾向を示し、この8年間で受験者数が55.2%減少している。

次に、国税庁のホームページから税理士試験の過去13年分の受験者と合格者、一部科目合格者の推移をみると2006年は受験者・合格者・一部科目合格者は、それぞれ54,203人・1,126人・8,726人であるのに対し、2018年は、30,850人・672人・4,044人であった。こちらも2006年から13年間、一貫して減少傾向を示し、受験者数で43.1%、合格者数で40.3%、一部合格者数で53.7%減少している。

最後に、金融庁 - 公認会計士・監査審査会ホームページより公認会計士試験の過去13年分の試験願書提出者と合格者の推移をみると願書提出者数では、2010年に25,648人でピークに達した後、減少傾向に転じ、2015年で最低の10,180人、その後若干増加し、2018年は11,742人となっている。合格者数では、2007年の4,041人をピークに減少傾向を示し、2015年の1,051人を最低として2018年は若干増加し、1,305人となっている。それでも2018年は、ピーク時の2010年に比べ、願書提出者数で54.2%、合格者数で36.1%減少している。

以上より、日商簿記3・2級を学ぶ簿記人口は、この10年間で大きな変化はないが、日商簿記1級、税理士試験、公認会計士試験など、大学教養以上の簿記を学ぶ人口は減少傾向にあることがわかる。この状況を西南学院大学の工藤栄一郎教授は、「ショーウィンドウを覗きに来てはいるが、中には入ってこない状況」と比喩的に表現した（日本簿記学会第34回全国大会高校簿記教育懇談会基調報告より：平成30年8月24日）。日商簿記3・2級を学んではみたものの難しいと感じて、あるいはもう十分と感じて、次のステージを目指さない簿記学習者が、この10年間増加傾向にあることがわかる。簿記や財務会計を学べばよかったと後悔している人が続出している状況も存在する一方で、これは非常に「もったいない」ことである。日商簿記3・2級を超えて多くの人が大学卒業程度の簿記を学ぶためにはどうすればよいか。その答えの一つとして簿記の入門授業をわかりやすく魅力のあるものにすることもあるのではな

いか。本稿ではその第1段階として筆者が担当した『簿記入門』の授業を通して得られたデータを考察し、上記の足掛かりとする。

2.　研究の目的

筆者は約20年間、専門学校で簿記・会計を教えてきた。主な対象は、簿記・会計を専攻する専門学校生、または日商簿記検定対策講座を受講した社会人であった。2018年4月に産業能率大学情報マネジメント学部に入職し、必修科目の一つである『簿記入門』を担当した。前職との大きな違いは受講生である。専門学校生も社会人も、簿記を学ぶことを主体的に選択しているが、本学の『簿記入門』を受講する学生は、必修科目の一つとして授業に参加しているのであり、興味･関心の度合いは各人によって異なる。これは興味･関心の薄い学生に「つまらない･難しい」と感じる授業を提供してしまうと、簿記嫌いを輩出してしまう反面、興味･関心を持たせることに成功すれば、簿記人口を増やすことができるというチャンスでもある。しかし現実は、簿記に苦手意識を持つ学生の方が多い。序章で述べた通り、簿記人口の増加が、日本の経済を強くするとの私見に立てば、『簿記入門』の担当は簿記人口の増加に直接貢献できる貴重な機会と考えることができる。そこで、「魅力的な『簿記入門』の授業を提供するためにはどうすればよいか」との観点から、「大学の簿記導入教育」に関する文献にあたった。しかし、何を教えるのかという理論的な研究は多く存在するものの、どのように教えるのかという実証的な研究は意外なほど限られ、実証データの不足を感じた。そこで、本研究においては、「何が、簿記の習得を難しくしているのか」を明らかにするために、2018年度前期に担当した『簿記入門』全14回のデータを収集・分析し、次年度以降のシラバスと教授法の改善に資する提言を試みる。

3.　先行研究

文献を渉猟したところ、以下の先行研究が見つかった。

教授内容に焦点を当てた研究として、明治時代までさかのぼり、批判的に『簿記テキスト』を検証したもの（久野1990）、簿記学は実学であるとしつつも、ハウ・ツー的解説論のみではなく、これを支える基礎の分析から学問は出発するとするもの（茂木1988）、高校における簿記導入教育として高校の教科書を紹介し、簿記教育の課題と解決への取り組みを論じたもの（粕谷2009）、会計学や複式簿記における技術の本質を考察し、複式簿記の原理とその論理的導入方法について論じたもの（椎名1987）、我が国の簿記書で見られた伝統的な教授法について検討した後、試算表等式に基づく教授法を提示したもの（原2018）などがある。また、東証1部上場企業等26社へアンケート調査を行い、大学の簿記会計教育で使用する従来のテキスト内容について論じたもの（中川1990）、東証1部上場企業等265社にアンケート調査を行い、

日商簿記検定が、正社員の採用、人事及び教育・研修にどのように利用されているかについて論じたもの（近藤2018）がある。さらに大学での簿記教育をトータルな会計学教育システムの一環として位置づけ、各種資格試験との関連を論じたもの（瀧田1994）、日商簿記検定が、最も簿記知識の普及に貢献しているとし、簿記の入門として3級の検定試験が必要であることを強調し、その3級の試験問題の傾向と分析を行っているもの（河野1998）、初学者向けの入門級として2017年4月に導入された「日商簿記初級」についてその可能性を認めつつ、改善へ向けた提言を行っているもの（山田2017）などがある。学生にアンケート実施し、学ぶ側の実態調査を行った研究としては、「簿記原理」を受講する143名にアンケート調査（回収率77.6％）を行い、簿記学習の実態についてまとめたもの（斎藤1990）、「簿記原理Ⅰ」を受講する1クラス23人にアンケート調査を行い、学生の関心と理解を調査し、提言を行うもの（大城1992）などがある。最後に本研究が最も参考にしたものとして、日本簿記学会簿記教育研究部会平成24・25年度中間報告をあげる。これは同研究部会に属する3大学と2短期大学の590人の学生へのアンケート調査を行ったもので詳細な検討がなされている。この他にも、e-learning を用いた簿記教育の実践事例（木本2002）、コンピュータを手段とする簿記教育を論じたもの（鈴木2004）、簿記教育を4つに分類してその種々相や関連を論じたもの（大藪1993）、キャッシュフロー会計の観点から簿記導入教育の有用性を論じたもの（橋本1999）などがある。しかしいずれのアンケート調査も授業終了後の1回のみであり、時系列に沿った調査を発見することはできなかった。本研究は、学生数53人と規模は小さいが、第6週を除き授業の第1週から第14週まで全13回にわたってアンケート調査を行い、時系列にそって学生の学習状況を調査し多くの生の声を収録した。この点が本研究の実践的貢献である。

4.　研究方法

授業終了後、1週間の授業外学習を終えて翌週アンケートを提出する。そのアンケートにその週の授業項目が理解できたかどうかを YES・NO で回答し、自由記述欄に感想などを自由に記述する。また、manaba による練習問題・復習課題の学習状況は、教員側で把握可能である。アンケートは第1週から第14週まで、manaba の練習問題・復習課題は第3週から第14週まで収集した。研究対象は、2018年度前学期に筆者が担当した『簿記入門』クラス53人である。2018年4月18日の第1週授業から同7月16日の第14週授業までの4か月間、上記アンケートと manaba の練習問題･復習課題の得点を収集した。そして、授業項目別の理解度をグラフ化し、理解度の低かった項目を洗い出すとともに、中間試験と期末試験を比較して50％以上得点が下落した学生と50％以上上昇した学生の manaba 練習問題・復習課題の学習状況を追跡した。

5. 結果

5. 1　第1週授業

第1週の目標は、簿記入門を学ぶことの意義を理解すること、簿記の学習の仕方を学ぶこと、勘定科目と貸借対照表・損益計算書の型を理解することである。初回授業の印象は今後の学習意欲に大きく影響する。覚える量の多さに苦手意識を持たせないよう、絶対に覚えなければならない項目、理解できればよい項目のメリハリ付けを行うとともに暗記よりも復習による繰返しを意識するよう指導した。図表5-1に第1週のシラバスを示す。

図表5-1　情報マネジメント学部「簿記入門」第1週シラバス

授業項目	概要	授業外学習
情報マネジメント学部での簿記の学習の仕方 簿記の基礎	・簿記入門を学ぶことの意義を理解する。 ・簿記の学習の仕方を学ぶ。 ・勘定科目と貸借対照表・損益計算書の形を理解する。 ［ﾃｷｽﾄ該当章：１］	今週の授業を復習し、出席確認プリント②、練習問題プリント①と授業外学習プリント①を完成させる。

効果測定項目はシラバス3番目の貸借対照表・損益計算書の作成方法・形式とし、以下の4つの質問に、YES または NO と回答する方式で測定した（ある程度理解したが、まだ完璧でないものは NO にカウントしている）。結果を図表5-2に示す。

図表5-2　第1週の授業項目理解度

	質問内容	YES回答率	
①	貸借対照表の作成方法を覚えたか	86%	YES　NO
②	貸借対照表の形式を覚えたか	80%	YES　NO
③	損益計算書の作成方法を覚えたか	84%	YES　NO
④	損益計算書の形式を覚えたか	78%	YES　NO

回答者数　50人

各質問に対して YES と回答した学生の割合を図表5-2に示した。アンケートの自由記述欄にも、「貸借対照表と損益計算書の形式を覚えることが重要だとわかった（同旨他27名）。」との記述が多くあり、約8割の学生が第1週授業の内容を理解したといえる。また、授業を理解はしたものの困難を伴った記述としては「貸借対照表の中に、資産・負債・純資産があって、さらにその中に現金や借入金があったりと、覚えることがたくさんあって大変でした（同旨他6名）。」、「何よりも、普段きき慣れない言葉をたくさん使うので、それに慣れるためにも、これからいろいろな形式の問題に触れ実践していきたいと思います（同旨他1名）。」等があった。さらに、上記の4つの質問に対して NO と答えた学生が質問①で14％（7名）、②で20％（10名）、③で16％（8名）、④で（11名）いることがわかった。自由記述欄には、「とても難しい

ので復習をもっとします !!（同旨他1名）」、「1回目なのについていけなさそう…（同旨他1名）」等が並んだ。

5. 2　第2週授業

第2週授業のシラバスを図表5-3に示す。

図表5-3　第2週　シラバス

授業項目	概要	授業外学習
取引 仕訳 勘定記入	・簿記上の取引の概念を理解し、区別できるようにする。 ・借方・貸方の概念を覚え、取引を仕訳できるようにする。 ・仕訳した取引を総勘定元帳に記入（転記）する方法を覚える。 ［ﾃｷｽﾄ該当章：２］	今週の授業を復習し、来週の予習をして、出席確認プリント③、練習問題プリント②と授業外学習プリント②を完成させる。

第2週の授業項目は、簿記上の取引概念の理解、仕訳の理解・勘定記入（転記）と複式簿記を学ぶ上で土台となる重要な概念である。仕訳の理解を深めるために『暗唱文』（授業ではインパクトを高めるため『仕訳の呪文』と呼んだ）を唱える方式を導入した。この『暗唱文』は、仕訳の重要要素をすべての問題にあてはめて暗唱するもので、仕訳問題に取組むたびに仕訳の原理が確認できるよう工夫したものである。また、暗記に対する負荷の減少を目的として、補助プリント（A3用紙1枚表面のみ）を配布した。内容は、複式簿記の原理を簡潔にまとめた図と日商簿記3級に指定された勘定科目一覧表である。これを『3級まで使える宝物プリント』と名付け、常に携帯し必要に応じて参照するよう指示した。特に勘定科目一覧表は、新しい勘定科目が出てくる都度、当該勘定科目にラインマーカーを引かせその性質を確認させるとともに、学ぶべき勘定科目全体の中で、現時点までに学習した範囲がわかるよう工夫した。

第1週同様、理解度を測定するための質問事項と学生の回答を図表5-4に示す。

図表5-4　第2週の授業項目理解度

	質問内容	YES回答率	
⑤	簿記上の取引を理解できたか	94%	YES NO
⑥	取引の10要素とその関連を理解したか	88%	YES NO
⑦	勘定科目を分類できるようになったか	80%	YES NO
⑧	仕訳とは何か理解できたか	86%	YES NO
⑨	仕訳ができるようになったか	80%	YES NO
⑩	仕訳を転記できるようになったか	72%	YES NO

回答者数50人

図表5-4の結果より、質問⑤～⑨までは第1週の授業と同様に約80％～90％の学生が授業項目を理解したことがわかる。ただ質問⑩の理解度が他の項目と比較すると10ポイント程度低くなっているが、これは問題演習の累積により第7週の中間テストまでには解消された。自由記

述欄には、「今回も、貸借を覚えればできると思った。また、manabaの小テストでだいぶ覚えられた…。」、「しっかり解けた。理解できた。」と手ごたえを感じられた記入が20通あった。他には、「(授業を) きいてちゃんと理解できるけど、少ししたら忘れてしまう。」、「…復習しないと大変なことになると感じた。」、「簿記は毎日しないと忘れてしまうと思うので…（同旨他8名)」等、簿記の難易度ではなくその「忘れやすさ」に不安を感じる記述が散見されるようになった。一方、質問⑤、⑥にNOと回答した学生の中には「仕訳や転記が難しかった（同旨他1名)。」と未だ原理を理解していないと推測できる者が2名いた。

5. 3　第3週・第4週授業

第3週・第4週授業のシラバスを図表5-5に示す。

図表5-5　第3週・第4週　シラバス

授業項目	概要	授業外学習
現金取引	・簿記で扱う現金の概念を理解する。 ・現金取引を仕訳する練習をする。 ・仕訳を勘定に記入する練習をする。 ［テキスト該当章：３］	今週の授業を復習し、来週の予習をして、出席確認プリント④と授業外学習プリント③を完成させ、manabaの練習問題③と復習課題③をやる。
銀行預金取引	・普通預金と当座預金の概念を理解する。 ・普通預金と当座預金の取引を仕訳する練習をする。 ・仕訳を勘定に記入する練習をする。 ［テキスト該当章：４］	今週の授業を復習し、来週の予習をして、出席確認プリント⑤と授業外学習プリント④を完成させ、manabaの練習問題④と復習課題④をやる。

第3週では現金取引、第4週では銀行預金取引について授業をおこなった。第3週以降は、第1週、第2週で学習した授業項目が前提となるため、授業開始の5分間を用いて記憶の喚起を行った。具体的には『UP』と称し筆者がかける号令をなるべく大きな声で復唱するというものである。第2週配布の『宝物プリント』(簿記の基本をまとめた復習･参照用プリント）を用い、仕訳のルールと既に学習した勘定科目について復唱する。初めて『UP』行った際には、驚いた表情をみせる学生、失笑する学生も多かったが、第5週、第6週と継続して実施することで楽しみながら取組む様子をうかがうことができるようになった。

授業の理解度を測定するための質問事項とその回答結果を図表5-6に示す。

図表5-6　第3週・第4週の授業項目理解度

	質問事項	YES回答率
⑪	現金とは何か理解できたか	100%
⑫	現金取引の仕訳ができるようになったか	88%
⑬	T勘定に記入できるようになったか	90%
⑭	現金勘定の残高を計算できるようになったか	90%
⑮	普通預金、当座預金とは何か理解できたか	81%
⑯	普通預金、当座預金取引の仕訳ができるようになったか	77%
⑰	T勘定に記入できるようになったか	75%
⑱	当座借越の処理ができるようになったか	56%

回答者数　質問⑪～⑭(第3週)42人、質問(第4週)⑮～⑱52人

第3週授業項目の質問⑪～⑭までの授業項目については、概ね90％程度の学生が理解している。特に質問⑬の勘定記入（転記）は、復習項目でもあり第2週の72％より18ポイント理解度が上昇して90％と、復習の効果が出ている。学生の声の中にも「やっていくにつれて解き方がわかってきました。この調子で簿記を得意になりたいです。(同旨他4名)」があり、繰返し復習することの重要性を実感し始めた記述がみられるようになった。しかし、第4週の授業項目（質問⑮～⑱）は、第3週に比べ理解度が下がっている。これは普通預金に加えて当座預金という勘定科目が加わることが原因である。この当座預金は、学生の日常生活で出会う可能性が低く理解が難しい項目となっている。また質問⑰のT勘定の記入は、質問⑬と同一内容であるが、理解した割合が90％から75％に15ポイント下落している。これは当座預金の理解が前提で、連動して下げている。つまりT勘定の記入（転記）の前段階で躓いていることになる。当座借越の処理（質問⑱）は当座預金の処理を前提として行われるから、さらに理解度を下げている。これは前半7回の授業項目の中で最も理解度の低かった項目である。理解度77％の当座預金の処理をさらに応用させる処理なので難易度が急に上がる。学生の声の中に「当座借越とか、新しいのが出てきてドキリとしたけど、ゆっくり考えればわかった。」というのがあり、学生が新出の授業項目ないしは勘定科目に対し「ドキリ」とする心境となることは発見であった。また、「借越限度額とか当座借越契約が絡んでくると本当に分からなくなる。(同旨他11名) どうにか理解したい。重要なことはとりあえず借金優先なのはわかるけどその借金は何なのか、その額をどこから引けばいいかわからない。」と理解したいのに理解できない苛立ちを訴える記述もあった。さらに、「今回の授業でだんだん簿記についていけなくなりました…(同旨他2名)」や「すごく難しくなってきた。用語が増えたので頭のうちがグチャグチャになってきました。(同旨他1名) 宝物表をよく見て整理する。」など、新出項目に対して理解や整理が追い付かない状況を訴える記述が散見されるようになった。

5. 4　第5週・第6週授業

第5週・第6週授業のシラバスを図表5-7に示す。

図表5-7　第5週・第6週　シラバス

授業項目	概要	授業外学習
商品売買取引 仕入と売上	・商品売買取引の仕組みを理解する。 ・仕入取引を仕訳し、勘定に記入する練習をする。 ・売上取引を仕訳し、勘定に記入する練習をする。 ［ﾃｷｽﾄ該当章：５］	今週の授業を復習し、来週の予習をして、出席確認プリント⑥と授業外学習プリント⑤を完成させ、manabaの練習問題⑤と復習課題⑤をやる。
商品売買取引 値引と返品	・売上、仕入時の値引と返品の取引を仕訳し、勘定に記入する練習をする。 ［ﾃｷｽﾄ該当章：６］	今週の授業を復習し、来週の予習をして、出席確認プリント⑦と授業外学習プリント⑥を完成させ、manabaの練習問題⑥と復習課題⑥をやる。

第5週と第6週では商品売買取引の授業を行った。仕入諸掛り・売上諸掛りなどの細かく場合分けしなければならない項目もあるが、イメージしやすい取引のため、理解度は比較的高いという結果となった。

図表5-8　第5週の授業項目理解度

	質問事項	YES回答率	
⑲	三分法による商品取引の処理法は理解できたか	78%	YES / NO
⑳	仕入取引の仕訳ができるようになったか	82%	YES / NO
㉑	売上取引の仕訳ができるようになったか	84%	YES / NO

自由記述欄には、「この仕入、売上はきき慣れた言葉なのですぐになれたと思います。（同旨他4名）」など理解しやすかった旨の記述がみられた。さらに「頭が整理されてきて、だんだん簿記が楽しくなってきた。（同旨他2名）」、「…何度も繰り返すことによって理解できるとわかった。」との記述は、多くの知識を簿記のフレームワークを通して整理し、反復練習でその定着を図るということを課題に取り組むことで体得した成功例といえる。また、「分かるようになってきたので、小さなミスが目立つようになってきました。理解はしているのに間違いになるのはもったいないし…（同旨他2名）」、「頭の中でごちゃごちゃにしないことが重要だと思う。（同旨他4名）」なども導入段階の壁を克服し、学習が次の段階に入ったことを示している。しかしながら、「苦手です。何をどうしてるのか分からなくなる。（同旨他1名）」、「練習問題に関しては、全くわからない。」など、部分的な疑問ではなく、簿記全体がわからなくなってしまっている者が3名いた。

5. 5　第7週　中間試験

第7週は、第6週までの授業を前半と位置づけこの範囲で中間試験を行った。

図表5-9　第7週　シラバス

授業項目	概要	授業外学習
仕訳と勘定記入の総合練習 中間試験	・これまで学習した取引の仕訳と勘定記入を総合的に練習する。 ・仕訳と勘定記入の試験を行い、解答・解説する。 ［ﾃｷｽﾄ該当章：７］	今週の授業を復習し、来週の予習をして、出席確認プリント⑧と授業外学習プリント⑦を完成させ、manaba の練習問題⑦と復習課題⑦をやる。

第7週の中間試験は、第6週までの授業項目を試験範囲とし、全10問の取引を出題した。回答形式はこの10問の取引を仕訳し勘定記入するというものである。図表5-10に出題項目と得点率を示す。受験者は53名で、受験率は100%であった。

図表5-10　第7週実施　中間試験の出題項目と得点率

出題項目	得点率
仕訳１　販売諸掛りを含む売上	85%
仕訳２　引取費用を含む仕入	83%
仕訳３　仕入返品	94%
仕訳４　小切手受け取りと掛による売上	89%
仕訳５　売上値引	85%
仕訳６　小切手受け取りによる売上	94%
仕訳７　給料の現金による支払い	98%
仕訳８　株式配当金領収書の受領	92%
仕訳９　売掛金の当座回収	98%
仕訳１０　買掛金の当座支払	92%
現金勘定	89%
現金勘定残高	77%
当座預金勘定	87%
売掛金勘定	85%
買掛金勘定	82%
売上勘定	83%
受取配当金勘定	92%
仕入勘定	79%
給料勘定	91%

受験者53人

中間試験の結果より、仕訳2引取費用を含む仕入取引の正答率が83％、売上値引取引の正答率が85％、現金勘定残高が77％と若干低いが、概ね良い結果となっている。

次に、受験した53人を得点順に左から並べたのが図表5-11である。

図表5-11　中間試験得点

5. 6　第8週授業

第8週のシラバスを図表5-12に示す。

図表5-12　第8週シラバス

授業項目	概要	授業外学習
固定資産取引	・固定資産の概念を理解し、その取得と売却の取引の仕訳の練習をする。 ・有形固定資産の減価償却について理解し、仕訳の練習をする。　［ﾃｷｽﾄ該当章：８］	今週の授業を復習し、来週の予習をして、出席確認プリント⑨と授業外学習プリント⑧を完成させ、manabaの練習問題⑧と復習課題⑧をやる。

第8週は、テキストに沿って、固定資産の定義・分類を説明した。その後、有形固定資産の取得、改良と修繕、売却の説明をした。次に有形固定資産の減価償却を説明した。新しい授業項目ではあったが、筆者に理解が難しい項目との認識はなく、通常の説明と問題演習を行った。しかしながら理解度は図表5-13のような結果なった。

図表5-13　第8週の授業項目理解度

	質問事項	YES回答率	
㉒	固定資産とは何かを理解できたか	67%	YES　NO
㉓	有形固定資産取引の仕訳ができるようになったか	63%	YES　NO
㉔	減価償却とは何かを理解できたか	48%	YES　NO
㉕	減価償却の計算(定額法)ができるようになったか	50%	YES　NO
㉖	減価償却の仕訳ができるようになったか	52%	YES　NO

回答者数52人

第1週から第6週までの平均の理解度が83%であったのに比べると、急激な下落である。これまで順調に学習を進めてきた学生の中にも「少し8回目つまずいた。先生の研究室に質問に行きたいと思う。」、「…固定資産のところはもっとじっくりと授業をしても良いと思いました。」というものがあった。また、急に難易度が上がった旨の記述として、「急に覚えることが増えて大変でした。」、「難しさが増しているような気がした。(同旨他9名)」などがあった。減価償却は、カリキュラム・教え方の両面からを工夫すべき点が多くある。

5. 7　第9週授業

第9週のシラバスを図表5-14に示す。

図表5-14　第9週　シラバス

授業項目	概要	授業外学習
決算と試算表	・決算と決算手続の仕組みを理解する。 ・試算表の仕組みを理解し、作成の方法を学び、練習をする。 ［ﾃｷｽﾄ該当章：9］	今週の授業を復習し、来週の予習をして、出席確認プリント⑩と授業外学習プリント⑨を完成させ、manabaの練習問題⑨と復習課題⑨をやる。

第9週は、決算と決算手続について総論的に説明し、試算表の作成に入った。決算と決算手続の総論的説明は、テキストに沿いつつもコンパクトにまとめ冗長にならないよう留意した。初学者にとって決算や決算手続は具体的なイメージを持ちづらいので、早めに試算表作成の問題演習に入る方が学習効率がよいと判断したためである。試算表の作成は、第1週から第6週までに学んだ、「仕訳→転記」の次の手続きとして行われることもあって、これまでの知識の延長線上で理解しやすいのではないかと予想した。結果は図表5-15のとおりである。

図表5-15　第9週の授業項目理解度

	質問事項	YES回答率	
㉗	決算とは何か理解できたか	66%	YES NO
㉘	決戦手続きの順序は理解できたか	68%	YES NO
㉙	決算予備手続とは何か理解できたか	64%	YES NO
㉚	試算表とは何か理解できたか	70%	YES NO
㉛	試算表が作成できるようになったか	68%	YES NO

回答者数　53人

第8週の減価償却と比較すると、理解度が40%～50%の授業項目はなくなったが、依然として、前半(第1週～第6週)授業の平均理解度である83%より落としている。中間試験以後の理解度の改善が今後の課題である。自由記述欄には、「少しずつ分からないことが増えてきた…」、「だんだん難しくなってきた…(同旨他1名)」、「難しい言葉が多いので早く理解する…」

といった言葉が並んだ。比較的容易に理解できた旨の記述として、「今回は比較的簡単な内容で覚えやすかった…」、「9回目の内容は理解できた。」、「合計と残高の計算がしっかりできた。(同旨他5名)」というものがあった。

5. 8　第10週授業

第10週のシラバスを図表5-16に示す。

図表5-16　第10週　シラバス

授業項目	概要	授業外学習
決算整理取引 売上原価の計算	・決算整理事項の意義について理解する。 ・売上原価の計算仕組みを理解し、決算整理事項としての処理の方法を練習する。 ［ﾃｷｽﾄ該当章：１０］	今週の授業を復習し、来週の予習をして、出席確認プリント⑪と授業外学習プリント⑩を完成させ、manabaの練習問題⑩と復習課題⑩をやる。

第10週は、決算整理事項のなかでも難易度の高い三分法を前提とした売上原価の計算について説明した。三分法における売上原価の計算では、繰越商品勘定から仕入勘定へ、次に仕入勘定から繰越商品勘定へ金額を振り替える。この会計処理を理解させるために、まず「金額を振替える」とはどういうことか、次にその仕訳はどのように行うかについて説明した後売上原価算定の仕訳について説明した。

第10週の授業項目理解度は図表5-17に示す結果となった。

図表5-17　第10週の授業項目理解度

	質問事項	YES回答率		
㉜	決算整理が必要な理由を理解できたか	49%	YES	NO
㉝	どのような決算整理事項があるか覚えられたか	51%	YES	NO
㉞	棚卸表とは何か理解できたか	49%	YES	NO
㉟	三分法における売上原価の計算が覚えられたか	53%	YES	NO
㊱	売上原価の決算整理仕訳ができるようになったか	49%	YES	NO

回答者数　49人

難易度の高い項目であるので、ある程度の予想はしていたが、第10週授業の理解度も低いものとなった。自由記述欄には「単語が多くなってきて覚えきれなくなっているのでしっかり復習したいと思う。(同旨他1人)」と新出の学習項目に対して消化不良状態にあることをうかがわせるものがあった。また、「とりあえず暗記でよいから、

（借）仕　　入〔しい〕（貸）繰越商品〔くり〕

（借）繰越商品〔くり〕（貸）仕　　入〔しい〕

は覚える。(同旨他10名)」のように、原理は理解できなかったが仕訳を暗記しておくという

記述も11名いた。さらに「全然、わかりませんでした。（同旨他14名）」という記述も15名に上った。第10週は、自由記述欄が白紙の学生も7名おり、前述の15名と合わせると22名となった。これは第10週の授業参加者数の44％を占める。これで第8週、第9週、第10週と連続で前半授業（第1週～第6週）の理解度の平均83％を20～30ポイント近く下回る結果となっている。「簿記は難しい」との印象が固定化してしまないよう改善することが重要な課題である。

5．9　第11週授業

第11週のシラバスを図表5-18に示す。

図表5-18　第11週　シラバス

授業項目	概要	授業外学習
決算整理取引 貸倒れの見積り 復習	・売掛金の貸倒れの処理方法を練習する。 ・決算整理事項としての貸倒れの見積りの方法を練習する。 ・売上原価の計算方法を復習する。 ・減価償却法を復習する。 ［ﾃｷｽﾄ該当章：１１］	今週の授業を復習し、来週の予習をして、出席確認プリント⑫と授業外学習プリント⑪を完成させ、manaba の練習問題⑪と復習課題⑪をやる。

第11週は、決算整理事項のうち「貸倒れの見積もり」を学習し、売上原価の計算方法、減価償却法を復習する週である。新出の授業項目である「貸倒れの見積もり」は、授業の前半で説明し後半は、理解が難しいという意見の多かった「売上原価」と「減価償却」を復習した。第11週授業項目の理解度は図表5-19に示す結果となった。

図表5-19　第11週の授業項目理解度

	質問事項	YES回答率	
㊲	貸倒れの処理は理解できたか	68%	YES　NO
㊳	貸倒引当金の設定方法は覚えられたか	68%	YES　NO
㊴	売上原価の計算方法は復習できたか	64%	YES　NO
㊵	有形固定資産の減価償却法は復習できたか	68%	YES　NO

回答者数　47人

質問㊲「貸倒れの処理は理解できたか」、質問㊳「貸倒引当金の設定補法は覚えられたか」の問いに対しそれぞれ68％の学生が「理解できた」と回答している。これは、第8週授業の質問㉔「減価償却とは何か理解できたか」に対する理解度が48％、第10週授業の質問㊱「売上原価の決算整理仕訳ができるようになったか」に対する理解度が49％であったことに比べ18～19ポイント高い結果となった。『簿記入門』で学習する決算整理事項の中では比較的理解しやすい授業項目といえる。さらに質問㊴「売上原価の計算方法は復習できたか」に対しては「できた」と回答した学生が64％いて、初学である第9週授業の49％より15ポイント上昇している。

質問㊵「有形固定資産の減価償却法は復習できたか」に対しては「できた」と回答した学生が68%と、これも初学である第8週授業の48%よりも20ポイント上昇している。初学の際には理解が難しかった授業項目も、後日復習することで理解度が15ポイントから20ポイント上昇している。自由記述欄には、「貸倒れの処理と貸倒引当金の設定方法をしっかり覚えられた。(同旨他2名)」、「今回の範囲は以前やった減価償却も入っていたので比較的スムーズにできた」、「復習ができてよかった。(同旨他2名)」、など、新出である「貸倒れの処理」が理解できたこと、「減価償却」、「売上原価」の復習ができてよかったことを読み取ることができた。また、「今回新たに追加された貸倒損失や貸倒引当金などに加えて、前回やった減価償却なども絡んできて、簿記入門の総まとめのようになってきているのを感じました。(同旨他1名)」と「総まとめ」の段階に入ったことをしっかりと認識した記述もあった。勘定科目で混乱した記述としては「言葉をしっかり覚えて借方と貸方どっちに置くか分からなくならないようにする。」というのがあった。これは「貸倒引当金繰入（費用勘定)」と「貸倒引当金（評価勘定)」の性質の異なる2つの勘定科目が外見上似ていることが混乱の原因と考えられるので、この点の強調も必要であることを示唆する記述であった。また、この時点でクラスの約3割は授業を理解していないという結果も出ている点に注意したい。

5. 10　第12週・第13週・第14週　授業

第12週・第13週・第14週のシラバスを図表5-20に示す。

図表5-20　第12週・第13週・第14週　シラバス

授業項目	概要	授業外学習
精算表の作成	・精算表の仕組みについて理解する。 ・精算表の作成方法を学び、練習をする。 ［ﾃｷｽﾄ該当章：１２］	今週の授業を復習し、来週の予習をして、出席確認プリント⑬と授業外学習プリント⑫を完成させ、manaba の練習問題⑫と復習課題⑫をやる。
貸借対照表と損益計算書の作成	・損益計算の方法を理解する。 ・貸借対照表と損益計算書の作成方法を学び、練習する。 ・精算表の作成を復習し、練習を繰り返す。 ［ﾃｷｽﾄ該当章：１３］	今週の授業を復習し、来週の予習をして、出席確認プリント⑭と授業外学習プリント⑬を完成させ、manaba の練習問題⑬と復習課題⑬をやる。
試算表と精算表の作成練習	・試算表の作成を復習し、練習を繰り返す。 ・精算表の作成をもう一度復習し、さらに練習を繰り返す。 ［ﾃｷｽﾄ該当章：１４］	今週の授業を復習して、授業外学習プリント⑭を完成させ、manaba の練習問題⑭と復習課題⑭をやる。

第12週は、精算表の作成に入った。第8週〜第11週で説明した決算整理事項を再度復習し、精算表の記入の仕方を説明した。第12週の主目的は、精算表をまずは作成してみることなので、演習と質問の時間を多くとった。精算表の演習として、例題3問、練習問題3問の計6問を準備

した。第13週は、損益計算の方法としての「財産法・損益法」を説明し、次いで、貸借対照表と損益計算書の作成方法を説明した。最後に精算表の作成を復習した。精算表の作成は、十分な演習が必要なので、第12週と同様、演習と質問の時間を多くとった。例題3問、練習問題3問の計6問の演習問題を準備した。

第12週、第13週と合わせて精算表の演習問題数は12問となる。精算表を理解するための演習量としては十分と考えていた。第12週と第13週の授業項目理解度は図表5-21の結果となった。

図表5-21　第12週・第13週の授業項目理解度

	質問事項	YES回答率		
㊶	精算表とは何かを理解できたか	76%	YES	NO
㊷	精算表の種類を覚えられたか	71%	YES	NO
㊸	8桁精算表の作成方法を覚えられたか	71%	YES	NO
㊹	B/S P/Lの書式を覚えられたか	58%	YES	NO
㊺	決算整理事項を含めたB/S P/Lの作成ができるか	56%	YES	NO
㊻	8桁精算表の作成ができるか	54%		NO

回答者数　質問㊶~㊸(第12週)42人、質問㊹~㊻(第13週)50人

図表5-22　特に難しいと感じた授業項目

順位	授業項目名	人数
1	精算表の作成	25
2	減価償却	14
3	売上原価の算定	12
4	損益計算書の作成	10
4	貸借対照表の作成	10
5	決算整理全般	9
6	貸倒れの処理	8

質問㊶～㊸が第12週分、質問㊹～㊻が第13週分である。第13週には、7割以上の学生が精算表を理解し作成方法を覚えられたと回答した。特に質問㊸「8 桁精算表の作成方法を覚えられたか」の質問に対して「覚えられた」と回答したのは71% であった。これに対し、翌週の第13週になると質問㊻「8桁精算表の作成ができるか」と質問㊸と同様の質問に対して、「作成できる」と答えたのは54% と17ポイント下落している。自由記述欄には、「精算表をまだ完璧に理解していないから復習したい。」、「精算表はとても難しい。(同旨他3名)」と、精算表の作成に困難を覚えている記述があった。また、「今まで習ったことをちゃんと理解していないとだめだなあと思った。繰越商品と仕入れ (原文ママ) のやり方が分からない。(同旨他1名)」など、これまでの学習項目を十分理解していないことへの不安の声もあった。第14週は、新出の授業項目はなくすべて復習をした。まず試算表作成の復習問題1問、次いで精算表作成の復習問題1 問を説明後、残りの時間を問題演習と質問の時間とした。全14回の授業を終えて特に難しいと感じた項目についてアンケートを行った (自由記述方式・複数回答可)。を行った。アンケート結果は図表5-22のようになった。

これは、第1週から14週の授業項目の理解度や後述の期末試験結果とも符合する。特にクラス53名の約半数にあたる25名が精算表の作成を特に難しい項目として挙げている。

5. 11　期末試験の出題項目と得点率

図5-23に期末試験の出題項目とその結果を得点率として示す。受験者は登録53名に対し52名であった。

第1問は、資産、負債、純資産、収益、費用の具体的な勘定科目を指定された個数答える問題である。純資産の「資本金」の正答率が75％と低くなっているほかは80％以上の正答率であった。

第2問は、正答率87％と9割近い正答率であった。

第3問は、現金の仕訳2の正答率が低く65％であった。この主な原因は、「商品200,000円を購入し…（後略)」を仕入取引と読めずに、備品の購入として処理した誤答が8名いたことによる。また、現金の仕訳5では「手持ちの国債20,000円の支払期日が到来した。」を利息の支払いと誤解し「（借）支払利息　20,000　（貸）現金　20,000」とした誤答が15名いた。また「（借）現金20,000」は正しいが、貸方の勘定科目を「受取利息」とすべきところ、「受取配当金」や「支払利息」とした勘定科目の誤りが7名いた。第4問の販売諸掛りを含む売り上げの仕訳も前半の復習項目であるが正答率が38％と中間試験の正答率85％から47ポイント落としている。同様に引取費用を含む仕入の仕訳も正答率58％と中間試験の得点率83％より25ポイント落としている。これらはいずれも復習課題の中に数多く登場する基本的な項目なので、復習が追い付かないまま期末試験を受験したことを意味する。同様に、第3問の後半から第4問の前半までの正答率の落ち込みは、復習が追い付いていないことを表しており、復習の方法に課題を残しているといえる。これに対し第4問の後半から第5問にかけては、中間試験以後、第8週授業から新たに学習した授業項目であり、正答率が著しく下落しているのがわかる。

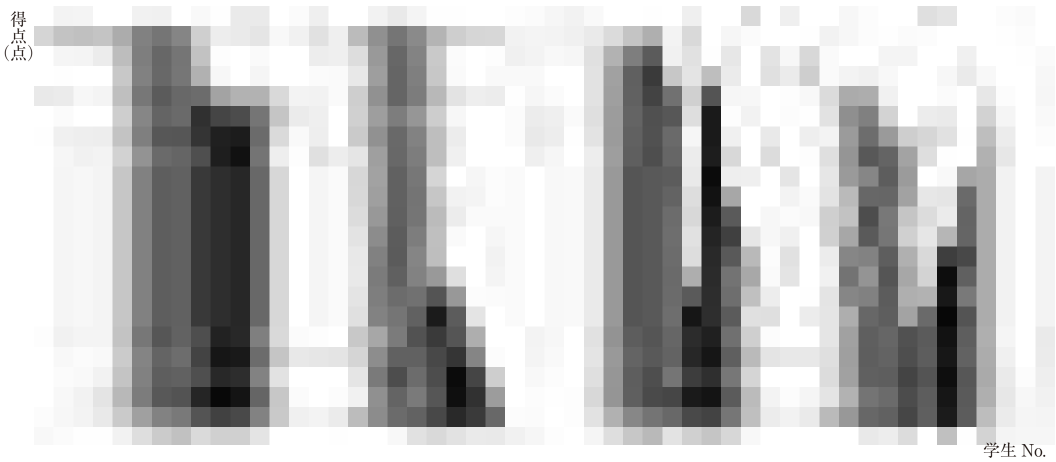
図表5-23　期末試験出題項目と得点率

	出題項目	得点率
第1問	資産の勘定科目を3つあげる	97%
	負債の勘定科目を2つあげる	80%
	純資産の勘定科目を1つあげる	75%
	収益の勘定科目を2つあげる	80%
	費用の勘定科目を2つあげる	87%
第2問	P/L B/S の型の理解	87%
第3問	現金の仕訳１　当座売上	90%
	現金の仕訳２　小切手と掛による仕入れ	65%
	現金の仕訳３　現金の当座預け入れ	92%
	現金の仕訳４　株式配当金領収書の受領	81%
	現金の仕訳５　国債利札の支払期日到来	37%
	現金勘定の記入（3か所採点）	54%
	現金勘定残高	40%
第4問	販売諸掛りを含む売上の仕訳	38%
	仕入諸掛りを含む仕入の仕訳	58%
	当座借越取引を含む備品購入の仕訳	67%
	土地購入の仕訳	46%
	土地の部分売却の仕訳	12%
第5問	売上原価算定の仕訳	56%
	貸倒引当金設定の仕訳	46%
	減価償却（間接法）の仕訳	48%
	精算表記入（6か所採点）	46%

受験者52人

期末試験の得点結果を中間試験の試験結果（図表5-11）に重ねて図表5-24に示す。この図表の縦軸は得点を横軸は登録学生を表し、ひとつの番号から伸びた左右の棒グラフはそれぞれ中間試験の得点、期末試験の得点を示す。24番は期末試験未受験である。

図表5-24　中間試験と期末試験の得点の重ね合わせ



図表5-24より、中間試験と比べて著しい得点の下落が見て取れる。これは、図表5-22に示した「特に難しいと感じた授業項目」が第8週以降に集中することとも整合する。

6.　考察

中間試験では、登録53人に対し、100点満点が24人、これを含む90点以上得点した学生が37人と、全体の70％を占めた。これを80点以上得点した学生にまで広げると44人で全体の83％となった。しかし、中間試験以降の第8週から第14週の授業では、学生の理解度が急激に落ちていった。期末試験では、100点得点者はわずか1人、90点台得点者は3人、80点台得点者は10人であった。80点以上得点者の合計は14人で全体の26％、中間試験の44人（83％）に比べて大きく下げている。第7週までの授業と第8週以降の授業でなぜこれほどまでに理解度の差がついてしまったのか。

中間試験までの授業では、第2週から第7週まで週間かけて1つのことだけを学ぶ。「仕訳と転記」である。授業項目としては、まず複式簿記の原理を学び、続いて現金預金取引、商品販売取引と進むが、簿記のフレームワークの中では、「取引を仕訳帳に仕訳し、総勘定元帳に転記する」というただ一つのことを6週間かけて学んでいる。初学者にとっては約1ヶ月半をかけて「仕訳と転記」を学ぶことになるので習得しやすい。これに対し中間試験以降の後半は、それまでとは全く異なる発想で「減価償却」、「売上原価の計算」を学び、これらの理解を前提として作業量の多い「精算表の作成」を学ぶ。結果として半数の学生が理解できないまま期末試験に臨んでしまうということが起こったと考えられる。授業の前半で簿記の学習方法が確立していないと、中間試験で高得点できても、期末試験までのどこかでつまずいてしまうことがわかる。加えて、期末試験では中間試験に比べ、簿記の学習を難しくしている外部

要因がある。それは、期末試験が他の科目と並行して行われることである。1年前期の学生は、必修科目を多く抱えている。『簿記入門』の学習に割ける時間は自ずと限られてくる。外部要因とはいえ、簿記の学習を難しくしている原因の一つといえる。

さらに図表5-24の結果より、中間試験と期末試験で得点が50％以上下落した学生グループ（学生18～24、31、34、37、41、45）12人と50％以上上昇したグループ（学生49、50、53）3人に着目し考察を深めたい。まず、出席点、復習課題、練習問題についてグループごとに平均をとったものを以下に示す。比較のため、クラス全体のデータも併記する。

まず、出席点の平均を図表6-1に示す。

図表6-1　出席点平均点（3点）

	第 7 週まで	第 8 週以降	第 1 週～第 14 週
クラス全体（53 人）	2.54 点	2.30 点	2.65 点
50%以上下落（12 人）	2.72 点	2.26 点	2.48 点
50%以上上昇（3 人）	2.48 点	2.52 点	2.50 点

出席点とは、出席プリントを3点満点で評価したものであり、手書きで提出する。そのため字の丁寧さなどから授業終了から翌週の授業までの授業外学習へのぞむ姿勢をみることができる。第7週までと第8週以降で比較すると、クラス全体では2.54点から2.30点と9.4％の下落に止まっているのに対し50％以上下落したグループ（12人）は2.72点から2.26点と16.9％下落している。このグループの平均得点は、第7週まではクラス全体よりも高く、第8週以降はクラス全体より低くなっている。つまり授業外学習に対する学習意欲の指標となる出席点が急降下しているのがわかる。逆に50％以上上昇したグループ（3人）では2.48点から2.52点と1.6％の上昇がみられる。

次に復習課題の平均（10点換算）を図表6-2に示す。

図表6-2　復習課題平均点（10点換算）

	第 7 週まで	第 8 週以降	第 1 週～第 14 週
クラス全体（53 人）	6.55 点	7.25 点	6.96 点
50%以上下落（12 人）	6.55 点	7.36 点	7.01 点
50%以上上昇（3 人）	5.69 点	6.52 点	5.69 点

復習課題平均点では、50％以上下落したグループが7.36点とクラス全体の7.25点よりも高い得点となっている。この結果は、50％以上下落したグループが manaba の復習課題ではよい

点数を取っているが期末試験での得点には結びついていないことを示している。

次に、復習課題を授業終了後何日目に提出したかを図表6-3に示す。

図表6-3　授業終了から復習課題の提出に要した日数

	第 7 週まで	第 8 週以降	第 1 週～第 14 週
クラス全体(53 人)	4.7 日	5.2 日	5.0 日
50%以上下落(12 人)	4.9 日	5.2 日	5.0 日
50%以上上昇(3 人)	4.3 日	5.1 日	4.7 日

図表6-3の結果から、50％以上上昇したグループが若干早い傾向があるが際立った差はないことがわかる。しかしほぼすべての学生が〆切が近づいてからの提出となっており、授業終了直後の提出はまれであった。今後の課題を一つ発見することができた。

次に、練習問題の平均点を図表6-4に示す。

図表6-4　練習問題平均点（10点換算）

	第 7 週まで	第 8 週以降	第 1 週～第 14 週
クラス全体(53 人)	8.69 点	8.45 点	8.55 点
50%以上下落(12 人)	8.06 点	7.99 点	8.02 点
50%以上上昇(3 人)	8.80 点	9.25 点	9.06 点

練習問題を3回合格（10点換算で7点以上得点）すると復習課題が受けられる。復習課題は1回しか受験できないが、この練習問題は何回でもチャレンジできる。練習問題の平均点は、各グループの平均点そのものに着目すると第7週までと第8週以降、第1週～第14週のすべての期間を通して最下位となっており期末試験の結果と整合する。特に第8週以降では50％以上下落したグループが7.99点であるのに対し、50％以上上昇したグループでは9.25点となっており得点の差が1.26点と顕著である。これは50％以上上昇したグループが第8週以降も粘り強く練習問題に取組んだことを示していると考えられる。

次に練習問題の取組回数を図表6-5に示す。

図表6-5　練習問題の平均取組回数

	第7週まで	第8週以降	第1週～第14週
クラス全体(53人)	2.1回	1.9回	2.0回
50%以上下落(12人)	1.8回	2.1回	2.0回
50%以上上昇(3人)	3.9回	2.6回	3.2回

練習問題の平均取組回数は、クラス全体の平均が第7週までが2.1回、第8週以降が1.9回と0.2回減少しているのに対し、50％以上下落したグループでは1.8回から2.1回へと0.3回増加している。また50％以上上昇したグループでは3.9回から2.6回へと1.3回減少している。これはクラス全体と50％以上上昇したグループがより少ない回数で合格できるようになっており学習効率の上昇が認められるのに対し、50％以上下落したグループは逆に学習効率の下落が認められる。

以上より、中間試験と比べて期末試験の得点で50％以上下落したグループの試験結果と整合するデータは、図表6-1の出席点の平均、図表6-3の練習問題の平均点、図表6-5の練習問題の平均取組回数であることがわかった。これらはいずれも学習期間全体を通した粘り強さを反映する指標である。クラス全体の22.6％にあたる50％以上下落したグループに属する学生12人は、第8週以降の難易度の上昇にともない粘り強く問題と取組むことを放棄してしまったといえるだろう。これはこのグループに属する学生の「あきらめやすさ」を表していると言い換えることもできる。

次に視点を変えて中間試験の復習状況をみてみたい。期末試験の第3問と第4問で中間試験の復習問題を出題した。第3問は1題4点で5題出題しすべて復習問題（20点）であり第4問は1題4点で5題出題したうち2題が復習問題（8点）である。その結果を図表6-6に示す。

図表6-6　期末試験第3問と第4問の平均点

	第3問の平均点 (20点満点) すべて復習問題	第4問の平均点 (20点中満点) 8点が復習問題
クラス全体(53人)	17.2点	8.9点
50%以上下落(12人)	10.3点	4.0点
50%以上上昇(3人)	13.3点	5.3点

第3問の平均点は、クラス全体が17.2点であるのに対し50％以上下落したグループが10.3点、50％以上上昇したグループが13.3点となっている。第4問の平均点は、クラス全体が8.9点、

50％以上下落したグループが4.0点、50％以上上昇したグループが5.3点となっている。これは50％以上下落したグループが第7週の中間試験時点で正解した問題を期末試験では正解できていないことを示している。これとは対照的に50％以上上昇したグループではクラス全体の平均点には及ばないが50％以上下落したグループよりもよい成績となっている。50％以上上昇したグループが中間試験の復習を含めて継続的に学習した結果と考えることができる。これは50％以上下落したグループの「あきらめやすさ」とは対照的に50％以上上昇したグループの「粘り強さ」を表している。「あきらめやすさ」の背後には、未消化の授業項目が蓄積していく負担感があると考えられ「簿記は難しすぎる」（20番の学生の最後の感想）となってしまう。「あきらめやすさ」から「粘り強さ」への転換を促す必要がある。

最後に、簿記の学習を難しくしているものとして以下の2点を指摘したい。まず1点目が図表5-22に示した各授業項目である。2点目は「あきらめやすさ」である。これら2点の具体的改善策の構築が今後の課題である。簿記を学ぶことの有用性を説きつつ内発的に問題に取組む姿勢をはぐくむことを目指したい。

7. 終わりに

本研究の実践的貢献について述べる。大学初年度における簿記導入授業を担当する教員にとっては、学習に困難を覚える学生をいかにして減らしていくかが悩みの種である場合もあるだろう。本研究は、教室での授業をイメージし、時系列に沿った実証データと学生の声を明らかにしたことに実践的貢献があるといえよう。本研究の限界としては、筆者の担当クラス53人のデータであり、この結果を一般化するには更なるデータの蓄積が必要であることをあげることができる。また、今後の課題として、更なる実証データの蓄積と次年度のシラバスとテキスト修正をあげることができる。

〔参考文献〕

大藪俊哉（1993）:「簿記教育の種々相」『横浜経営研究』、第14巻2号、pp.121-133.
粕谷和生（2009）:「導入段階における簿記教育の課題とその解決への取り組み」『経済系：関東学院大学経済学会研究論集』、第239集、pp.127-137.
木本圭一（2002）:「簿記教育上の認識ギャップ—測定ツールとしての E-Learning の可能性」『関西学院大学商学論究』、第50巻第1/2号、pp.185-200.
金融庁 HP（2019）：「平成30年公認会計士試験合格者調」（2019/3/21閲覧）、
https：//www.fsa.go.jp/cpaaob/kouninkaikeishi-shiken/ronbungoukaku_30/03.pdf
河野勉（1998）:「企業税務における基礎的簿記教育の重要性－日商簿記検定3級を中心として」『桃山学院大学経済経営論集』 第39巻第4号、pp.175-199.

国税庁 HP（2019）:「平成30年度（第68回）税理士試験結果」（2019/3/21閲覧）、
https：//www.nta.go.jp/taxes/zeirishi/zeirishishiken/shikenkekka2018/01.htm

近藤努（2018）:「企業における日商簿記検定の利用状況—東京証券取引所上場企業に対するアンケート調査をもとに—」『会計プロフェッション』、第13号、pp.349-363.

斎藤孝一（1990）:「簿記原理に対する学生の意識と問題点」『経営研究』（愛知学泉大学）、第3巻第2号、pp.139-159.

椎名市郎（1987）:「複式簿記の原理とその論理的導入法（Ⅳ）」『中央学院大学商経論叢』、第1巻第2号、pp.61-84.

鈴木茂（2004）:「コンピュータを手段とする簿記原理と教育」『産業能率大学紀要』、第37号、pp.39-48.

瀧田輝己（1994）:「大学における簿記教育と各種資格試験」『同志社商学』、第45巻第6号、pp.83-112.

中川健蔵（1990）:「大学簿記会計の基礎教育指導に関する一考察」『北星論集（経）』、第27号、pp.135-146.

日本商工会議所 HP（2019）:「受験者データ」（2019/3/21閲覧）、
https：//www.kentei.ne.jp/bookkeeping/candidate-data

原俊雄（2018）:「簿記教授法の再検討—導入段階での教育を中心に—」『横浜経営研究』、第38巻第3・4号、pp.87-97.

久野秀男（1990）:「批判的『簿記テキスト』試論—腑に落ちない『簿記テキスト』の常識—」『学習院大学経済論集』、第26巻第3・4合併号、pp.1-37.

茂木虎雄（1988）:「複式簿記論の基本原理—勘定理論と簿記教育—」『立教経済学研究』、第42巻第2号、pp.99-118.

山田真弘（2017）:「日商簿記検定「初級」創設に関する一考察：初学者に対する簿記会計教育の視点から」『関東学園大学紀要 Liberal Arts』、第26集、pp.26-34.

[研究ノート]

Sanno University Bulletin Vol. 40 No. 1 September 2019

チェビシェフ多項式基本型とルジャンドル多項式基本型との関係

The Relationship Between the Fundamental Style of Chebyshev Polynomials and That of the Legendre Polynomial

手代木　琢磨

Takuma Teshirogi

勝間　豊

Yutaka Katsuma

Abstract

In our previous paper, we defined the fundamental styles of Chebyshev polynomials. In this paper, we discuss the relationship between the fundamental style of Chebyshev polynomials and that of the Legendre polynomial.

1.　序論

手代木と勝間［2017］において、第一種および第二種のチェビシェフ多項式基本型を定義し、その関数の性質を議論した。本稿では、ルジャンドル多項式基本型を定義し、この関数とチェビシェフ多項式基本型との関係を議論する。

2.　チェビシェフ多項式基本型

2. 1　第一種のチェビシェフ多項式基本型

手代木と勝間[2017] で述べたように、第一種のチェビシェフ多項式基本型、${}_0T_N(x)$ は

$$ {}_0T_N(x) = \frac{N}{2} \cdot \sum_{k=0} \left\{ \frac{{}_{N-k}C_k}{N-k} \cdot (-\gamma^2)^k \cdot (2x)^{N-2k} \right\} = 2^{N-1} \cdot \prod_{k=1}^{N} \left(x - \gamma \cos \frac{2k-1}{2N} \pi \right) \quad (N \geq 2) $$

のように表される。ただし ${}_0T_0(x) = 1$, ${}_0T_1(x) = x$ である。しかしまた次式のようにも表される。

2018年10月17日　受理

$$ {}_0T_N(x) = 2^{N-1} \cdot [\, x^N + \sum_{k=1} \{ (-1)^k \cdot {}_N C_{2k} \cdot \prod_{j=1}^{k} (\frac{2j-1}{2N-2j}) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k} \}] $$

2. 2　第一種のチェビシェフ多項式基本型の微分方程式

第一種のチェビシェフ多項式基本型の微分方程式は次式で表され、$\gamma^2 = -1$ でも成立する。

$$ (1 - \frac{x^2}{\gamma^2}) \cdot {}_0T_N(x)'' - \frac{x}{\gamma^2} \cdot {}_0T_N(x)' + \frac{N^2}{\gamma^2} \cdot {}_0T_N(x) = 0 $$

2. 3　第二種のチェビシェフ多項式基本型

手代木と勝間[2017] で述べたように、第二種のチェビシェフ多項式基本型、${}_0U_N(x)$ は

$$ {}_0U_N(x) = \sum_{k=0} \{ {}_{N-k}C_k \cdot (-\gamma^2)^k \cdot (2x)^{N-2k} \} = 2^N \cdot \prod_{k=1}^{N} \left(x - \gamma \cos \frac{k}{N+1} \pi \right) \qquad (N \geq 2) $$

のように表される。ただし ${}_0U_0(x) = 1$, ${}_0U_1(x) = 2x$ である。しかしまた次式のようにも表される。

$$ {}_0U_N(x) = 2^N \cdot [\, x^N + \sum_{k=1} \{ (-1)^k \cdot {}_N C_{2k} \prod_{j=1}^{k} (\frac{2j-1}{2N-2j+2}) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k} \}] $$

2. 4　第二種のチェビシェフ多項式基本型の微分方程式

第二種のチェビシェフ多項式基本型の微分方程式は次式で表され、$\gamma^2 = -1$ でも成立する。

$$ (1 - \frac{x^2}{\gamma^2}) \cdot {}_0U_N(x)'' - \frac{3x}{\gamma^2} \cdot {}_0U_N(x)' + \frac{N(N+2)}{\gamma^2} \cdot {}_0U_N(x) = 0 $$

3.　ルジャンドルの微分方程式とルジャンドル多項式

3. 1　ルジャンドルの微分方程式

ルジャンドルの微分方程式は次式で表される。

$$ (1 - x^2) \cdot Le_N(x)'' - 2x \cdot Le_N(x)' + N(N+1) \cdot Le_N(x) = 0 $$

3．2　ルジャンドル多項式

上の微分方程式の解の一般形であるルジャンドル多項式、$Le_N(x)$ は普通次式で表される。

$$Le_N(x)=\frac{(2N)!}{2^N\cdot(N!)^2}\cdot\left[x^N-\frac{N(N-1)}{2(2N-1)}\cdot x^{N-2}+\frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{2\cdot 4\cdot(2N-1)(2N-3)}\cdot x^{N-4}-\cdots\right]$$

ただし　$Le_0(x)=1$　,　$Le_1(x)=x$　である。

4.　ルジャンドル多項式基本型

4．1　第一種のジャンドル多項式基本型の微分方程式とその解

ルジャンドルの微分方程式は、 第一種のチェビシェフ多項式 $T_N(x)$ の微分方程式に非常によく似ているので、第一種のルジャンドル多項式基本型 ${}_0P_N(x)$ を第一種のチェビシェフ多項式基本型 ${}_0T_N(x)$ の類似関数として誘導する。

まず第一種のルジャンドル多項式基本型、${}_0P_N(x)$ の微分方程式は次式で表されるとする。

$$(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot{}_0P_N(x)''-\frac{2x}{\gamma^2}\cdot{}_0P_N(x)'+\frac{N(N+1)}{\gamma^2}\cdot{}_0P_N(x)=0$$

さらに ${}_0P_N(x)$ が ${}_0T_N(x)$ と ${}_0p_N(k)$ とを用いて次式で表されると仮定する。

$${}_0P_N(x)=2^{N-1}\cdot x^N+2^{N-1}\cdot\sum_{k=1}[(-1)^k\cdot{}_NC_{2k}\cdot\{\prod_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{2N-2j})\cdot{}_0p_N(k)\}\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-2k}]$$

この ${}_0P_N(x)$ を微分方程式に代入して ${}_0p_N(k)$ を求める。ただし微分方程式に代入するときには、係数を省いて検討する。まず ${}_0P_N(x)$ の一階微分、二階微分を次に示す。

$$\begin{cases}{}_0P_N(x)'=N\cdot x^{N-1}+\displaystyle\sum_{k=1}[(-1)^k(N-2k)\cdot{}_NC_{2k}\cdot\{\prod_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{2N-2j})\cdot{}_0p_N(k)\}\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-2k-1}]\\{}_0P_N(x)''=N(N-1)\cdot x^{N-2}\\\qquad+\displaystyle\sum_{k=1}[(-1)^k(N-2k)(N-2k-1)\cdot{}_NC_{2k}\cdot\{\prod_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{2N-2j})\cdot{}_0p_N(k)\}\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-2k-2}]\end{cases}$$

この結果を ${}_0P_N(x)$ の微分方程式に代入して整理する。

まず $\dfrac{x^N}{\gamma^2}$ の項は 0 となる。また x^{N-2} の項は

$$N(N-1)+\{(N-2)(N-3)+2(N-2)-N(N+1)\}\cdot {}_N C_2\cdot\frac{1}{2N-2}\cdot {}_0 p_N(1)=0$$

となるので、整理して、${}_0 p_N(1)=\dfrac{2N-2}{2N-1}$ が得られる。さらに $\gamma^2\cdot x^{N-4}$ の項は

$$\{N(N+1)-2(N-4)-(N-4)(N-5)\}\cdot {}_N C_4\cdot\frac{1}{2N-2}\cdot\frac{3}{2N-4}\cdot {}_0 p_N(2)$$
$$=(N-2)(N-3)\cdot {}_N C_2\cdot\frac{1}{2N-2}\cdot {}_0 p_N(1)=0$$

となるので、整理して、${}_0 p_N(2)=\dfrac{2N-4}{2N-3}\cdot {}_0 p_N(1)=\dfrac{2N-2}{2N-1}\cdot\dfrac{2N-4}{2N-3}$ が得られる。

一般に $\gamma^{2k-2}\cdot x^{N-2k}$ の項は次式となり、整理して、${}_0 p_N(k)$ の漸化式が得られる。

$$ {}_0 p_N(k)=\frac{(N-2k+2)\,(N-2k+1)}{2k(2N-2k+1)}\cdot\frac{{}_N C_{2k-2}}{{}_N C_{2k}}\cdot\frac{2N-2k}{2k-1}\cdot {}_0 p_N(k-1)$$
$$=\frac{2N-2k}{2N-2k+1}\cdot {}_0 p_N(k-1)$$

結局 ${}_0 p_N(k)$ の一般式 ${}_0 p_N(k)=\prod_{j=1}^{k}\left(\dfrac{2N-2j}{2N-2j+1}\right)$ を ${}_0 P_N(x)$ に代入し次式を得る。

$$ {}_0 P_N(x)=2^{N-1}\cdot[\,x^N+\sum_{k=1}\{(-1)^k\cdot {}_N C_{2k}\cdot\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{2j-1}{2N-2j}\right)\left(\frac{2N-2j}{2N-2j+1}\right)\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-2k}\}]$$
$$=2^{N-1}\cdot[\,x^N+\sum_{k=1}\{(-1)^k\cdot {}_N C_{2k}\cdot\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{2j-1}{2N-2j+1}\right)\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-2k}\}]$$

この ${}_0 P_N(x)$ が第一種のルジャンドル多項式基本型の微分方程式の解である。

$N=2$ から $N=13$ までの関数 ${}_0 P_N(x)$ を下にまとめた。

$$ {}_0 P_2(x)=2\cdot(\,x^2-\frac{{}_2 C_2}{3}\cdot\gamma^2)$$

$$ {}_0 P_3(x)=2^2\cdot(\,x^3-\frac{{}_3 C_2}{5}\cdot\gamma^2\cdot x)$$

$$ {}_0 P_4(x)=2^3\cdot(\,x^4-\frac{{}_4 C_2}{7}\cdot\gamma^2\cdot x^2+\frac{3\cdot {}_4 C_4}{5\cdot 7}\cdot\gamma^4)$$

$$ {}_0 P_5(x)=2^4\cdot(\,x^5-\frac{{}_5 C_2}{9}\cdot\gamma^2\cdot x^3+\frac{{}_5 C_4}{3.7}\cdot\gamma^4\cdot x)$$

$$
{}_0P_6(x)=2^5\cdot(x^6-\frac{{}_6C_2}{11}\cdot\gamma^2\cdot x^4+\frac{{}_6C_4}{3\cdot 11}\cdot\gamma^4\cdot x^2-\frac{5\cdot{}_6C_6}{3\cdot 7\cdot 11}\cdot\gamma^6)
$$

$$
{}_0P_7(x)=2^6\cdot(x^7-\frac{{}_7C_2}{13}\cdot\gamma^2\cdot x^5+\frac{3\cdot{}_7C_4}{11\cdot 13}\cdot\gamma^4\cdot x^3-\frac{5\cdot{}_7C_6}{3\cdot 11\cdot 13}\cdot\gamma^6\cdot x)
$$

$$
{}_0P_8(x)=2^7\cdot(x^8-\frac{{}_8C_2}{15}\cdot\gamma^2\cdot x^6+\frac{{}_8C_4}{5\cdot 13}\cdot\gamma^4\cdot x^4-\frac{{}_8C_6}{11\cdot 13}\cdot\gamma^6\cdot x^2+\frac{7\cdot{}_8C_8}{9\cdot 11\cdot 13}\cdot\gamma^8)
$$

$$
{}_0P_9(x)=2^8\cdot(x^9-\frac{{}_9C_2}{17}\cdot\gamma^2\cdot x^7+\frac{{}_9C_4}{5\cdot 17}\cdot\gamma^4\cdot x^5-\frac{{}_9C_6}{13\cdot 17}\cdot\gamma^6\cdot x^3+\frac{7\cdot{}_9C_8}{11\cdot 13\cdot 17}\cdot\gamma^8\cdot x)
$$

$$
\begin{aligned}
{}_0P_{10}(x)=2^9\cdot(x^{10}&-\frac{{}_{10}C_2}{19}\cdot\gamma^2\cdot x^8+\frac{3\cdot{}_{10}C_4}{17\cdot 19}\cdot\gamma^4\cdot x^6-\frac{{}_{10}C_6}{17\cdot 19}\cdot\gamma^6\cdot x^4+\frac{7\cdot{}_{10}C_8}{13\cdot 17\cdot 19}\cdot\gamma^8\cdot x^2\\
&-\frac{7\cdot 9\cdot{}_{10}C_{10}}{11\cdot 13\cdot 17\cdot 19}\cdot\gamma^{10})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_0P_{11}(x)=2^{10}\cdot(x^{11}&-\frac{{}_{11}C_2}{21}\cdot\gamma^2\cdot x^9+\frac{{}_{11}C_4}{7\cdot 19}\cdot\gamma^4\cdot x^7-\frac{5\cdot{}_{11}C_6}{7\cdot 17\cdot 19}\cdot\gamma^6\cdot x^5+\frac{{}_{11}C_8}{3\cdot 17\cdot 19}\cdot\gamma^8\cdot x^3\\
&-\frac{3\cdot{}_{11}C_{10}}{13\cdot 17\cdot 19}\cdot\gamma^{10}\cdot x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_0P_{12}(x)=2^{11}\cdot(x^{12}&-\frac{{}_{12}C_2}{23}\cdot\gamma^2\cdot x^{10}+\frac{{}_{12}C_4}{7\cdot 23}\cdot\gamma^4\cdot x^8-\frac{5\cdot{}_{12}C_6}{7\cdot 19\cdot 23}\cdot\gamma^6\cdot x^6+\frac{5\cdot{}_{12}C_8}{17\cdot 19\cdot 23}\cdot\gamma^8\cdot x^4\\
&-\frac{3\cdot{}_{12}C_{10}}{17\cdot 19\cdot\cdot 23}\cdot\gamma^{10}\cdot x^2+\frac{3\cdot 11\cdot{}_{12}C_{12}}{13\cdot 17\cdot 19\cdot 23}\cdot\gamma^{12})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_0P_{13}(x)=2^{12}\cdot(x^{13}&-\frac{{}_{13}C_2}{25}\cdot\gamma^2\cdot x^{11}+\frac{3\cdot{}_{13}C_4}{23\cdot 25}\cdot\gamma^4\cdot x^9-\frac{{}_{13}C_6}{5\cdot 7\cdot 23}\cdot\gamma^6\cdot x^7+\frac{{}_{13}C_8}{5\cdot 19\cdot 23}\cdot\gamma^8\cdot x^5\\
&-\frac{9\cdot{}_{13}C_{10}}{5\cdot 17\cdot 19\cdot 23}\cdot\gamma^{10}\cdot x^3+\frac{3\cdot 11\cdot{}_{13}C_{12}}{17\cdot 19\cdot 23\cdot 25}\cdot\gamma^{12}\cdot x)
\end{aligned}
$$

4．2　第二種のルジャンドル多項式基本型の微分方程式とその解

ルジャンドル多項式の微分方程式は、 第二種のチェビシェフ多項式 $U_N(x)$ の微分方程式に非常によく似ているので、第二種のルジャンドル多項式基本型、${}_0Q_N(x)$ を第二種のチェビシェフ多項式基本型 ${}_0U_N(x)$ の類似関数として誘導する。

第二種のルジャンドル多項式基本型、${}_0Q_N(x)$ の微分方程式は次式で表されるとする。

$$
(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot{}_0Q_N(x)''-\frac{2x}{\gamma^2}\cdot{}_0Q_N(x)'+\frac{N(N+1)}{\gamma^2}\cdot{}_0Q_N(x)=0
$$

さらに ${}_0Q_N(x)$ が ${}_0U_N(x)$ と ${}_0q_N(k)$ とを用いて次式で表されると仮定する。

$${}_0Q_N(x) = 2^N \cdot x^N + 2^N \cdot \sum_{k=1}[(-1)^k \cdot {}_N C_{2k} \cdot \{\prod_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{2N-2j+2}) \cdot {}_0q_N(k)\} \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k}\ ]$$

この ${}_0\boldsymbol{Q}_N(x)$ を微分方程式に代入して ${}_0q_N(k)$ を求める。ただし微分方程式に代入するときには、係数を省いて検討する。まず ${}_0\boldsymbol{Q}_N(x)$ の一階微分、二階微分を次に示す。

$$\begin{cases} {}_0Q_N(x)' = N \cdot x^{N-1} + \sum_{k=1}[(-1)^k (N-2k) \cdot {}_N C_{2k} \cdot \{\prod_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{2N-2j+2}) \cdot {}_0q_N(k)\} \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k-1}] \\ {}_0Q_N(x)'' = N(N-1) \cdot x^{N-2} \\ \qquad + \sum_{k=1}[(-1)^k (N-2k)(N-2k-1) \cdot {}_N C_{2k} \cdot \{\prod_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{2N-2j+2}) \cdot {}_0q_N(k)\} \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k-2}\ ] \end{cases}$$

この結果を ${}_0Q_N(x)$ の微分方程式に代入して整理する。

まず $\dfrac{x^N}{\gamma^2}$ の項は 0 となる。また x^{N-2} の項は

$$N(N-1) + \left\{ (N-2)(N-3) + 2(N-2) - N(N+1) \right\} \cdot {}_N C_2 \cdot \frac{1}{2N} \cdot {}_0q_N(1) = 0$$

となるので、整理して、${}_0q_N(1) = \dfrac{2N}{2N-1}$ が得られる。さらに $\gamma^2 \cdot x^{N-4}$ の項は

$$\left\{ N(N+1) - 2(N-4) - (N-4)(N-5) \right\} \cdot {}_N C_4 \cdot \frac{1}{2N} \cdot \frac{3}{2N-2} \cdot {}_0q_N(2)$$
$$= (N-2)(N-3) \cdot {}_N C_2 \cdot \frac{1}{2N} \cdot {}_0q_N(1) = 0$$

となるので、整理して、${}_0q_N(2) = \dfrac{2N-2}{2N-3} \cdot {}_0q_N(1) = \dfrac{2N}{2N-1} \cdot \dfrac{2N-2}{2N-3}$ が得られる。

一般に $\gamma^{2k-2} \cdot x^{N-2k}$ の項は次式となり、整理して、${}_0q_N(k)$ の漸化式が得られる。

$${}_0q_N(k) = \frac{(N-2k+2)\,(N-2k+1)}{2k(2N-2k+1)} \cdot \frac{{}_N C_{2k-2}}{{}_N C_{2k}} \cdot \frac{2N-2k+2}{2k-1} \cdot {}_0q_N(k-1)$$
$$= \frac{2N-2k+2}{2N-2k+1} \cdot {}_0q_N(k-1)$$

結局 ${}_0q_N(k)$ の一般式 ${}_0q_N(x) = \displaystyle\prod_{j=1}^{k}(\frac{2N-2j+2}{2N-2j+1})$ を ${}_0Q_N(x)$ に代入して次式を得る。

$$
\begin{aligned}
{}_0Q_N(x) &= 2^N \cdot [\, x^N + \sum_{k=1} \{(-1)^k \cdot {}_N C_{2k} \cdot \prod_{j=1}^{k} (\frac{2j-1}{2N-2j+2})(\frac{2N-2j+2}{2N-2j+1}) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k}\}] \\
&= 2^N \cdot [\, x^N + \sum_{k=1} \{(-1)^k \cdot {}_N C_{2k} \cdot \prod_{j=1}^{k} (\frac{2j-1}{2N-2j+1}) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k}\}]
\end{aligned}
$$

以上の結果から第一種のルジャンドル多項式基本型 ${}_0P_N(x)$ と、第二種のルジャンドル多項式基本型 ${}_0Q_N(x)$ を比較すると ${}_0Q_N(x) = 2 \cdot {}_0P_N(x)$ となっている。

5. ルジャンドル多項式基本型の微分方程式の別解法

5. 1　チェビシェフ多項式基本型の漸化式

ルジャンドル多項式基本型の微分方程式の別の解法を検討する場合、チェビシェフ多項式基本型の漸化式が必要となるので、ここにまとめておく。

まずチェビシェフ多項式基本型間の重要な漸化式は次の三式である。

$$
{}_0T_N(x) = \frac{{}_0U_N(x) - \gamma^2 \cdot {}_0U_{N-2}(x)}{2}
$$

$$
x \cdot {}_0T_{N-1}(x) = \frac{{}_0T_N(x) + \gamma^2 \cdot {}_0T_{N-2}(x)}{2}
$$

$$
x \cdot {}_0U_{N-1}(x) = \frac{{}_0U_N(x) + \gamma^2 \cdot {}_0U_{N-2}(x)}{2}
$$

第一の式の微分によって ${}_0T_N(x)' = \dfrac{{}_0U_N(x)' - \gamma^2 \cdot {}_0U_{N-2}(x)'}{2}$ が得られる。

また、手代木と勝間[2017] で報告した ${}_0T_N(x)' = N \cdot {}_0U_{N-1}(x)$ から、

$2N \cdot {}_0U_{N-1}(x) = {}_0U_N(x)' - \gamma^2 \cdot {}_0U_{N-2}(x)'$ が得られる。

第三の式 $x \cdot {}_0U_{N-1}(x) = \dfrac{{}_0U_N(x) + \gamma^2 \cdot {}_0U_{N-2}(x)}{2}$ から、第一の式

${}_0T_N(x) = \dfrac{{}_0U_N(x) - \gamma^2 \cdot {}_0U_{N-2}(x)}{2}$ を引くと、$x \cdot {}_0U_{N-1}(x) = {}_0T_N(x) + \gamma^2 \cdot {}_0U_{N-2}(x)$

が得られ、和をとると、$x \cdot {}_0U_{N-1}(x) + {}_0T_N(x) = {}_0U_N(x)$ が得られる。

また $x\cdot{}_0U_{N-1}(x) = {}_0T_N(x)+\gamma^2\cdot{}_0U_{N-2}(x)$ と ${}_0T_N(x)' = N\cdot{}_0U_{N-1}(x)$ とから、

$x\cdot{}_0T_N(x)' = N\cdot{}_0T_N(x)+N\,\gamma^2\cdot{}_0U_{N-2}(x)$ が得られる。

さらに $x\cdot{}_0U_{N-1}(x) = {}_0T_N(x)+\gamma^2\cdot{}_0U_{N-2}(x)$ を $x\cdot{}_0U_N(x) = {}_0T_{N+1}(x)+\gamma^2\cdot{}_0U_{N-1}(x)$ に変え、この式を一回微分して整理し、$x\cdot{}_0U_N(x)' = N\cdot{}_0U_N(x)+\gamma^2\cdot{}_0U_{N-1}(x)'$ が得られる。

以上の漸化式を念頭に置いて次に進む。

5. 2　第一種のルジャンドル多項式基本型の微分方程式の別解法

まず ${}_0P_N(x) = {}_0T_N(x)+{}_0R_N(x)$ となる第一種の基本型補助項 ${}_0R_N(x)$ を定義する。

$${}_0R_N(x) = 2^{N-1}\cdot\sum_{k=1}[\,(-1)^k\cdot{}_NC_{2k}\cdot\{\prod_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{2N-2j+1})-\prod_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{2N-2j})\}\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-2k}\ ]$$

$N=2$ から $N=13$ までの関数 ${}_0R_N(x)$ を下にまとめる。

$$R_2(x)=\frac{2\cdot{}_2C_2}{2\cdot3}\cdot\gamma^2$$

$$R_3(x)=\frac{2^2\cdot{}_3C_2}{4\cdot5}\cdot\gamma^2\cdot x$$

$$R_4(x)=\frac{2^3\cdot{}_4C_2}{6\cdot7}\cdot\gamma^2\cdot x^2-\frac{11\cdot{}_4C_4}{5\cdot7}\cdot\gamma^4$$

$$R_5(x)=\frac{2^4\cdot{}_5C_2}{8\cdot9}\cdot\gamma^2\cdot x^3-\frac{5\cdot{}_5C_4}{3\cdot7}\cdot\gamma^4\cdot x$$

$$R_6(x)=\frac{2^5\cdot{}_6C_2}{10\cdot11}\cdot\gamma^2\cdot x^4-\frac{2\cdot19\cdot{}_6C_4}{3\cdot5\cdot11}\cdot\gamma^4\cdot x^2+\frac{71\cdot{}_6C_6}{3\cdot7\cdot11}\cdot\gamma^6$$

$$R_7(x)=\frac{2^6\cdot{}_7C_2}{12\cdot13}\cdot\gamma^2\cdot x^5-\frac{2^3\cdot23\cdot{}_7C_4}{5\cdot11\cdot13}\cdot\gamma^4\cdot x^3+\frac{109\cdot{}_7C_6}{3\cdot11\cdot13}\cdot\gamma^6\cdot x$$

$$R_8(x)=\frac{2^7\cdot{}_8C_2}{14\cdot15}\cdot\gamma^2\cdot x^6-\frac{2^4\cdot9\cdot{}_8C_4}{5\cdot7\cdot13}\cdot\gamma^4\cdot x^4+\frac{2^3\cdot31\cdot{}_8C_6}{7\cdot11\cdot13}\cdot\gamma^6\cdot x^2-\frac{17\cdot23\cdot{}_8C_8}{9\cdot11\cdot13}\cdot\gamma^8$$

$$R_9(x)=\frac{2^8\cdot{}_9C_2}{16\cdot17}\cdot\gamma^2\cdot x^7-\frac{2^3\cdot31\cdot{}_9C_4}{5\cdot7\cdot17}\cdot\gamma^4\cdot x^5+\frac{2\cdot209\cdot{}_9C_6}{7\cdot13\cdot17}\cdot\gamma^6\cdot x^3-\frac{9\cdot71\cdot{}_9C_8}{11\cdot13\cdot17}\cdot\gamma^8\cdot x$$

$$R_{10}(x)=\frac{2^9\cdot{}_{10}C_2}{18\cdot 19}\cdot\gamma^2\cdot x^8-\frac{2^4\cdot 35\cdot{}_{10}C_4}{3\cdot 17\cdot 19}\cdot\gamma^4\cdot x^6+\frac{2^3\cdot 271\cdot{}_{10}C_6}{3\cdot 7\cdot 17\cdot 19}\cdot\gamma^6\cdot x^4$$
$$-\frac{2\cdot 31\cdot 157\cdot{}_{10}C_8}{9\cdot 13\cdot 17\cdot 19}\cdot\gamma^8\cdot x^2+\frac{13933\cdot{}_{10}C_{10}}{11\cdot 13\cdot 17\cdot 19}\cdot\gamma^{10}$$

$$R_{11}(x)=\frac{2^{10}\cdot{}_{11}C_2}{20\cdot 21}\cdot\gamma^2\cdot x^9-\frac{2^7\cdot 13\cdot{}_{11}C_4}{5\cdot 19\cdot 21}\cdot\gamma^4\cdot x^7+\frac{2^3\cdot 11\cdot 31\cdot{}_{11}C_6}{17\cdot 19\cdot 21}\cdot\gamma^6\cdot x^5$$
$$-\frac{2^2\cdot 67\cdot{}_{11}C_8}{3\cdot 17\cdot 19}\cdot\gamma^8\cdot x^3+\frac{23\cdot 49\cdot{}_{11}C_{10}}{13\cdot 17\cdot 19}\cdot\gamma^{10}\cdot x$$

$$R_{12}(x)=\frac{2^{11}\cdot{}_{12}C_2}{22\cdot 23}\cdot\gamma^2\cdot x^{10}-\frac{2^8\cdot 43\cdot{}_{12}C_4}{5\cdot 7\cdot 11\cdot 23}\cdot\gamma^4\cdot x^8+\frac{2^7\cdot 419\cdot{}_{12}C_6}{3\cdot 7\cdot 11\cdot 19\cdot 23}\cdot\gamma^6\cdot x^6$$
$$-\frac{2^3\cdot 13\cdot 751\cdot{}_{12}C_8}{3\cdot 11\cdot 17\cdot 19\cdot 23}\cdot\gamma^8\cdot x^4+\frac{2^2\cdot 9\cdot 599\cdot{}_{12}C_{10}}{11\cdot 17\cdot 19\cdot 23}\cdot\gamma^{10}\cdot x^2-\frac{79\cdot 367\cdot{}_{12}C_{12}}{13\cdot 17\cdot 19\cdot 23}\cdot\gamma^{12}$$

$$R_{13}(x)=\frac{2^{12}\cdot{}_{13}C_2}{24\cdot 25}\cdot\gamma^2\cdot x^{11}-\frac{2^8\cdot 47\cdot{}_{13}C_4}{11\cdot 23\cdot 25}\cdot\gamma^4\cdot x^9+\frac{2^6\cdot 101\cdot{}_{13}C_6}{5\cdot 7\cdot 11\cdot 23}\cdot\gamma^6\cdot x^7$$
$$-\frac{2^5\cdot 43\cdot 61\cdot{}_{13}C_8}{5\cdot 9\cdot 11\cdot 19\cdot 23}\cdot\gamma^8\cdot x^5+\frac{2\cdot 57263\cdot{}_{13}C_{10}}{5\cdot 11\cdot 17\cdot 19\cdot 23}\cdot\gamma^{10}\cdot x^3-\frac{13\cdot 3889\cdot{}_{13}C_{12}}{17\cdot 19\cdot 23\cdot 25}\cdot\gamma^{12}\cdot x$$

${}_0P_N(x)$ の微分方程式を利用して、${}_0R_N(x)$ とチェビシェフ多項式基本型との関係を求める。

$$(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot{}_0P_N(x)''-\frac{2x}{\gamma^2}\cdot{}_0P_N(x)'+\frac{N(N+1)}{\gamma^2}\cdot{}_0P_N(x)$$
$$=-\frac{x}{\gamma^2}\cdot{}_0T_N(x)'+\frac{N}{\gamma^2}\cdot{}_0T_N(x)+(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot{}_0R_N(x)''-\frac{2x}{\gamma^2}\cdot{}_0R_N(x)'+\frac{N(N+1)}{\gamma^2}\cdot{}_0R_N(x)=0$$

上の式の最初の部分 $-\frac{x}{\gamma^2}\cdot{}_0T_N(x)'+\frac{N}{\gamma^2}\cdot{}_0T_N(x)$ はすでに述べたように $-N\cdot{}_0U_{N-2}(x)$ と

なり、結局 $(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot{}_0R_N(x)''-\frac{2x}{\gamma^2}\cdot{}_0R_N(x)'+\frac{N(N+1)}{\gamma^2}\cdot{}_0R_N(x)=N\cdot{}_0U_{N-2}(x)$ が得られる。

5. 3　第二種のルジャンドル多項式基本型の微分方程式の別解法

まず ${}_0Q_N(x)={}_0U_N(x)+{}_0S_N(x)$ となる第二種の基本型補助項 ${}_0S_N(x)$ を定義する。

$${}_0S_N(x)=2^N\cdot\sum_{k=1}[(-1)^k\cdot{}_NC_{2k}\cdot\{\prod_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{2N-2j+1})-\prod_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{2N-2j+2})\}\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-2k}]$$

$N=2$ から $N=13$ までの関数 ${}_0S_N(x)$ を下にまとめる。

$${}_0S_2(x)=-\frac{2^2\cdot{}_2C_2}{3\cdot4}\cdot\gamma^2$$

$${}_0S_3(x)=-\frac{2^3\cdot{}_3C_2}{5\cdot6}\cdot\gamma^2\cdot x$$

$${}_0S_4(x)=-\frac{2^4\cdot{}_4C_2}{7\cdot8}\cdot\gamma^2\cdot x^2+\frac{13\cdot{}_4C_4}{5\cdot7}\cdot\gamma^4$$

$${}_0S_5(x)=-\frac{2^5\cdot{}_5C_2}{9\cdot10}\cdot\gamma^2\cdot x^3+\frac{2\cdot17\cdot{}_5C_4}{3\cdot5\cdot7}\cdot\gamma^4\cdot x$$

$${}_0S_6(x)=-\frac{2^6\cdot{}_6C_2}{11\cdot12}\cdot\gamma^2\cdot x^4+\frac{2^3\cdot7\cdot{}_6C_4}{3\cdot5\cdot11}\cdot\gamma^4\cdot x^2-\frac{89\cdot{}_6C_6}{3\cdot7\cdot11}\cdot\gamma^6$$

$${}_0S_7(x)=-\frac{2^7\cdot{}_7C_2}{13\cdot14}\cdot\gamma^2\cdot x^5+\frac{2^4\cdot25\cdot{}_7C_4}{7\cdot11\cdot13}\cdot\gamma^4\cdot x^3-\frac{2^3\cdot131\cdot{}_7C_6}{3\cdot7\cdot11\cdot13}\cdot\gamma^6\cdot x$$

$${}_0S_8(x)=-\frac{2^8\cdot{}_8C_2}{15\cdot16}\cdot\gamma^2\cdot x^6+\frac{2^3\cdot29\cdot{}_8C_4}{5\cdot7\cdot13}\cdot\gamma^4\cdot x^4-\frac{2\cdot181\cdot{}_8C_6}{7\cdot11\cdot13}\cdot\gamma^6\cdot x^2+\frac{5\cdot101\cdot{}_8C_8}{9\cdot11\cdot13}\cdot\gamma^8$$

$${}_0S_9(x)=-\frac{2^9\cdot{}_9C_2}{17\cdot18}\cdot\gamma^2\cdot x^7+\frac{2^4\cdot11\cdot{}_9C_4}{3\cdot5\cdot17}\cdot\gamma^4\cdot x^5-\frac{2^3\cdot239\cdot{}_9C_6}{3\cdot7\cdot13\cdot17}\cdot\gamma^6\cdot x^3+\frac{2\cdot29\cdot137\cdot{}_9C_8}{9\cdot11\cdot13\cdot17}\cdot\gamma^8\cdot x$$

$$\begin{aligned}{}_0S_{10}(x)=&-\frac{2^{10}\cdot{}_{10}C_2}{19\cdot20}\cdot\gamma^2\cdot x^8+\frac{2^7\cdot37\cdot{}_{10}C_4}{3\cdot5\cdot17\cdot19}\cdot\gamma^4\cdot x^6-\frac{2^3\cdot61\cdot{}_{10}C_6}{3\cdot17\cdot19}\cdot\gamma^6\cdot x^4\\&+\frac{2^2\cdot11\cdot107\cdot{}_{10}C_8}{3\cdot13\cdot17\cdot19}\cdot\gamma^8\cdot x^2-\frac{18323\cdot{}_{10}C_{10}}{11\cdot13\cdot17\cdot19}\cdot\gamma^{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}{}_0S_{11}(x)=&-\frac{2^{11}\cdot{}_{11}C_2}{21\cdot22}\cdot\gamma^2\cdot x^9+\frac{2^8\cdot41\cdot{}_{11}C_4}{5\cdot7\cdot11\cdot19}\cdot\gamma^4\cdot x^7-\frac{2^7\cdot379\cdot{}_{11}C_6}{11\cdot17\cdot19\cdot21}\cdot\gamma^6\cdot x^5\\&+\frac{2^3\cdot5\cdot37\cdot{}_{11}C_8}{11\cdot17\cdot19}\cdot\gamma^8\cdot x^3-\frac{2^2\cdot3\cdot1433\cdot{}_{11}C_{10}}{11\cdot13\cdot17\cdot19}\cdot\gamma^{10}\cdot x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}{}_0S_{12}(x)=&-\frac{2^{12}\cdot{}_{12}C_2}{23\cdot24}\cdot\gamma^2\cdot x^{10}+\frac{2^8\cdot15\cdot{}_{12}C_4}{7\cdot11\cdot23}\cdot\gamma^4\cdot x^8-\frac{2^6\cdot461\cdot{}_{12}C_6}{7\cdot11\cdot19\cdot23}\cdot\gamma^6\cdot x^6\\&+\frac{2^5\cdot41\cdot277\cdot{}_{12}C_8}{9\cdot11\cdot17\cdot19\cdot23}\cdot\gamma^8\cdot x^4-\frac{2\cdot15581\cdot{}_{12}C_{10}}{11\cdot17\cdot19\cdot\cdot23}\cdot\gamma^{10}\cdot x^2+\frac{7\cdot5513\cdot{}_{12}C_{12}}{13\cdot17\cdot19\cdot23}\cdot\gamma^{12}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}{}_0S_{13}(x)=&-\frac{2^{13}\cdot{}_{13}C_2}{25\cdot26}\cdot\gamma^2\cdot x^{11}+\frac{2^9\cdot49\cdot{}_{13}C_4}{13\cdot23\cdot25}\cdot\gamma^4\cdot x^9-\frac{2^8\cdot19\cdot29\cdot{}_{13}C_6}{5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot23}\cdot\gamma^6\cdot x^7\\&+\frac{2^6\cdot3\cdot17\cdot59\cdot{}_{13}C_8}{5\cdot11\cdot13\cdot19\cdot23}\cdot\gamma^8\cdot x^5-\frac{2^5\cdot69457\cdot{}_{13}C_{10}}{5\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\cdot23}\cdot\gamma^{10}\cdot x^3+\frac{2\cdot41\cdot11149\cdot{}_{13}C_{12}}{13\cdot17\cdot19\cdot23\cdot25}\cdot\gamma^{12}\cdot x\end{aligned}$$

${}_0Q_N(x)$ の微分方程式を利用して、${}_0S_N(x)$ とチェビシェフ多項式基本型との関係を求める。

$$(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_0Q_N(x)'' -\frac{2x}{\gamma^2}\cdot {}_0Q_N(x)' +\frac{N(N+1)}{\gamma^2}\cdot {}_0Q_N(x)$$

$$=\frac{x}{\gamma^2}\cdot {}_0U_N(x)'-\frac{N}{\gamma^2}\cdot {}_0U_N(x)+(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_0S_N(x)'' -\frac{2x}{\gamma^2}\cdot {}_0S_N(x)'+\frac{N(N+1)}{\gamma^2}\cdot {}_0S_N(x)=0$$

上の式の最初の部分 $\frac{x}{\gamma^2}\cdot {}_0U_N(x)'-\frac{N}{\gamma^2}\cdot {}_0U_N(x)$ はすでに述べたように ${}_0U_{N-1}(x)'$ となり、

結局 $(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_0S_N(x)'' -\frac{2x}{\gamma^2}\cdot {}_0S_N(x)'+\frac{N(N+1)}{\gamma^2}\cdot {}_0S_N(x)=-\ {}_0U_{N-1}(x)'$ が得られる。

6. ルジャンドル多項式基本型とチェビシェフ多項式基本型との関係

6. 1　第一種および第二種の基本型補助項間の関係

第一種のチェビシェフ多項式基本型 ${}_0T_N(x)$ から誘導される、第一種のルジャンドル多項式基本型の微分方程式の解 ${}_0P_N(x)$ と、第二のチェビシェフ多項式基本型 ${}_0U_N(x)$ から誘導される第二種のルジャンドル多項式基本型の微分方程式の解 ${}_0Q_N(x)$ とは、 $2\cdot {}_0P_N(x)={}_0Q_N(x)$ の関係があることが判明した。また第一種の基本型補助項 ${}_0R_N(x)$ を ${}_0P_N(x)={}_0T_N(x)+{}_0R_N(x)$、第二種の基本型補助項 ${}_0S_N(x)$ を ${}_0Q_N(x)={}_0U_N(x)+{}_0S_N(x)$ と定義して、これらの関数をルジャンドル多項式基本型の微分方程式に代入したときの関係式も検討した。ここでは ${}_0R_N(x)$ と ${}_0S_N(x)$ との関係を求める。まず次式が得られる。

$$2\cdot {}_0R_N(x)-{}_0S_N(x)={}_0U_N(x)-2\cdot {}_0T_N(x)=\gamma^2\cdot {}_0U_{N-2}(x)$$

すでに ${}_0R_N(x)$ と ${}_0S_N(x)$ は誘導されているので、それらの関数を利用して次式が得られる。

$$2\cdot {}_0R_N(x)-{}_0S_N(x)$$
$$=2^N\cdot\sum_{k=1}[(-1)^k\cdot {}_NC_{2k}\cdot\{\prod_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{2N-2j+2})-\prod_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{2N-2j})\}\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-2k}]$$

この式が $\gamma^2\cdot {}_0U_{N-2}(x)$ に等しくなることを、直接検討する。まず $k=1$ のとき、

$$2\cdot {}_0R_N(x)-{}_0S_N(x)=2^N\cdot(-1)\cdot {}_NC_2\cdot(\frac{1}{2N}-\frac{1}{2N-2})\cdot\gamma^2\cdot x^{N-2}$$

$$= 2^N \cdot \frac{N(N-1)}{2} \cdot \frac{2}{2N(2N-2)} \cdot \gamma^2 \cdot x^{N-2} = 2^{N-2} \cdot \gamma^2 \cdot x^{N-2}$$

$k = 2$ 以上のときの [ ] の中を計算する。

$$2 \cdot {}_0R_N(x) - {}_0S_N(x)$$
$$= 2^N \cdot \sum_{k=2} [(-1)^k \cdot \frac{N(N-1)(N-2)\cdot\cdot(N-2k+1)}{(2k)!} \cdot \frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdot(2k-1)(-2k)}{2N(2N-2)(2N-4)\cdot\cdot(2N-2k)} \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k}]$$
$$= 2^N \cdot \sum_{k=2} [(-1)^{k-1} \cdot \frac{N(N-1)(N-2)\cdot\cdot(N-2k+1)}{(2k-2)!\cdot(2k-1)(2k)} \cdot \frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdot(2k-1)(2k)}{2^2 N(N-1)(2N-4)\cdot\cdot(2N-2k)} \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k}]$$
$$= 2^{N-2} \cdot \sum_{k=2} [(-1)^{k-1} \cdot \frac{(N-2)\cdot\cdot\{N-2-2(k-1)+1)\}}{(2k-2)!} \cdot \frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdot\{2(k-1)-1)\}}{(2N-2-2)\cdot\cdot\{2N-2(k-1)-2\}} \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k}]$$
$$= 2^{N-2} \cdot \gamma^2 \cdot \sum_{k=2} \{(-1)^{k-1} \cdot {}_{N-2}C_{2(k-1)} \cdot \prod_{j=1}^{k-1} (\frac{2j-1}{2N-2j-2}) \cdot \gamma^{2(k-1)} \cdot x^{N-2-2(k-1)}\}$$
$$= 2^{N-2} \cdot \gamma^2 \cdot \sum_{l=1} \{(-1)^l \cdot {}_{N-2}C_{2l} \cdot \prod_{j=1}^{l} (\frac{2j-1}{2N-2j-2}) \cdot \gamma^{2l} \cdot x^{N-2-2l}\}$$

ただし最後の式の導入のために $l = k-1$ とおいた。結局 $2 \cdot {}_0R_N(x) - {}_0S_N(x)$ は

$$2 \cdot {}_0R_N(x) - {}_0S_N(x)$$
$$= \gamma^2 \cdot 2^{N-2} \cdot x^{N-2} + \gamma^2 \cdot 2^{N-2} \cdot \sum_{l=1} \{(-1)^l \cdot {}_{N-2}C_{2l} \cdot \prod_{j=1}^{l} (\frac{2j-1}{2N-2j-2}) \cdot \gamma^{2l} \cdot x^{N-2-2l}\}$$
$$= \gamma^2 \cdot 2^{N-2} \cdot [x^{N-2} + \sum_{l=1} \{(-1)^l \cdot {}_{N-2}C_{2l} \cdot \prod_{j=1}^{l} (\frac{2j-1}{2N-2j-2}) \cdot \gamma^{2l} \cdot x^{N-2-2l}\}]$$

となり、 $2 \cdot {}_0R_N(x) - {}_0S_N(x)$ は、次の ${}_0U_N(x)$

$${}_0U_N(x) = 2^N \cdot [x^N + \sum_{k=1} \{(-1)^k \cdot {}_N C_{2k} \cdot \prod_{j=1}^{k} (\frac{2j-1}{2N-2j+2}) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k}\}]$$

の N に $N-2$ を代入した次式と γ^2 との積となる。

$${}_0U_{N-2}(x) = 2^{N-2} \cdot [x^{N-2} + \sum_{k=1} \{(-1)^k \cdot {}_{N-2}C_{2k} \cdot \prod_{j=1}^{k} (\frac{2j-1}{2N-2j-2}) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2-2k}\}]$$

6. 2　基本型補助項を利用するチェビシェフ多項式基本型の漸化式

チェビシェフ多項式基本型間の漸化式はすでに述べたが、ここでは $2\cdot {}_0R_N(x) - {}_0S_N(x)$ を利用して別のチェビシェフ多項式基本型間の漸化式を求める。まず次の二式から出発する。

$$\begin{cases} (1-\dfrac{x^2}{\gamma^2})\cdot 2\cdot {}_0R_N(x)'' - \dfrac{2x}{\gamma^2}\cdot 2\cdot {}_0R_N(x)' + \dfrac{N(N+1)}{\gamma^2}\cdot 2\cdot {}_0R_N(x) = 2\cdot N\cdot {}_0U_{N-2}(x) \\ (1-\dfrac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_0S_N(x)'' - \dfrac{2x}{\gamma^2}\cdot {}_0S_N(x)' + \dfrac{N(N+1)}{\gamma^2}\cdot {}_0S_N(x) = -{}_0U_{N-1}(x)' \end{cases}$$

上の式から下の式を引いて次式が得られる。

$$(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot\{\gamma^2\cdot {}_0U_{N-2}(x)''\} - \frac{2x}{\gamma^2}\cdot\{\gamma^2\cdot {}_0U_{N-2}(x)'\} + \frac{N(N+1)}{\gamma^2}\cdot\{\gamma^2\cdot {}_0U_{N-2}(x)\}$$
$$= 2\cdot N\cdot {}_0U_{N-2}(x) + {}_0U_{N-1}(x)'$$

この結果を利用して次式が得られる。

$$(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot\{\gamma^2\cdot {}_0U_{N-2}(x)''\} - \frac{3x}{\gamma^2}\cdot\{\gamma^2\cdot {}_0U_{N-2}(x)'\} + \frac{(N-2)N}{\gamma^2}\cdot\{\gamma^2\cdot {}_0U_{N-2}(x)\}$$
$$= 2\cdot N\cdot {}_0U_{N-2}(x) + {}_0U_{N-1}(x)' - \frac{x}{\gamma^2}\cdot\{\gamma^2\cdot {}_0U_{N-2}(x)'\} - \frac{3N}{\gamma^2}\cdot\{\gamma^2\cdot {}_0U_{N-2}(x)\}$$
$$= -N\cdot {}_0U_{N-2}(x) + {}_0U_{N-1}(x)' - x\cdot {}_0U_{N-2}(x)' = 0$$

ここから　${}_0U_{N-1}(x)' = N\cdot {}_0U_{N-2}(x) + x\cdot {}_0U_{N-2}(x)'$　が得られる。

すでに　${}_0U_{N-1}(x)' = \dfrac{x}{\gamma^2}\cdot {}_0U_N(x)' - \dfrac{N}{\gamma^2}\cdot {}_0U_N(x)$　が得られているので、

$\dfrac{x}{\gamma^2}\cdot {}_0U_N(x)' - \dfrac{N}{\gamma^2}\cdot {}_0U_N(x) = N\cdot {}_0U_{N-2}(x) + x\cdot {}_0U_{N-2}(x)'$ となり、整理して次式が得られる。

$$x\cdot {}_0U_N(x)' - N\cdot {}_0U_N(x) = \gamma^2\cdot\{x\cdot {}_0U_{N-2}(x)' + N\cdot {}_0U_{N-2}(x)\}$$

6. 3　第一種および第二種の基本型補助項の微分式の関係

第一種の基本型補助項 ${}_0R_N(x)$ は第二種のチェビシェフ多項式基本型 ${}_0U_{N-2}(x)$ との間に

$$(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_0R_N(x)'' - \frac{2x}{\gamma^2}\cdot {}_0R_N(x)' + \frac{N(N+1)}{\gamma^2}\cdot {}_0R_N(x) = N\cdot {}_0U_{N-2}(x)$$ なる関係が成立する

ことはすでに述べた。ところが $2\cdot {}_0R_N(x) - {}_0S_N(x) = \gamma^2\cdot {}_0U_{N-2}(x)$ なので、この式を上の式に

代入し、整理して次式が得られる。

$$(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_0R_N(x)'' -\frac{2x}{\gamma^2}\cdot {}_0R_N(x)'+\frac{N(N-1)}{\gamma^2}\cdot {}_0R_N(x)=-\frac{N}{\gamma^2}\cdot {}_0S_N(x)$$

また第二種の基本型補助項 ${}_0S_N(x)$ は第二種のチェビシェフ多項式基本型の一回微分 ${}_0U_{N-1}(x)'$

との間に、 $(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_0S_N(x)'' -\frac{2x}{\gamma^2}\cdot {}_0S_N(x)' +\frac{N(N+1)}{\gamma^2}\cdot {}_0S_N(x)=-{}_0U_{N-1}(x)'$

なる関係が成立することはすでに述べた。ところが ${}_0U_{N-1}(x)'=N\cdot {}_0U_{N-2}(x)+x\cdot {}_0U_{N-2}(x)'$ から

${}_0U_{N-1}(x)'=N\cdot\frac{2\cdot {}_0R_N(x)-{}_0S_N(x)}{\gamma^2}+x\cdot\frac{2\cdot {}_0R_N(x)'-{}_0S_N(x)'}{\gamma^2}$ が得られ、ここから

$$(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_0S_N(x)'' -\frac{3x}{\gamma^2}\cdot {}_0S_N(x)' +\frac{N^2}{\gamma^2}\cdot {}_0S_N(x)=-\frac{2}{\gamma^2}\cdot\{x\cdot {}_0R_N(x)'+N\cdot {}_0R_N(x)\}$$

が得られる。この ${}_0R_N(x)$ の微分式と ${}_0S_N(x)$ の微分式の差をとって整理すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned}&(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_0R_N(x)'' -\frac{4x}{\gamma^2}\cdot {}_0R_N(x)'+\frac{N(N-3)}{\gamma^2}\cdot {}_0R_N(x)\\ =\ &(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_0S_N(x)'' -\frac{3x}{\gamma^2}\cdot {}_0S_N(x)'+\frac{N(N-1)}{\gamma^2}\cdot {}_0S_N(x)\end{aligned}$$

7. ルジャンドル多項式基本型の性質

7. 1 第一種および第二種のルジャンドル多項式基本型の統合

第一種のルジャンドル多項式基本型 ${}_0P_N(x)$ と第二種のルジャンドル多項式基本型 ${}_0Q_N(x)$ は、

$2\cdot {}_0P_N(x)={}_0Q_N(x)$ となっているので、統一してルジャンドル多項式基本型 ${}_0Le_N(x)$ とする。

$${}_0Le_N(x)=\frac{(2N)\,!}{2^N\cdot(N!)^2}\cdot[\,x^N+\sum_{k=1}\{(-1)^k\cdot {}_NC_{2k}\cdot\prod_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{2N-2j+1})\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-2k}\}]$$

ルジャンドル多項式基本型 ${}_0Le_N(x)$ の係数を $\varGamma(N)=\frac{(2N)\,!}{2^N\cdot(N!)^2}$ とおくと、

$\varGamma(N)=\frac{2N-1}{N}\cdot\varGamma(N-1)$ で $\varGamma(1)=1$ から、$\varGamma(N)=\prod_{j=1}^{N}(\frac{2j-1}{j})$ となり，${}_0Le_N(x)$ は

$${}_0Le_N(x)=\prod_{j=1}^{N}(\frac{2j-1}{j})\cdot[\,x^N+\sum_{k=1}\{(-1)^k\cdot{}_NC_{2k}\cdot\prod_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{2N-2j+1})\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-2k}\}]$$ で表される。

ただし後に述べる、ルジャンドル陪多項式基本型 ${}_0Le_N(x)^{(m)}$ と同じ形式にするために次のように書く。

$${}_0Le_N(x)=\frac{{}_{2N}P_N}{2^N}\cdot\frac{1}{N!}\cdot[\,x^N+\sum_{k=1}\{(-1)^k\cdot{}_NC_{2k}\cdot\prod_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{2N-2j+1})\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-2k}\}]$$

ここに ${}_{2N}P_N$ は順列の記号で ${}_{2N}P_N=\dfrac{(2N)\,!}{(2N-N)\,!}=\dfrac{(2N)\,!}{(N)\,!}$ となり、${}_{2N}P_0=1$ である。

第一種のルジャンドル多項式基本型 ${}_0P_N(x)$ 、第二種のルジャンドル多項式基本型 ${}_0Q_N(x)$、

およびこれらの関数を統一したルジャンドル多項式基本型 ${}_0Le_N(x)$ との間の関係は次式となる。

$$\begin{aligned}{}_0Le_N(x)&=\frac{(2N)\,!}{2^N\cdot(N\,!)^2}\cdot\frac{{}_0P_N(x)}{2^{N-1}}=\frac{(2N)\,!}{2^N\cdot(N\,!)^2}\cdot\frac{{}_0Q_N(x)}{2^N}\\&=\prod_{j=1}^{N}(\frac{2j-1}{j})\cdot\frac{{}_0P_N(x)}{2^{N-1}}=\prod_{j=1}^{N}(\frac{2j-1}{j})\cdot\frac{{}_0Q_N(x)}{2^N}\end{aligned}$$

この微分方程式 $(1-\dfrac{x^2}{\gamma^2})\cdot{}_0Le_N(x)''-\dfrac{2x}{\gamma^2}\cdot{}_0Le_N(x)'+\dfrac{N(N+1)}{\gamma^2}\cdot{}_0Le_N(x)=0$ と

その解 ${}_0Le_N(x)$ は $\gamma^2=-1$ でも成立する。

7．2　ルジャンドル多項式基本型の漸化式

ルジャンドル多項式基本型、例えば ${}_0Le_{N-1}(x)$, ${}_0Le_N(x)$, ${}_0Le_{N+1}(x)$ の間の漸化式を求める。

$$\begin{cases}{}_0Le_{N-1}(x)=\Gamma(N-1)\cdot[\,x^{N-1}+\sum_{k=1}\{(-1)^k\cdot{}_{N-1}C_{2k}\cdot\prod_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{2N-2j-1})\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-1-2k}\}\,]\\{}_0Le_N(x)=\Gamma(N)\cdot[\,x^N+\sum_{k=1}\{(-1)^k\cdot{}_NC_{2k}\cdot\prod_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{2N-2j+1})\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-2k}\}\,]\\{}_0Le_{N+1}(x)=\Gamma(N+1)\cdot[\,x^{N+1}+\sum_{k=1}\{(-1)^k\cdot{}_{N+1}C_{2k}\cdot\prod_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{2N-2j+3})\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N+1-2k}\}\,]\end{cases}$$

まず上の ${}_0Le_{N-1}(x)$ ， ${}_0Le_N(x)$ ， ${}_0Le_{N+1}(x)$ の間に、

${}_0Le_{N+1}(x)-\alpha(N)\cdot x\cdot {}_0Le_N(x)+\beta(N)\cdot {}_0Le_{N-1}(x)=0$ なる関係があると仮定する。

最初に ${}_0Le_{N+1}(x)-\alpha(N)\cdot x\cdot {}_0Le_N(x)$ の x^{N+1} の項が 0 となることから、

$\dfrac{2N+1}{N+1}-\alpha(N)=0$ となり、$\alpha(N)=\dfrac{2N+1}{N+1}$ となる。次に x^{N-1} の項を考慮して、

$-\dfrac{1}{2}\cdot\gamma^2+\dfrac{(2N+1)(N-1)}{2(N+1)(2N-1)}\cdot\gamma^2+\dfrac{\beta(N)}{2N-1}=0$ から $\beta(N)=\dfrac{N}{N+1}\cdot\gamma^2$ となり、 結局漸化式は

$$(N+1)\cdot {}_0Le_{N+1}(x)-(2N+1)\,x\cdot {}_0Le_N(x)+N\cdot\gamma^2\cdot {}_0Le_{N-1}(x)=0$$ となる。

この結果を確認するために、漸化式の $\gamma^{2l}\cdot x^{N+1-2l}$ の項を計算する。

まず $(N+1)\cdot {}_0Le_{N+1}(x)-(2N+1)\,x\cdot {}_0Le_N(x)$ の $\gamma^{2l}\cdot x^{N+1-2l}$ の項は次のようになり、

$$\begin{aligned}
&(-1)^l\cdot(N+1)\cdot\Gamma(N+1)\cdot {}_{N+1}C_{2l}\cdot\prod_{j=1}^{l}\left(\frac{2j-1}{2N-2j+3}\right)\cdot\gamma^{2l}\cdot x^{N+1-2l}\\
&-(-1)^l\cdot(2N+1)\,x\cdot\Gamma(N)\cdot {}_NC_{2l}\cdot\prod_{j=1}^{l}\left(\frac{2j-1}{2N-2j+1}\right)\cdot\gamma^{2l}\cdot x^{N-2l}\\
&=(-1)^l\cdot\left(\frac{2\,l\,N}{N+1-2l}\right)\cdot\Gamma(N)\cdot {}_NC_{2l}\cdot\prod_{j=1}^{l}\left(\frac{2j-1}{2N-2j+1}\right)\cdot\gamma^{2l}\cdot x^{N+1-2l}
\end{aligned}$$

$N\cdot\gamma^2\cdot {}_0Le_{N-1}(x)$ の $\gamma^{2l}\cdot x^{N+1-2l}$ の項は次のようになるので、漸化式は成立している。

$$(-1)^{l-1}\cdot N\cdot\gamma^2\cdot\Gamma(N-1)\cdot {}_{N-1}C_{2l-2}\cdot\prod_{j=1}^{l-1}\left(\frac{2j-1}{2N-2j-1}\right)\cdot\gamma^{2l-2}\cdot x^{N+1-2l}$$

7．3　ルジャンドル陪多項式基本型

ルジャンドル多項式基本型 ${}_0Le_N(x)$ を m 回微分した関数 ${}_0Le_N(x)^{(m)}$ を $N-m$ 次の

ルジャンドル陪多項式基本型とよぶ。一般に ${}_0Le_N(x)^{(m)}$ は次式で表される。

$${}_0Le_N(x)^{(m)}=\frac{{}_{2N}P_N}{2^N}\cdot\frac{1}{(N-m)!}\cdot\left[\,x^{N-m}+\sum_{k=1}\left\{(-1)^k\cdot {}_{N-m}C_{2k}\cdot\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{2j-1}{2N-2j+1}\right)\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-2k-m}\right\}\right]$$

この ${}_0Le_N(x)^{(m)}$ を利用して様々な m の値のときの関数を容易に求めることができる。

例えば　$k=1$，$m=N-1$　を代入すると、${}_0Le_N(x)^{(N-1)} = \frac{{}_{2N}P_N}{2^N}\cdot\frac{1}{1!}\cdot x$　が得られ,

さらに　$k=1$，$m=N-2$　を代入すると、${}_0Le_N(x)^{(N-2)} = \frac{{}_{2N}P_N}{2^N}\cdot\frac{1}{2!}\cdot(x^2-\frac{{}_2C_2}{2N-1}\cdot\gamma^2)$

が得られる。同様に順次得られるルジャンドル陪多項式基本型をまとめて下に示す。

$${}_0Le_N(x)^{(N-1)} = \frac{{}_{2N}P_N}{2^N}\cdot\frac{1}{1!}\cdot x$$

$${}_0Le_N(x)^{(N-2)} = \frac{{}_{2N}P_N}{2^N}\cdot\frac{1}{2!}\cdot(x^2-\frac{{}_2C_2}{2N-1}\cdot\gamma^2)$$

$${}_0Le_N(x)^{(N-3)} = \frac{{}_{2N}P_N}{2^N}\cdot\frac{1}{3!}\cdot(x^3-\frac{{}_3C_2}{2N-1}\cdot\gamma^2\cdot x)$$

$${}_0Le_N(x)^{(N-4)} = \frac{{}_{2N}P_N}{2^N}\cdot\frac{1}{4!}\cdot\{x^4-\frac{{}_4C_2}{2N-1}\cdot\gamma^2\cdot x^2+\frac{3\cdot{}_4C_4}{(2N-1)(2N-3)}\cdot\gamma^4\}$$

$${}_0Le_N(x)^{(N-5)} = \frac{{}_{2N}P_N}{2^N}\cdot\frac{1}{5!}\cdot\{x^5-\frac{{}_5C_2}{2N-1}\cdot\gamma^2\cdot x^3+\frac{3\cdot{}_5C_4}{(2N-1)(2N-3)}\cdot\gamma^4\cdot x\}$$

$${}_0Le_N(x)^{(N-6)} = \frac{{}_{2N}P_N}{2^N}\cdot\frac{1}{6!}\cdot\{x^6-\frac{{}_6C_2}{2N-1}\cdot\gamma^2\cdot x^4+\frac{3\cdot{}_6C_4}{(2N-1)(2N-3)}\cdot\gamma^4\cdot x^2 -\frac{3\cdot5\cdot{}_6C_6}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)}\cdot\gamma^6\}$$

$${}_0Le_N(x)^{(N-7)} = \frac{{}_{2N}P_N}{2^N}\cdot\frac{1}{7!}\cdot\{x^7-\frac{{}_7C_2}{2N-1}\cdot\gamma^2\cdot x^5+\frac{3\cdot{}_7C_4}{(2N-1)(2N-3)}\cdot\gamma^4\cdot x^3 -\frac{3\cdot5\cdot{}_7C_6}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)}\cdot\gamma^6\cdot x\}$$

$${}_0Le_N(x)^{(N-8)} = \frac{{}_{2N}P_N}{2^N}\cdot\frac{1}{8!}\cdot\{x^8-\frac{{}_8C_2}{2N-1}\cdot\gamma^2\cdot x^6+\frac{3\cdot{}_8C_4}{(2N-1)(2N-3)}\cdot\gamma^4\cdot x^4 -\frac{3\cdot5\cdot{}_8C_6}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)}\cdot\gamma^6\cdot x^2+\frac{3\cdot5\cdot7\cdot{}_8C_8}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)(2N-7)}\cdot\gamma^8\}$$

$${}_0Le_N(x)^{(N-9)} = \frac{{}_{2N}P_N}{2^N}\cdot\frac{1}{9!}\cdot\{x^9-\frac{{}_9C_2}{2N-1}\cdot\gamma^2\cdot x^7+\frac{3\cdot{}_9C_4}{(2N-1)(2N-3)}\cdot\gamma^4\cdot x^5 -\frac{3\cdot5\cdot{}_9C_6}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)}\cdot\gamma^6\cdot x^3+\frac{3\cdot5\cdot7\cdot{}_9C_8}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)(2N-7)}\cdot\gamma^8\cdot x\}$$

$${}_0Le_N(x)^{(N-10)} = \frac{{}_{2N}P_N}{2^N}\cdot\frac{1}{10!}\cdot\{x^{10}-\frac{{}_{10}C_2}{2N-1}\cdot\gamma^2\cdot x^8+\frac{3\cdot{}_{10}C_4}{(2N-1)(2N-3)}\cdot\gamma^4\cdot x^6$$

$$-\frac{3\cdot5\cdot{}_{10}C_6}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)}\cdot\gamma^6\cdot x^4+\frac{3\cdot5\cdot7\cdot{}_{10}C_8}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)(2N-7)}\cdot\gamma^8\cdot x^2$$
$$-\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot{}_{10}C_{10}}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)(2N-7)(2N-9)}\cdot\gamma^{10}\}$$

$$_0Le_N(x)^{(N-11)}=\frac{_{2N}P_N}{2^N}\cdot\frac{1}{11!}\cdot\{x^{11}-\frac{_{11}C_2}{2N-1}\cdot\gamma^2\cdot x^9+\frac{3\cdot{}_{11}C_4}{(2N-1)(2N-3)}\cdot\gamma^4\cdot x^7$$
$$-\frac{3\cdot5\cdot{}_{11}C_6}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)}\cdot\gamma^6\cdot x^5+\frac{3\cdot5\cdot7\cdot{}_{11}C_8}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)(2N-7)}\cdot\gamma^8\cdot x^3$$
$$-\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot{}_{11}C_{10}}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)(2N-7)(2N-9)}\cdot\gamma^{10}\cdot x\}$$

$$_0Le_N(x)^{(N-12)}=\frac{_{2N}P_N}{2^N}\cdot\frac{1}{12!}\cdot\{x^{12}-\frac{_{12}C_2}{2N-1}\cdot\gamma^2\cdot x^{10}+\frac{3\cdot{}_{12}C_4}{(2N-1)(2N-3)}\cdot\gamma^4\cdot x^8$$
$$-\frac{3\cdot5\cdot{}_{12}C_6}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)}\cdot\gamma^6\cdot x^6+\frac{3\cdot5\cdot7\cdot{}_{12}C_8}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)(2N-7)}\cdot\gamma^8\cdot x^4$$
$$-\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot{}_{12}C_{10}}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)(2N-7)(2N-9)}\cdot\gamma^{10}\cdot x^2$$
$$+\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot{}_{12}C_{12}}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)(2N-7)(2N-9)(2N-11)}\cdot\gamma^{12}\}$$

$$_0Le_N(x)^{(N-13)}=\frac{_{2N}P_N}{2^N}\cdot\frac{1}{13!}\cdot\{x^{13}-\frac{_{13}C_2}{2N-1}\cdot\gamma^2\cdot x^{11}+\frac{3\cdot{}_{13}C_4}{(2N-1)(2N-3)}\cdot\gamma^4\cdot x^9$$
$$-\frac{3\cdot5\cdot{}_{13}C_6}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)}\cdot\gamma^6\cdot x^7+\frac{3\cdot5\cdot7\cdot{}_{13}C_8}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)(2N-7)}\cdot\gamma^8\cdot x^5$$
$$-\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot{}_{13}C_{10}}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)(2N-7)(2N-9)}\cdot\gamma^{10}\cdot x^3$$
$$+\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot{}_{13}C_{12}}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)(2N-7)(2N-9)(2N-11)}\cdot\gamma^{12}\cdot x\}$$

例えば $_0Le_N(x)^{(N-9)}$ の N に $N=9$ を代入すると、 $_0Le_9(x)$ が得られ、

$$_0Le_9(x)=\frac{_{18}P_9}{2^9}\cdot\frac{1}{9!}\cdot(x^9-\frac{_9C_2}{17}\cdot\gamma^2\cdot x^7+\frac{_9C_4}{5\cdot17}\cdot\gamma^4\cdot x^5-\frac{_9C_6}{13\cdot17}\cdot\gamma^6\cdot x^3+\frac{7\cdot{}_9C_8}{11\cdot13\cdot17}\cdot\gamma^8\cdot x)$$

この式は $_0Le_N(x)$ の N に $N=9$ を代入した結果と同じである。

また $_0Le_N(x)^{(N-8)}$ の N に $N=9$ を代入すると、$_0Le_9(x)^{(1)}$ が得られ、

$${}_0Le_9(x)^{(1)} = \frac{{}_{18}P_9}{2^9}\cdot\frac{1}{8!}\cdot(x^8 - \frac{{}_8C_2}{17}\cdot\gamma^2\cdot x^6 + \frac{{}_8C_4}{5\cdot 17}\cdot\gamma^4\cdot x^4 - \frac{{}_8C_6}{13\cdot 17}\cdot\gamma^6\cdot x^2 + \frac{7\cdot{}_8C_8}{11\cdot 13\cdot 17}\cdot\gamma^8)$$

この式は ${}_0Le_N(x)^{(m)}$ に $N=9$, $m=1$ を代入した結果と同じである。

さらにルジャンドル陪多項式基本型の漸化式を求める。

$$\begin{cases} {}_0Le_{N-1}(x)^{(m)} = \prod_{j=1}^{N-1}(2j-1)\cdot[\frac{x^{N-1-m}}{(N-1-m)!} + \sum_{k=1}\{\frac{(-1)^k}{2^k\cdot k!}\cdot\frac{1}{\prod_{j=1}^{k}(2N-2j-1)}\cdot\frac{\gamma^{2k}\cdot x^{N-1-2k-m}}{(N-1-2k-m)!}\}] \\ {}_0Le_N(x)^{(m)} = \prod_{j=1}^{N}(2j-1)\cdot[\frac{x^{N-m}}{(N-m)!} + \sum_{k=1}\{\frac{(-1)^k}{2^k\cdot k!}\cdot\frac{1}{\prod_{j=1}^{k}(2N-2j+1)}\cdot\frac{\gamma^{2k}\cdot x^{N-2k-m}}{(N-2k-m)!}\}] \\ {}_0Le_{N+1}(x)^{(m)} = \prod_{j=1}^{N+1}(2j-1)\cdot[\frac{x^{N+1-m}}{(N+1-m)!} + \sum_{k=1}\{\frac{(-1)^k}{2^k\cdot k!}\cdot\frac{1}{\prod_{j=1}^{k}(2N-2j+3)}\cdot\frac{\gamma^{2k}\cdot x^{N+1-2k-m}}{(N+1-2k-m)!}\}] \end{cases}$$

これらのルジャンドル陪多項式基本型の間に

${}_0Le_{N+1}(x)^{(m)} - \alpha(N)\cdot x\cdot{}_0Le_N(x)^{(m)} + \beta(N)\cdot{}_0Le_{N-1}(x)^{(m)} = 0$ なる関係があると仮定する。

まず ${}_0Le_{N+1}(x)^{(m)} - \alpha(N)\,x\cdot{}_0Le_N(x)^{(m)}$ の x^{N+1-m} の項が 0 となることから、

$\frac{2N+1}{(N+1-m)!} - \frac{\alpha(N)}{(N-m)!} = 0$ となり、$\alpha(N) = \frac{2N+1}{N+1-m}$ となる。

次に x^{N-1-m} の項を考慮して、$-\frac{2N-1}{2(N-1-m)}\cdot\gamma^2 + \frac{2N+1}{2(N+1-m)}\cdot\gamma^2 + \frac{\beta(N)}{N-1-m} = 0$ から

$\beta(N) = \frac{N+m}{N+1-m}\cdot\gamma^2$ となり、結局漸化式は次式となるはずである。

$$(N+1-m)\cdot{}_0Le_{N+1}(x)^{(m)} - (2N+1)\,x\cdot{}_0Le_N(x)^{(m)} + (N+m)\cdot\gamma^2\cdot{}_0Le_{N-1}(x)^{(m)} = 0$$

確認すると $(N+1-m)\cdot{}_0Le_{N+1}(x)^{(m)} - (2N+1)\,x\cdot{}_0Le_N(x)^{(m)}$ の $\gamma^{2l}\cdot x^{N+1-2l-m}$ の項は

$$(N+1-m)\cdot\prod_{j=1}^{N+1}(2j-1)\cdot\frac{(-1)^l}{2^l\cdot l!}\cdot\frac{1}{\prod_{j=1}^{l}(2N-2j+3)}\cdot\frac{\gamma^{2l}\cdot x^{N+1-2l-m}}{(N+1-2l-m)!}$$

$$-(2N+1)\,x\cdot\prod_{j=1}^{N}(2j-1)\cdot\frac{(-1)^l}{2^l\cdot l\,!}\cdot\ \frac{1}{\prod_{j=1}^{l}(2N-2j+1)}\ \cdot\ \frac{\gamma^{2l}\cdot x^{N-2l-m}}{(N-2l-m)\,!}$$

$$=\frac{(-1)^l}{2^l\cdot l\,!}\cdot\frac{2l\,(N+m)}{(N+1-2l-m)\,!}\cdot\prod_{j=1}^{N}(2j-1)\cdot\frac{1}{\prod_{j=1}^{l}(2N-2j+1)}\cdot\gamma^{2l}\cdot x^{N+1-2l-m}$$

となり、$(N+m)\cdot\gamma^2\cdot{}_0Le_{N-1}(x)^{(m)}$ の　$\gamma^{2l}\cdot x^{N+1-2l-m}$　の項は

$$(N+m)\cdot\gamma^2\cdot\prod_{j=1}^{N-1}(2j-1)\cdot\frac{(-1)^{l-1}}{2^{l-1}\cdot(l-1)\,!}\cdot\frac{1}{\prod_{j=1}^{l-1}(2N-2j-1)}\cdot\frac{\gamma^{2l-2}\cdot\ x^{N+1-2l-m}}{(N+1-2l-m)\,!}$$

$$=-\frac{(-1)^l}{2^l\cdot l\,!}\cdot\frac{2l\,(N+m)}{(N+1-2l-m)\,!}\cdot\prod_{j=1}^{N}(2j-1)\cdot\frac{1}{\prod_{j=1}^{l}(2N-2j+1)}\cdot\gamma^{2l}\cdot x^{N+1-2l-m}$$

となるので、漸化式が一般的に成立することが解る。

一方、既に述べた　$(N+1)\cdot{}_0Le_{N+1}(x)-(2N+1)\,x\cdot{}_0Le_N(x)+N\cdot\gamma^2\cdot{}_0Le_{N-1}(x)=0$

から、ルジャンドル陪多項式基本型の漸化式は $m=0$ でも成立する。この式を m 回微分し、

$$(N+1)\cdot{}_0Le_{N+1}(x)^{(m)}-(2N+1)\,\{x\cdot{}_0Le_N(x)^{(m)}+m\cdot{}_0Le_N(x)^{(m-1)}\}+N\cdot\gamma^2\cdot{}_0Le_{N-1}(x)^{(m)}=0$$

を得、この式とすでに求めた漸化式、

$$(N+1-m)\cdot{}_0Le_{N+1}(x)^{(m)}-(2N+1)\,x\cdot{}_0Le_N(x)^{(m)}+(N+m)\cdot\gamma^2\cdot{}_0Le_{N-1}(x)^{(m)}=0$$

から別の漸化式を誘導することができる。

まず連立して　$${}_0Le_{N+1}(x)^{(m)}-\gamma^2\cdot{}_0Le_{N-1}(x)^{(m)}=(2N+1)\cdot{}_0Le_N(x)^{(m-1)}$$

${}_0Le_{N-1}(x)^{(m)}$ を消去して、　$${}_0Le_{N+1}(x)^{(m)}-x\cdot{}_0Le_N(x)^{(m)}=(N+m)\cdot{}_0Le_N(x)^{(m-1)}$$

${}_0Le_{N+1}(x)^{(m)}$ を消去して、　$$x\cdot{}_0Le_N(x)^{(m)}-\gamma^2\cdot{}_0Le_{N-1}(x)^{(m)}=(N+1-m)\cdot{}_0Le_N(x)^{(m-1)}$$

これらの漸化式は　$m=1$　および　$\gamma^2=-1$　でも成立する。

7. 4　ルジャンドル同伴関数基本型

ルジャンドル多項式基本型 ${}_0Le_N(x)$ の微分方程式、

$$(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_0Le_N(x)'' - \frac{2x}{\gamma^2}\cdot {}_0Le_N(x)' + \frac{N(N+1)}{\gamma^2}\cdot {}_0Le_N(x)=0$$

に γ^2 をかけると次式が得られる。

$$(\gamma^2-x^2)\cdot {}_0Le_N(x)'' - 2x\cdot {}_0Le_N(x)' + N(N+1)\cdot {}_0Le_N(x)=0$$

この微分方程式を一回微分すると次式が得られ、

$$(\gamma^2-x^2)\cdot {}_0Le_N(x)^{(3)} - 4x\cdot {}_0Le_N(x)^{(2)} + \{N(N+1)-2\}\cdot {}_0Le_N(x)^{(1)}=0$$

さらにもう一回微分すると次式が得られ、

$$(\gamma^2-x^2)\cdot {}_0Le_N(x)^{(4)} - 6x\cdot {}_0Le_N(x)^{(3)} + \{N(N+1)-6\}\cdot {}_0Le_N(x)^{(2)}=0$$

結局 m 回微分すると次式が得られ、

$$\begin{aligned}(\gamma^2-x^2)\cdot {}_0Le_N(x)^{(m+2)} &- 2(m+1)x\cdot {}_0Le_N(x)^{(m+1)}\\ &+\{N(N+1)-m(m+1)\}\cdot {}_0Le_N(x)^{(m)}=0\end{aligned}$$

この式を γ^2 で割って次の ${}_0L_N(x)^{(m)}$ の微分方程式が得られる。

$$(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_0Le_N(x)^{(m+2)} - \frac{2(m+1)}{\gamma^2}\cdot x\cdot {}_0Le_N(x)^{(m+1)} + \frac{N(N+1)-m(m+1)}{\gamma^2}\cdot {}_0Le_N(x)^{(m)}=0$$

この ${}_0L_N(x)^{(m)}$ を ${}_0L_N(x)^{(m)}=(\gamma^2-x^2)^{-\frac{m}{2}}\cdot {}_0y_N^m(x)$ とおいて一階微分および二階微分をとる。

$$\begin{cases} {}_0Le_N(x)^{(m+1)} = (\gamma^2-x^2)^{-\frac{m}{2}}\cdot {}_0y_N^m(x)' + mx\,(\gamma^2-x^2)^{-\frac{m}{2}-1}\cdot {}_0y_N^m(x) \\ {}_0Le_N(x)^{(m+2)} = (\gamma^2-x^2)^{-\frac{m}{2}}\cdot {}_0y_N^m(x)'' + 2mx\,(\gamma^2-x^2)^{-\frac{m}{2}-1}\cdot {}_0y_N^m(x)' \\ \qquad + m(\gamma^2-x^2)^{-\frac{m}{2}-2}\cdot\{\gamma^2+(m+1)x^2\}\cdot {}_0y_N^m(x) \end{cases}$$

これらの値を ${}_0L_N(x)^{(m)}$ の元の微分方程式に代入して次式が得られる。

$$(\gamma^2 - x^2)\cdot {}_0y_N^m(x)'' - 2x\cdot {}_0y_N^m(x)' + \{N(N+1) - \frac{m^2\gamma^2}{\gamma^2 - x^2}\}\cdot {}_0y_N^m(x) = 0$$

この式を γ^2 で割り、整理して次式を得る。

$$(1 - \frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_0y_N^m(x)'' - \frac{2x}{\gamma^2}\cdot {}_0y_N^m(x)' + \{\frac{N(N+1)}{\gamma^2} - \frac{m^2}{\gamma^2 - x^2}\}\cdot {}_0y_N^m(x) = 0$$

上の式の γ^2 を 1 とおいた場合の解は、物理学で非常によく使用され、ルジャンドル同伴関数と呼ばれている。そこで上の微分方程式の解 ${}_0y_N^m(x)$ をルジャンドル同伴関数基本型と呼ぶ。

$${}_0y_N^m(x) = (\gamma^2 - x^2)^{\frac{m}{2}}\cdot {}_0Le_N(x)^{(m)}$$

7．5　ルジャンドル同伴関数基本型の漸化式

ルジャンドル同伴関数基本型 ${}_0y_N^m(x)$ の漸化式を求めるために、すでに述べた

$$\begin{aligned}(\gamma^2 - x^2)\cdot {}_0Le_N(x)^{(m+2)} - 2(m+1)\,x\cdot {}_0Le_N(x)^{(m+1)}\\ + \{N(N+1) - m(m+1)\}\cdot {}_0Le_N(x)^{(m)} = 0\end{aligned}$$

に、例えば ${}_0Le_{\boldsymbol{N}}(x)^{(m)}$ に $(\gamma^2 - x^2)^{\frac{m}{2}}$ をかけ整理すると、次式が得られる。

$${}_0y_N^{m+2}(x) - 2\,(m+1)\,x\cdot(\gamma^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot {}_0y_N^{m+1}(x) + \{N(N+1) - m\,(m+1)\}\cdot {}_0y_N^m(x) = 0$$

あるいはこの式の $m+1$ を m で書き直して次式を得る。

$${}_0y_N^{m+1}(x) - 2mx\cdot(\gamma^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot {}_0y_N^m(x) + \{N(N+1) - m\,(m-1)\}\cdot {}_0y_N^{m-1}(x) = 0$$

また m が同じ漸化式も、すでに述べた、

$$(N+1-m)\cdot {}_0Le_{N+1}(x)^{(m)} - (2N+1)\,x\cdot {}_0Le_N(x)^{(m)} + (N+m)\cdot\gamma^2\cdot {}_0Le_{N-1}(x)^{(m)} = 0$$

に $(\gamma^2 - x^2)^{\frac{m}{2}}$ かけて整理すると、次式が得られる。

$$(N+1-m)\cdot {}_0y^{m}_{N+1} - (2N+1)\,x\cdot {}_0y^{m}_{N} + (N+m)\cdot\gamma^2\cdot {}_0y^{m}_{N-1} = 0$$

以上のようにルジャンドル多項式基本型の様々な関数の性質が明らかとなった。

$N=2$ から $N=13$ までの関数 ${}_0Le_N(x)$ と ${}_0Le_N(x)^{(m)}$ を下にまとめる。

ただし ${}_0Le_0(x)=1$，${}_0Le_1(x)=x$ である。

$${}_0Le_2(x) = \frac{{}_4P_2}{2^2}\cdot\frac{1}{2!}\cdot\left(x^2-\frac{{}_2C_2}{3}\cdot\gamma^2\right)\ ,\quad {}_0Le_2(x)^{(1)} = \frac{{}_4P_2}{2^2}\cdot\frac{1}{1!}\cdot x\ ,\quad {}_0Le_2(x)^{(2)} = \frac{{}_4P_2}{2^2}\cdot\frac{1}{0!}$$

$${}_0Le_3(x) = \frac{{}_6P_3}{2^3}\cdot\frac{1}{3!}\cdot\left(x^3-\frac{{}_3C_2}{5}\cdot\gamma^2\cdot x\right)$$

$${}_0Le_3(x)^{(1)} = \frac{{}_6P_3}{2^3}\cdot\frac{1}{2!}\cdot\left(x^2-\frac{{}_2C_2}{5}\cdot\gamma^2\right)\ ,\quad {}_0Le_3(x)^{(2)} = \frac{{}_6P_3}{2^3}\cdot\frac{1}{1!}\cdot x\ ,\quad {}_0Le_3(x)^{(3)} = \frac{{}_6P_3}{2^3}\cdot\frac{1}{0!}$$

$${}_0Le_4(x) = \frac{{}_8P_4}{2^4}\cdot\frac{1}{4!}\cdot\left(x^4-\frac{{}_4C_2}{7}\cdot\gamma^2\cdot x^2+\frac{3\cdot{}_4C_4}{5\cdot 7}\cdot\gamma^4\right)$$

$${}_0Le_4(x)^{(1)} = \frac{{}_8P_4}{2^4}\cdot\frac{1}{3!}\cdot\left(x^3-\frac{{}_3C_2}{7}\cdot\gamma^2\cdot x\right)$$

$${}_0Le_4(x)^{(2)} = \frac{{}_8P_4}{2^4}\cdot\frac{1}{2!}\cdot\left(x^2-\frac{{}_2C_2}{7}\cdot\gamma^2\right)\ ,\quad {}_0Le_4(x)^{(3)} = \frac{{}_8P_4}{2^4}\cdot\frac{1}{1!}\cdot x\ ,\quad {}_0Le_4(x)^{(4)} = \frac{{}_8P_4}{2^4}\cdot\frac{1}{0!}$$

$${}_0Le_5(x) = \frac{{}_{10}P_5}{2^5}\cdot\frac{1}{5!}\cdot\left(x^5-\frac{{}_5C_2}{9}\cdot\gamma^2\cdot x^3+\frac{{}_5C_4}{3.7}\cdot\gamma^4\cdot x\right)$$

$${}_0Le_5(x)^{(1)} = \frac{{}_{10}P_5}{2^5}\cdot\frac{1}{4!}\cdot\left(x^4-\frac{{}_4C_2}{9}\cdot\gamma^2\cdot x^2+\frac{{}_4C_4}{3.7}\cdot\gamma^4\right)\ ,\quad {}_0Le_5(x)^{(2)} = \frac{{}_{10}P_5}{2^5}\cdot\frac{1}{3!}\cdot\left(x^3-\frac{{}_3C_2}{9}\cdot\gamma^2\cdot x\right)$$

$${}_0Le_5(x)^{(3)} = \frac{{}_{10}P_5}{2^5}\cdot\frac{1}{2!}\cdot\left(x^2-\frac{{}_2C_2}{9}\cdot\gamma^2\right)\ ,\quad {}_0Le_5(x)^{(4)} = \frac{{}_{10}P_5}{2^5}\cdot\frac{1}{1!}\cdot x\ ,\quad {}_0Le_5(x)^{(5)} = \frac{{}_{10}P_5}{2^5}\cdot\frac{1}{0!}$$

$${}_0Le_6(x) = \frac{{}_{12}P_6}{2^6}\cdot\frac{1}{6!}\cdot\left(x^6-\frac{{}_6C_2}{11}\cdot\gamma^2\cdot x^4+\frac{{}_6C_4}{3\cdot 11}\cdot\gamma^4\cdot x^2-\frac{5\cdot{}_6C_6}{3\cdot 7\cdot 11}\cdot\gamma^6\right)$$

$${}_0Le_6(x)^{(1)} = \frac{{}_{12}P_6}{2^6}\cdot\frac{1}{5!}\cdot\left(x^5-\frac{{}_5C_2}{11}\cdot\gamma^2\cdot x^3+\frac{{}_5C_4}{3\cdot 11}\cdot\gamma^4\cdot x\right)$$

$${}_0Le_6(x)^{(2)} = \frac{{}_{12}P_6}{2^6}\cdot\frac{1}{4!}\cdot\left(x^4-\frac{{}_4C_2}{11}\cdot\gamma^2\cdot x^2+\frac{{}_4C_4}{3\cdot 11}\cdot\gamma^4\right)\ ,\quad {}_0Le_6(x)^{(3)} = \frac{{}_{12}P_6}{2^6}\cdot\frac{1}{3!}\cdot\left(x^3-\frac{{}_3C_2}{11}\cdot\gamma^2\cdot x\right)$$

$${}_0Le_6(x)^{(4)} = \frac{{}_{12}P_6}{2^6}\cdot\frac{1}{2!}\cdot\left(x^2-\frac{{}_2C_2}{11}\cdot\gamma^2\right)\ ,\quad {}_0Le_6(x)^{(5)} = \frac{{}_{12}P_6}{2^6}\cdot\frac{1}{1!}\cdot x\ ,\quad {}_0Le_6(x)^{(6)} = \frac{{}_{12}P_6}{2^6}\cdot\frac{1}{0!}$$

$${}_0Le_7(x) \quad = \frac{{}_{14}P_7}{2^7}\cdot\frac{1}{7!}\cdot(\,x^7-\frac{{}_7C_2}{13}\cdot\gamma^2\cdot x^5+\frac{3\cdot{}_7C_4}{11\cdot13}\cdot\gamma^4\cdot x^3-\frac{5\cdot{}_7C_6}{3\cdot11\cdot13}\cdot\gamma^6\cdot x)$$

$${}_0Le_7(x)^{(1)}=\frac{{}_{14}P_7}{2^7}\cdot\frac{1}{6!}\cdot(\,x^6-\frac{{}_6C_2}{13}\cdot\gamma^2\cdot x^4+\frac{3\cdot{}_6C_4}{11\cdot13}\cdot\gamma^4\cdot x^2-\frac{5\cdot{}_6C_6}{3\cdot11\cdot13}\cdot\gamma^6)$$

$${}_0Le_7(x)^{(2)}=\frac{{}_{14}P_7}{2^7}\cdot\frac{1}{5!}\cdot(\,x^5-\frac{{}_5C_2}{13}\cdot\gamma^2\cdot x^3+\frac{3\cdot{}_5C_4}{11\cdot13}\cdot\gamma^4\cdot x)$$

$${}_0Le_7(x)^{(3)}=\frac{{}_{14}P_7}{2^7}\cdot\frac{1}{4!}\cdot(\,x^4-\frac{{}_4C_2}{13}\cdot\gamma^2\cdot x^2+\frac{3\cdot{}_4C_4}{11\cdot13}\cdot\gamma^4)\ ,\quad {}_0Le_7(x)^{(4)}=\frac{{}_{14}P_7}{2^7}\cdot\frac{1}{3!}\cdot(\,x^3-\frac{{}_3C_2}{13}\cdot\gamma^2\cdot x)$$

$${}_0Le_7(x)^{(5)}=\frac{{}_{14}P_7}{2^7}\cdot\frac{1}{2!}\cdot(\,x^2-\frac{{}_2C_2}{13}\cdot\gamma^2)\ ,\quad {}_0Le_7(x)^{(6)}=\frac{{}_{14}P_7}{2^7}\cdot\frac{1}{1!}\cdot x\ ,\quad {}_0Le_7(x)^{(7)}=\frac{{}_{14}P_7}{2^7}\cdot\frac{1}{0!}$$

$${}_0Le_8(x) \quad = \frac{{}_{16}P_8}{2^8}\cdot\frac{1}{8!}\cdot(\,x^8-\frac{{}_8C_2}{15}\cdot\gamma^2\cdot x^6+\frac{{}_8C_4}{5\cdot13}\cdot\gamma^4\cdot x^4-\frac{{}_8C_6}{11\cdot13}\cdot\gamma^6\cdot x^2+\frac{7\cdot{}_8C_8}{9\cdot11\cdot13}\cdot\gamma^8)$$

$${}_0Le_8(x)^{(1)}=\frac{{}_{16}P_8}{2^8}\cdot\frac{1}{7!}\cdot(\,x^7-\frac{{}_7C_2}{15}\cdot\gamma^2\cdot x^5+\frac{{}_7C_4}{5\cdot13}\cdot\gamma^4\cdot x^3-\frac{{}_7C_6}{11\cdot13}\cdot\gamma^6\cdot x)$$

$${}_0Le_8(x)^{(2)}=\frac{{}_{16}P_8}{2^8}\cdot\frac{1}{6!}\cdot(\,x^6-\frac{{}_6C_2}{15}\cdot\gamma^2\cdot x^4+\frac{{}_6C_4}{5\cdot13}\cdot\gamma^4\cdot x^2-\frac{{}_6C_6}{11\cdot13}\cdot\gamma^6)$$

$${}_0Le_8(x)^{(3)}=\frac{{}_{16}P_8}{2^8}\cdot\frac{1}{5!}\cdot(\,x^5-\frac{{}_5C_2}{15}\cdot\gamma^2\cdot x^3+\frac{{}_5C_4}{5\cdot13}\cdot\gamma^4\cdot x)$$

$${}_0Le_8(x)^{(4)}=\frac{{}_{16}P_8}{2^8}\cdot\frac{1}{4!}\cdot(\,x^4-\frac{{}_4C_2}{15}\cdot\gamma^2\cdot x^2+\frac{{}_4C_4}{5\cdot13}\cdot\gamma^4)\ ,\ {}_0Le_8(x)^{(5)}=\frac{{}_{16}P_8}{2^8}\cdot\frac{1}{3!}\cdot(\,x^3-\frac{{}_3C_2}{15}\cdot\gamma^2\cdot x)$$

$${}_0Le_8(x)^{(6)}=\frac{{}_{16}P_8}{2^8}\cdot\frac{1}{2!}\cdot(\,x^2-\frac{{}_2C_2}{15}\cdot\gamma^2)\ ,\quad {}_0Le_8(x)^{(7)}=\frac{{}_{16}P_8}{2^8}\cdot\frac{1}{1!}\cdot x\ ,\quad {}_0Le_8(x)^{(8)}=\frac{{}_{16}P_8}{2^8}\cdot\frac{1}{0!}$$

$${}_0Le_9(x) \quad = \frac{{}_{18}P_9}{2^9}\cdot\frac{1}{9!}\cdot(\,x^9-\frac{{}_9C_2}{17}\cdot\gamma^2\cdot x^7+\frac{{}_9C_4}{5\cdot17}\cdot\gamma^4\cdot x^5-\frac{{}_9C_6}{13\cdot17}\cdot\gamma^6\cdot x^3+\frac{7\cdot{}_9C_8}{11\cdot13\cdot17}\cdot\gamma^8\cdot x)$$

$${}_0Le_9(x)^{(1)}=\frac{{}_{18}P_9}{2^9}\cdot\frac{1}{8!}\cdot(\,x^8-\frac{{}_8C_2}{17}\cdot\gamma^2\cdot x^6+\frac{{}_8C_4}{5\cdot17}\cdot\gamma^4\cdot x^4-\frac{{}_8C_6}{13\cdot17}\cdot\gamma^6\cdot x^2+\frac{7\cdot{}_8C_8}{11\cdot13\cdot17}\cdot\gamma^8)$$

$${}_0Le_9(x)^{(2)}=\frac{{}_{18}P_9}{2^9}\cdot\frac{1}{7!}\cdot(\,x^7-\frac{{}_7C_2}{17}\cdot\gamma^2\cdot x^5+\frac{{}_7C_4}{5\cdot17}\cdot\gamma^4\cdot x^3-\frac{{}_7C_6}{13\cdot17}\cdot\gamma^6\cdot x)$$

$${}_0Le_9(x)^{(3)}=\frac{{}_{18}P_9}{2^9}\cdot\frac{1}{6!}\cdot(\,x^6-\frac{{}_6C_2}{17}\cdot\gamma^2\cdot x^4+\frac{{}_6C_4}{5\cdot17}\cdot\gamma^4\cdot x^2-\frac{{}_6C_6}{13\cdot17}\cdot\gamma^6)$$

$${}_0Le_9(x)^{(4)}=\frac{{}_{18}P_9}{2^9}\cdot\frac{1}{5!}\cdot(\,x^5-\frac{{}_5C_2}{17}\cdot\gamma^2\cdot x^3+\frac{{}_5C_4}{5\cdot17}\cdot\gamma^4\cdot x)$$

$${}_0Le_9(x)^{(5)}=\frac{{}_{18}P_9}{2^9}\cdot\frac{1}{4!}\cdot(\,x^4-\frac{{}_4C_2}{17}\cdot\gamma^2\cdot x^2+\frac{{}_4C_4}{5\cdot17}\cdot\gamma^4)\ ,\quad {}_0Le_9(x)^{(6)}=\frac{{}_{18}P_9}{2^9}\cdot\frac{1}{3!}\cdot(\,x^3-\frac{{}_3C_2}{17}\cdot\gamma^2\cdot x)$$

$${}_0Le_9(x)^{(7)}=\frac{{}_{18}P_9}{2^9}\cdot\frac{1}{2!}\cdot(\,x^2-\frac{{}_2C_2}{17}\cdot\gamma^2)\ ,\quad {}_0Le_9(x)^{(8)}=\frac{{}_{18}P_9}{2^9}\cdot\frac{1}{1!}\cdot x\ ,\ {}_0Le_9(x)^{(9)}=\frac{{}_{18}P_9}{2^9}\cdot\frac{1}{0!}$$

$$ {}_0Le_{10}(x) = \frac{{}_{20}P_{10}}{2^{10}}\cdot\frac{1}{10!}\cdot\left(x^{10}-\frac{{}_{10}C_2}{19}\cdot\gamma^2\cdot x^8+\frac{3\cdot{}_{10}C_4}{17\cdot19}\cdot\gamma^4\cdot x^6-\frac{{}_{10}C_6}{17\cdot19}\cdot\gamma^6\cdot x^4+\frac{7\cdot{}_{10}C_8}{13\cdot17\cdot19}\cdot\gamma^8\cdot x^2 -\frac{7\cdot9\cdot{}_{10}C_{10}}{11\cdot13\cdot17\cdot19}\cdot\gamma^{10}\right) $$

$$ {}_0Le_{10}(x)^{(1)} = \frac{{}_{20}P_{10}}{2^{10}}\cdot\frac{1}{9!}\cdot\left(x^9-\frac{{}_9C_2}{19}\cdot\gamma^2\cdot x^7+\frac{3\cdot{}_9C_4}{17\cdot19}\cdot\gamma^4\cdot x^5-\frac{{}_9C_6}{17\cdot19}\cdot\gamma^6\cdot x^3+\frac{7\cdot{}_9C_8}{13\cdot17\cdot19}\cdot\gamma^8\cdot x\right) $$

$$ {}_0Le_{10}(x)^{(2)} = \frac{{}_{20}P_{10}}{2^{10}}\cdot\frac{1}{8!}\cdot\left(x^8-\frac{{}_8C_2}{19}\cdot\gamma^2\cdot x^6+\frac{3\cdot{}_8C_4}{17\cdot19}\cdot\gamma^4\cdot x^4-\frac{{}_8C_6}{17\cdot19}\cdot\gamma^6\cdot x^2+\frac{7\cdot{}_8C_8}{13\cdot17\cdot19}\cdot\gamma^8\right) $$

$$ {}_0Le_{10}(x)^{(3)} = \frac{{}_{20}P_{10}}{2^{10}}\cdot\frac{1}{7!}\cdot\left(x^7-\frac{{}_7C_2}{19}\cdot\gamma^2\cdot x^5+\frac{3\cdot{}_7C_4}{17\cdot19}\cdot\gamma^4\cdot x^3-\frac{{}_7C_6}{17\cdot19}\cdot\gamma^6\cdot x\right) $$

$$ {}_0Le_{10}(x)^{(4)} = \frac{{}_{20}P_{10}}{2^{10}}\cdot\frac{1}{6!}\cdot\left(x^6-\frac{{}_6C_2}{19}\cdot\gamma^2\cdot x^4+\frac{3\cdot{}_6C_4}{17\cdot19}\cdot\gamma^4\cdot x^2-\frac{{}_6C_6}{17\cdot19}\cdot\gamma^6\right) $$

$$ {}_0Le_{10}(x)^{(5)} = \frac{{}_{20}P_{10}}{2^{10}}\cdot\frac{1}{5!}\cdot\left(x^5-\frac{{}_5C_2}{19}\cdot\gamma^2\cdot x^3+\frac{3\cdot{}_5C_4}{17\cdot19}\cdot\gamma^4\cdot x\right) $$

$$ {}_0Le_{10}(x)^{(6)} = \frac{{}_{20}P_{10}}{2^{10}}\cdot\frac{1}{4!}\cdot\left(x^4-\frac{{}_4C_2}{19}\cdot\gamma^2\cdot x^2+\frac{3\cdot{}_4C_4}{17\cdot19}\cdot\gamma^4\right)\ ,\ {}_0Le_{10}(x)^{(7)} = \frac{{}_{20}P_{10}}{2^{10}}\cdot\frac{1}{3!}\cdot\left(x^3-\frac{{}_3C_2}{19}\cdot\gamma^2\cdot x\right) $$

$$ {}_0Le_{10}(x)^{(8)} = \frac{{}_{20}P_{10}}{2^{10}}\cdot\frac{1}{2!}\cdot\left(x^2-\frac{{}_2C_2}{19}\cdot\gamma^2\right)\ ,\ {}_0Le_{10}(x)^{(9)} = \frac{{}_{20}P_{10}}{2^{10}}\cdot\frac{1}{1!}\cdot x\ ,\ {}_0Le_{10}(x)^{(10)} = \frac{{}_{20}P_{10}}{2^{10}}\cdot\frac{1}{0!} $$

$$ {}_0Le_{11}(x) = \frac{{}_{22}P_{11}}{2^{11}}\cdot\frac{1}{11!}\cdot\left(x^{11}-\frac{{}_{11}C_2}{21}\cdot\gamma^2\cdot x^9+\frac{{}_{11}C_4}{7\cdot19}\cdot\gamma^4\cdot x^7-\frac{5\cdot{}_{11}C_6}{7\cdot17\cdot19}\cdot\gamma^6\cdot x^5+\frac{{}_{11}C_8}{3\cdot17\cdot19}\cdot\gamma^8\cdot x^3 -\frac{3\cdot{}_{11}C_{10}}{13\cdot17\cdot19}\cdot\gamma^{10}\cdot x\right) $$

$$ {}_0Le_{11}(x)^{(1)} = \frac{{}_{22}P_{11}}{2^{11}}\cdot\frac{1}{10!}\cdot\left(x^{10}-\frac{{}_{10}C_2}{21}\cdot\gamma^2\cdot x^8+\frac{{}_{10}C_4}{7\cdot19}\cdot\gamma^4\cdot x^6-\frac{5\cdot{}_{10}C_6}{7\cdot17\cdot19}\cdot\gamma^6\cdot x^4+\frac{{}_{10}C_8}{3\cdot17\cdot19}\cdot\gamma^8\cdot x^2 -\frac{3\cdot{}_{10}C_{10}}{13\cdot17\cdot19}\cdot\gamma^{10}\right) $$

$$ {}_0Le_{11}(x)^{(2)} = \frac{{}_{22}P_{11}}{2^{11}}\cdot\frac{1}{9!}\cdot\left(x^9-\frac{{}_9C_2}{21}\cdot\gamma^2\cdot x^7+\frac{{}_9C_4}{7\cdot19}\cdot\gamma^4\cdot x^5-\frac{5\cdot{}_9C_6}{7\cdot17\cdot19}\cdot\gamma^6\cdot x^3+\frac{{}_9C_8}{3\cdot17\cdot19}\cdot\gamma^8\cdot x\right) $$

$$ {}_0Le_{11}(x)^{(3)} = \frac{{}_{22}P_{11}}{2^{11}}\cdot\frac{1}{8!}\cdot\left(x^8-\frac{{}_8C_2}{21}\cdot\gamma^2\cdot x^6+\frac{{}_8C_4}{7\cdot19}\cdot\gamma^4\cdot x^4-\frac{5\cdot{}_8C_6}{7\cdot17\cdot19}\cdot\gamma^6\cdot x^2+\frac{{}_8C_8}{3\cdot17\cdot19}\cdot\gamma^8\right) $$

$$ {}_0Le_{11}(x)^{(4)} = \frac{{}_{22}P_{11}}{2^{11}}\cdot\frac{1}{7!}\cdot\left(x^7-\frac{{}_7C_2}{21}\cdot\gamma^2\cdot x^5+\frac{{}_7C_4}{7\cdot19}\cdot\gamma^4\cdot x^3-\frac{5\cdot{}_7C_6}{7\cdot17\cdot19}\cdot\gamma^6\cdot x\right) $$

$$ {}_0Le_{11}(x)^{(5)} = \frac{{}_{22}P_{11}}{2^{11}}\cdot\frac{1}{6!}\cdot\left(x^6-\frac{{}_6C_2}{21}\cdot\gamma^2\cdot x^4+\frac{{}_6C_4}{7\cdot19}\cdot\gamma^4\cdot x^2-\frac{5\cdot{}_6C_6}{7\cdot17\cdot19}\cdot\gamma^6\right) $$

$$ {}_0Le_{11}(x)^{(6)} = \frac{{}_{22}P_{11}}{2^{11}}\cdot\frac{1}{5!}\cdot\left(x^5-\frac{{}_5C_2}{21}\cdot\gamma^2\cdot x^3+\frac{{}_5C_4}{7\cdot19}\cdot\gamma^4\cdot x\right) $$

$${}_0Le_{11}(x)^{(7)} = \frac{{}_{22}P_{11}}{2^{11}} \cdot \frac{1}{4!} \cdot (x^4 - \frac{{}_4C_2}{21} \cdot \gamma^2 \cdot x^2 + \frac{{}_4C_4}{7 \cdot 19} \cdot \gamma^4) \text{ , } {}_0Le_{11}(x)^{(8)} = \frac{{}_{22}P_{11}}{2^{11}} \cdot \frac{1}{3!} \cdot (x^3 - \frac{{}_3C_2}{21} \cdot \gamma^2 \cdot x)$$

$${}_0Le_{11}(x)^{(9)} = \frac{{}_{22}P_{11}}{2^{11}} \cdot \frac{1}{2!} \cdot (x^2 - \frac{{}_2C_2}{21} \cdot \gamma^2) \text{ , } {}_0Le_{11}(x)^{(10)} = \frac{{}_{22}P_{11}}{2^{11}} \cdot \frac{1}{1!} \cdot x \text{ , } {}_0Le_{11}(x)^{(11)} = \frac{{}_{22}P_{11}}{2^{11}} \cdot \frac{1}{0!}$$

$$\begin{aligned}{}_0Le_{12}(x) = \frac{{}_{24}P_{12}}{2^{12}} \cdot \frac{1}{12!} \cdot (& x^{12} - \frac{{}_{12}C_2}{23} \cdot \gamma^2 \cdot x^{10} + \frac{{}_{12}C_4}{7 \cdot 23} \cdot \gamma^4 \cdot x^8 - \frac{5 \cdot {}_{12}C_6}{7 \cdot 19 \cdot 23} \cdot \gamma^6 \cdot x^6 \\ & + \frac{5 \cdot {}_{12}C_8}{17 \cdot 19 \cdot 23} \cdot \gamma^8 \cdot x^4 - \frac{3 \cdot {}_{12}C_{10}}{17 \cdot 19 \cdot \cdot 23} \cdot \gamma^{10} \cdot x^2 + \frac{3 \cdot 11 \cdot {}_{12}C_{12}}{13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23} \cdot \gamma^{12})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}{}_0Le_{12}(x)^{(1)} = \frac{{}_{24}P_{12}}{2^{12}} \cdot \frac{1}{11!} \cdot (& x^{11} - \frac{{}_{11}C_2}{23} \cdot \gamma^2 \cdot x^9 + \frac{{}_{11}C_4}{7 \cdot 23} \cdot \gamma^4 \cdot x^7 - \frac{5 \cdot {}_{11}C_6}{7 \cdot 19 \cdot 23} \cdot \gamma^6 \cdot x^5 \\ & + \frac{5 \cdot {}_{11}C_8}{17 \cdot 19 \cdot 23} \cdot \gamma^8 \cdot x^3 - \frac{3 \cdot {}_{11}C_{10}}{17 \cdot 19 \cdot \cdot 23} \cdot \gamma^{10} \cdot x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}{}_0Le_{12}(x)^{(2)} = \frac{{}_{24}P_{12}}{2^{12}} \cdot \frac{1}{10!} \cdot (& x^{10} - \frac{{}_{10}C_2}{23} \cdot \gamma^2 \cdot x^8 + \frac{{}_{10}C_4}{7 \cdot 23} \cdot \gamma^4 \cdot x^6 - \frac{5 \cdot {}_{10}C_6}{7 \cdot 19 \cdot 23} \cdot \gamma^6 \cdot x^4 \\ & + \frac{5 \cdot {}_{10}C_8}{17 \cdot 19 \cdot 23} \cdot \gamma^8 \cdot x^2 - \frac{3 \cdot {}_{10}C_{10}}{17 \cdot 19 \cdot \cdot 23} \cdot \gamma^{10})\end{aligned}$$

$${}_0Le_{12}(x)^{(3)} = \frac{{}_{24}P_{12}}{2^{12}} \cdot \frac{1}{9!} \cdot (x^9 - \frac{{}_9C_2}{23} \cdot \gamma^2 \cdot x^7 + \frac{{}_9C_4}{7 \cdot 23} \cdot \gamma^4 \cdot x^5 - \frac{5 \cdot {}_9C_6}{7 \cdot 19 \cdot 23} \cdot \gamma^6 \cdot x^3 + \frac{5 \cdot {}_9C_8}{17 \cdot 19 \cdot 23} \cdot \gamma^8 \cdot x)$$

$${}_0Le_{12}(x)^{(4)} = \frac{{}_{24}P_{12}}{2^{12}} \cdot \frac{1}{8!} \cdot (x^8 - \frac{{}_8C_2}{23} \cdot \gamma^2 \cdot x^6 + \frac{{}_8C_4}{7 \cdot 23} \cdot \gamma^4 \cdot x^4 - \frac{5 \cdot {}_8C_6}{7 \cdot 19 \cdot 23} \cdot \gamma^6 \cdot x^2 + \frac{5 \cdot {}_8C_8}{17 \cdot 19 \cdot 23} \cdot \gamma^8)$$

$${}_0Le_{12}(x)^{(5)} = \frac{{}_{24}P_{12}}{2^{12}} \cdot \frac{1}{7!} \cdot (x^7 - \frac{{}_7C_2}{23} \cdot \gamma^2 \cdot x^5 + \frac{{}_7C_4}{7 \cdot 23} \cdot \gamma^4 \cdot x^3 - \frac{5 \cdot {}_7C_6}{7 \cdot 19 \cdot 23} \cdot \gamma^6 \cdot x)$$

$${}_0Le_{12}(x)^{(6)} = \frac{{}_{24}P_{12}}{2^{12}} \cdot \frac{1}{6!} \cdot (x^6 - \frac{{}_6C_2}{23} \cdot \gamma^2 \cdot x^4 + \frac{{}_6C_4}{7 \cdot 23} \cdot \gamma^4 \cdot x^2 - \frac{5 \cdot {}_6C_6}{7 \cdot 19 \cdot 23} \cdot \gamma^6)$$

$${}_0Le_{12}(x)^{(7)} = \frac{{}_{24}P_{12}}{2^{12}} \cdot \frac{1}{5!} \cdot (x^5 - \frac{{}_5C_2}{23} \cdot \gamma^2 \cdot x^3 + \frac{{}_5C_4}{7 \cdot 23} \cdot \gamma^4 \cdot x)$$

$${}_0Le_{12}(x)^{(8)} = \frac{{}_{24}P_{12}}{2^{12}} \cdot \frac{1}{4!} \cdot (x^4 - \frac{{}_4C_2}{23} \cdot \gamma^2 \cdot x^2 + \frac{{}_4C_4}{7 \cdot 23} \cdot \gamma^4) \text{ , } {}_0Le_{12}(x)^{(9)} = \frac{{}_{24}P_{12}}{2^{12}} \cdot \frac{1}{3!} \cdot (x^3 - \frac{{}_3C_2}{23} \cdot \gamma^2 \cdot x)$$

$${}_0Le_{12}(x)^{(10)} = \frac{{}_{24}P_{12}}{2^{12}} \cdot \frac{1}{2!} \cdot (x^2 - \frac{{}_2C_2}{23} \cdot \gamma^2) \text{ , } {}_0Le_{12}(x)^{(11)} = \frac{{}_{24}P_{12}}{2^{12}} \cdot \frac{1}{1!} \cdot x \text{ , } {}_0Le_{12}(x)^{(12)} = \frac{{}_{24}P_{12}}{2^{12}} \cdot \frac{1}{0!}$$

$$\begin{aligned}{}_0Le_{13}(x) = \frac{{}_{26}P_{13}}{2^{13}} \cdot \frac{1}{13!} \cdot (& x^{13} - \frac{{}_{13}C_2}{25} \cdot \gamma^2 \cdot x^{11} + \frac{3 \cdot {}_{13}C_4}{23 \cdot 25} \cdot \gamma^4 \cdot x^9 - \frac{{}_{13}C_6}{5 \cdot 7 \cdot 23} \cdot \gamma^6 \cdot x^7 \\ & + \frac{{}_{13}C_8}{5 \cdot 19 \cdot 23} \cdot \gamma^8 \cdot x^5 - \frac{9 \cdot {}_{13}C_{10}}{5 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23} \cdot \gamma^{10} \cdot x^3 + \frac{3 \cdot 11 \cdot {}_{13}C_{12}}{17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 25} \cdot \gamma^{12} \cdot x)\end{aligned}$$

$${}_0Le_{13}(x)^{(1)} = \frac{{}_{26}P_{13}}{2^{13}} \cdot \frac{1}{12!} \cdot (x^{12} - \frac{{}_{12}C_2}{25} \cdot \gamma^2 \cdot x^{10} + \frac{3 \cdot {}_{12}C_4}{23 \cdot 25} \cdot \gamma^4 \cdot x^8 - \frac{{}_{12}C_6}{5 \cdot 7 \cdot 23} \cdot \gamma^6 \cdot x^6$$

$$+\frac{{}_{12}C_8}{5\cdot19\cdot23}\cdot\gamma^8\cdot x^4-\frac{9\cdot{}_{12}C_{10}}{5\cdot17\cdot19\cdot23}\cdot\gamma^{10}\cdot x^2+\frac{3\cdot11\cdot{}_{12}C_{12}}{17\cdot19\cdot23\cdot25}\cdot\gamma^{12})$$

$${}_0Le_{13}(x)^{(2)}=\frac{{}_{26}P_{13}}{2^{13}}\cdot\frac{1}{11!}\cdot(x^{11}-\frac{{}_{11}C_2}{25}\cdot\gamma^2\cdot x^9+\frac{3\cdot{}_{11}C_4}{23\cdot25}\cdot\gamma^4\cdot x^7-\frac{{}_{11}C_6}{5\cdot7\cdot23}\cdot\gamma^6\cdot x^5$$
$$+\frac{{}_{11}C_8}{5\cdot19\cdot23}\cdot\gamma^8\cdot x^3-\frac{9\cdot{}_{11}C_{10}}{5\cdot17\cdot19\cdot23}\cdot\gamma^{10}\cdot x)$$

$${}_0Le_{13}(x)^{(3)}=\frac{{}_{26}P_{13}}{2^{13}}\cdot\frac{1}{10!}\cdot(x^{10}-\frac{{}_{10}C_2}{25}\cdot\gamma^2\cdot x^8+\frac{3\cdot{}_{10}C_4}{23\cdot25}\cdot\gamma^4\cdot x^6-\frac{{}_{10}C_6}{5\cdot7\cdot23}\cdot\gamma^6\cdot x^4$$
$$+\frac{{}_{10}C_8}{5\cdot19\cdot23}\cdot\gamma^8\cdot x^2-\frac{9\cdot{}_{10}C_{10}}{5\cdot17\cdot19\cdot23}\cdot\gamma^{10})$$

$${}_0Le_{13}(x)^{(4)}=\frac{{}_{26}P_{13}}{2^{13}}\cdot\frac{1}{9!}\cdot(x^9-\frac{{}_9C_2}{25}\cdot\gamma^2\cdot x^7+\frac{3\cdot{}_9C_4}{23\cdot25}\cdot\gamma^4\cdot x^5-\frac{{}_9C_6}{5\cdot7\cdot23}\cdot\gamma^6\cdot x^3+\frac{{}_9C_8}{5\cdot19\cdot23}\cdot\gamma^8\cdot x)$$

$${}_0Le_{13}(x)^{(5)}=\frac{{}_{26}P_{13}}{2^{13}}\cdot\frac{1}{8!}\cdot(x^8-\frac{{}_8C_2}{25}\cdot\gamma^2\cdot x^6+\frac{3\cdot{}_8C_4}{23\cdot25}\cdot\gamma^4\cdot x^4-\frac{{}_8C_6}{5\cdot7\cdot23}\cdot\gamma^6\cdot x^2+\frac{{}_8C_8}{5\cdot19\cdot23}\cdot\gamma^8)$$

$${}_0Le_{13}(x)^{(6)}=\frac{{}_{26}P_{13}}{2^{13}}\cdot\frac{1}{7!}\cdot(x^7-\frac{{}_7C_2}{25}\cdot\gamma^2\cdot x^5+\frac{3\cdot{}_7C_4}{23\cdot25}\cdot\gamma^4\cdot x^3-\frac{{}_7C_6}{5\cdot7\cdot23}\cdot\gamma^6\cdot x)$$

$${}_0Le_{13}(x)^{(7)}=\frac{{}_{26}P_{13}}{2^{13}}\cdot\frac{1}{6!}\cdot(x^6-\frac{{}_6C_2}{25}\cdot\gamma^2\cdot x^4+\frac{3\cdot{}_6C_4}{23\cdot25}\cdot\gamma^4\cdot x^2-\frac{{}_6C_6}{5\cdot7\cdot23}\cdot\gamma^6)$$

$${}_0Le_{13}(x)^{(8)}=\frac{{}_{26}P_{13}}{2^{13}}\cdot\frac{1}{5!}\cdot(x^5-\frac{{}_5C_2}{25}\cdot\gamma^2\cdot x^3+\frac{3\cdot{}_5C_4}{23\cdot25}\cdot\gamma^4\cdot x)$$

$${}_0Le_{13}(x)^{(9)}=\frac{{}_{26}P_{13}}{2^{13}}\cdot\frac{1}{4!}\cdot(x^4-\frac{{}_4C_2}{25}\cdot\gamma^2\cdot x^2+\frac{3\cdot{}_4C_4}{23\cdot25}\cdot\gamma^4),\ {}_0Le_{13}(x)^{(10)}=\frac{{}_{26}P_{13}}{2^{13}}\cdot\frac{1}{3!}\cdot(x^3-\frac{{}_3C_2}{25}\cdot\gamma^2\cdot x)$$

$${}_0Le_{13}(x)^{(11)}=\frac{{}_{26}P_{13}}{2^{13}}\cdot\frac{1}{2!}\cdot(x^2-\frac{{}_2C_2}{25}\cdot\gamma^2)\ ,\ {}_0Le_{13}(x)^{(12)}=\frac{{}_{26}P_{13}}{2^{13}}\cdot\frac{1}{1!}\cdot x\ ,\ {}_0Le_{13}(x)^{(13)}=\frac{{}_{26}P_{13}}{2^{13}}\cdot\frac{1}{0!}$$

8. 総括

第一種のチェビシェフ多項式基本型 ${}_0T_N(x)$ ：

$${}_0T_N(x)=2^{N-1}\cdot[\,x^N+\sum_{k=1}\{(-1)^k\cdot{}_NC_{2k}\cdot\prod_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{2N-2j})\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-2k}\}]$$

第一種のチェビシェフ多項式基本型 ${}_0T_N(x)$ の微分方程式：

$$(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot{}_0T_N(x)''-\frac{x}{\gamma^2}\cdot{}_0T_N(x)'+\frac{N^2}{\gamma^2}\cdot{}_0T_N(x)=0$$

第二種のチェビシェフ多項式基本型 ${}_0U_N(x)$：

$${}_0U_N(x) = 2^N \cdot [\, x^N + \sum_{k=1} \{(-1)^k \cdot {}_NC_{2k} \cdot \prod_{j=1}^{k} (\frac{2j-1}{2N-2j+2}) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k}\}]$$

第二種のチェビシェフ多項式基本型 ${}_0U_N(x)$ の微分方程式：

$$(1-\frac{x^2}{\gamma^2}) \cdot {}_0U_N(x)'' - \frac{3x}{\gamma^2} \cdot {}_0U_N(x)' + \frac{N(N+2)}{\gamma^2} \cdot {}_0U_N(x) = 0$$

チェビシェフ多項式基本型の漸化式　：

$${}_0T_N(x) = \frac{{}_0U_N(x) - \gamma^2 \cdot {}_0U_{N-2}(x)}{2} \qquad {}_0T_N(x)' = \frac{{}_0U_N(x)' - \gamma^2 \cdot {}_0U_{N-2}(x)'}{2}$$

$$x \cdot {}_0T_{N-1}(x) = \frac{{}_0T_N(x) + \gamma^2 \cdot {}_0T_{N-2}(x)}{2} \qquad x \cdot {}_0U_{N-1}(x) = \frac{{}_0U_N(x) + \gamma^2 \cdot {}_0U_{N-2}(x)}{2}$$

$${}_0T_N(x)' = N \cdot {}_0U_{N-1}(x)$$

$$x \cdot {}_0U_{N-1}(x) = {}_0T_N(x) + \gamma^2 \cdot {}_0U_{N-2}(x) \qquad {}_0T_N(x) = {}_0U_N(x) - x \cdot {}_0U_{N-1}(x)$$

$$x \cdot {}_0T_N(x)' = N \cdot {}_0T_N(x) + N\,\gamma^2 \cdot {}_0U_{N-2}(x) \qquad x \cdot {}_0U_N(x)' = N \cdot {}_0U_N(x) + \gamma^2 \cdot {}_0U_{N-1}(x)'$$

$${}_0U_{N-1}(x)' = N \cdot {}_0U_{N-2}(x) + x \cdot {}_0U_{N-2}(x)'$$

$$x \cdot {}_0U_N(x)' - N \cdot {}_0U_N(x) = \gamma^2 \cdot \{\, x \cdot {}_0U_{N-2}(x)' + N \cdot {}_0U_{N-2}(x)\}$$

第一種のルジャンドル多項式基本型　${}_0P_N(x) = {}_0T_N(x) + {}_0R_N(x)$ ：

$${}_0P_N(x) = 2^{N-1} \cdot [\, x^N + \sum_{k=1} \{(-1)^k \cdot {}_NC_{2k} \cdot \prod_{j=1}^{k} (\frac{2j-1}{2N-2j+1}) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k}\}]$$

第一種のルジャンドル多項式基本型　${}_0P_N(x)$　の微分方程式：

$$(1-\frac{x^2}{\gamma^2}) \cdot {}_0P_N(x)'' - \frac{2x}{\gamma^2} \cdot {}_0P_N(x)' + \frac{N(N+1)}{\gamma^2} \cdot {}_0P_N(x) = 0$$

第二種のルジャンドル多項式基本型 ${}_0Q_N(x) = {}_0U_N(x) + {}_0S_N(x)$ ：

$$ {}_0Q_N(x) = 2^N \cdot [\, x^N + \sum_{k=1} \{(-1)^k \cdot {}_N C_{2k} \cdot \prod_{j=1}^{k} (\frac{2j-1}{2N-2j+1}) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k}\}] $$

第二種のルジャンドル多項式基本型 ${}_0Q_N(x)$ の微分方程式：

$$ (1-\frac{x^2}{\gamma^2}) \cdot {}_0Q_N(x)'' - \frac{2x}{\gamma^2} \cdot {}_0Q_N(x)' + \frac{N(N+1)}{\gamma^2} \cdot {}_0Q_N(x) = 0 $$

第一種の基本型補助項 ${}_0R_N(x) = {}_0P_N(x) - {}_0T_N(x)$：

$$ {}_0R_N(x) = 2^{N-1} \cdot \sum_{k=1} [(-1)^k \cdot {}_N C_{2k} \cdot \{\prod_{j=1}^{k} (\frac{2j-1}{2N-2j+1}) - \prod_{j=1}^{k} (\frac{2j-1}{2N-2j})\} \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k}] $$

第二種の基本型補助項 ${}_0S_N(x) = {}_0Q_N(x) - {}_0U_N(x)$：

$$ {}_0S_N(x) = 2^N \cdot \sum_{k=1} [(-1)^k \cdot {}_N C_{2k} \cdot \{\prod_{j=1}^{k} (\frac{2j-1}{2N-2j+1}) - \prod_{j=1}^{k} (\frac{2j-1}{2N-2j+2})\} \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k}] $$

第一種の基本型補助項 ${}_0R_N(x)$ のチェビシェフ多項式との関係式　：

$$ (1-\frac{x^2}{\gamma^2}) \cdot {}_0R_N(x)'' - \frac{2x}{\gamma^2} \cdot {}_0R_N(x)' + \frac{N(N+1)}{\gamma^2} \cdot {}_0R_N(x) = N \cdot {}_0U_{\boldsymbol{N}-2}(x) $$

第二種の基本型補助項 ${}_0S_N(x)$ のチェビシェフ多項式との関係式　：

$$ (1-\frac{x^2}{\gamma^2}) \cdot {}_0S_N(x)'' - \frac{2x}{\gamma^2} \cdot {}_0S_N(x)' + \frac{N(N+1)}{\gamma^2} \cdot {}_0S_N(x) = -\ {}_0U_{N-1}(x)' $$

${}_0R_N(x)$ と ${}_0S_N(x)$ の関係式　：

$$ 2 \cdot {}_0R_N(x) - {}_0S_N(x) = \gamma^2 \cdot {}_0U_{N-2}(x) $$

$$ (1-\frac{x^2}{\gamma^2}) \cdot {}_0R_N(x)'' - \frac{2x}{\gamma^2} \cdot {}_0R_N(x)' + \frac{N(N-1)}{\gamma^2} \cdot {}_0R_N(x) = -\frac{N}{\gamma^2} \cdot {}_0S_N(x) $$

$$(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_0S_N(x)'' -\frac{3x}{\gamma^2}\cdot {}_0S_N(x)'+\frac{N^2}{\gamma^2}\cdot {}_0S_N(x)=-\frac{2}{\gamma^2}\cdot\{x\cdot {}_0R_N(x)'+N\cdot {}_0R_N(x)\}$$

$$(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_0R_N(x)'' -\frac{4x}{\gamma^2}\cdot {}_0R_N(x)'+\frac{N(N-3)}{\gamma^2}\cdot {}_0R_N(x)$$
$$=(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_0S_N(x)'' -\frac{3x}{\gamma^2}\cdot {}_0S_N(x)'+\frac{N(N-1)}{\gamma^2}\cdot {}_0S_N(x)$$

ルジャンドル多項式基本型　${}_0Le_N(x)$　：　$\frac{(2N)!}{2^N\cdot(N!)^2}=\Gamma(N)=\prod_{j=1}^{N}(\frac{2j-1}{j})$

$${}_0Le_N(x)=\frac{{}_{2N}P_N}{2^N}\cdot\frac{1}{N!}\cdot[\,x^N+\sum_{k=1}\{(-1)^k\cdot {}_NC_{2k}\cdot\prod_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{2N-2j+1})\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-2k}\}]$$

ルジャンドル多項式基本型 ${}_0Le_N(x)$ の微分方程式：

$$(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_0Le_N(x)'' -\frac{2x}{\gamma^2}\cdot {}_0Le_N(x)' +\frac{N(N+1)}{\gamma^2}\cdot {}_0Le_N(x)=0$$

${}_0P_N(x)$ と ${}_0Q_N(x)$　と　${}_0Le_N(x)$ の関係：

$${}_0Le_N(x)=\frac{(2N)!}{2^N\cdot(N!)^2}\cdot\frac{{}_0P_N(x)}{2^{N-1}}=\frac{(2N)!}{2^N\cdot(N!)^2}\cdot\frac{{}_0Q_N(x)}{2^N}$$
$$=\Gamma(N)\cdot\frac{{}_0P_N(x)}{2^{N-1}}=\Gamma(N)\cdot\frac{{}_0Q_N(x)}{2^N}$$
$$=\prod_{j=1}^{N}(\frac{2j-1}{j})\cdot\frac{{}_0P_N(x)}{2^{N-1}}=\prod_{j=1}^{N}(\frac{2j-1}{j})\cdot\frac{{}_0Q_N(x)}{2^N}$$

ルジャンドル多項式基本型 ${}_0Le_N(x)$ の漸化式　：

$$(N+1)\cdot {}_0Le_{N+1}(x)-(2N+1)\,x\cdot {}_0Le_N(x)+N\cdot\gamma^2\cdot {}_0Le_{N-1}(x)=0$$

$N-m$　次のルジャンドル陪多項式基本型　${}_0Le_N(x)^{(m)}$　：

$${}_0Le_N(x)^{(m)}=\frac{{}_{2N}P_N}{2^N}\cdot\frac{1}{(N-m)!}\cdot[\,x^{N-m}+\sum_{k=1}\{(-1)^k\cdot {}_{N-m}C_{2k}\cdot\prod_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{2N-2j+1})\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-2k-m}\}]$$

ルジャンドル陪多項式基本型 ${}_0Le_N(x)^{(m)}$ の漸化式：

$$(N+1-m)\cdot {}_0Le_{N+1}(x)^{(m)} - (2N+1)\cdot x\cdot {}_0Le_N(x)^{(m)} + (N+m)\cdot \gamma^2\cdot {}_0Le_{N-1}(x)^{(m)} = 0$$

$$ {}_0Le_{\boldsymbol{N}+1}(x)^{(m)} - \gamma^2\cdot {}_0Le_{\boldsymbol{N}-1}(x)^{(m)} = (2N+1)\cdot {}_0Le_N(x)^{(m-1)}$$

$$ {}_0Le_{\boldsymbol{N}+1}(x)^{(m)} - x\cdot {}_0Le_N(x)^{(m)} = (N+m)\cdot {}_0Le_{\boldsymbol{N}}(x)^{(m-1)}$$

$$x\cdot {}_0Le_{\boldsymbol{N}}(x)^{(m)} - \gamma^2\cdot {}_0Le_{N-1}(x)^{(m)} = (N+1-m)\cdot {}_0Le_N(x)^{(m-1)}$$

ルジャンドル同伴関数基本型　${}_0y_N^m(x)$：　${}_0y_N^m(x) = (\gamma^2 - x^2)^{\frac{m}{2}}\cdot {}_0Le_{\boldsymbol{N}}(x)^{(m)}$

ルジャンドル同伴関数基本型　${}_0y_N^m(x)$　の微分方程式　：

$$(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_0y_N^m(x)'' - \frac{2x}{\gamma^2}\cdot {}_0y_N^m(x)' + \{\frac{N(N+1)}{\gamma^2} - \frac{m^2}{\gamma^2 - x^2}\}\cdot {}_0y_N^m(x) = 0$$

ルジャンドル同伴関数基本型　${}_0y_N^m(x)$　の漸化式：

$$(N+1-m)\cdot {}_0y_{N+1}^m - (2N+1)\,x\cdot {}_0y_N^m + (N+m)\cdot\gamma^2\cdot {}_0y_{N-1}^m = 0$$

$$ {}_0y_N^{m+1}(x) - 2mx\cdot(\gamma^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot {}_0y_N^m(x) + \{N(N+1) - m(m-1)\}\cdot {}_0y_N^{m-1}(x) = 0$$

参考文献

手代木　琢磨、　勝間　豊：チェビシェフ多項式の基本型について、産業能率大学紀要、38（1），2017，PP 1-28

執筆者紹介（掲載順）　2019年9月現在

寺　嶋　正　尚	産業能率大学経営学部　教授
都　留　信　行	産業能率大学経営学部　准教授
武　内　千　草	産業能率大学経営学部　教授
川　並　　　剛	産業能率大学経営学部　兼任教員
城　戸　康　彰	産業能率大学経営学部　教授
友　寄　隆　哉	産業能率大学情報マネジメント学部　教授
手代木　琢　磨	産業能率大学情報マネジメント学部　元教授
勝　間　　　豊	産業能率大学情報マネジメント学部　教授

ご協力いただいた査読者の方々にお礼申し上げます。

産業能率大学　紀要　第40巻1号（通巻76号）
2019年9月30日　発行
編　集　産業能率大学紀要審査委員会
発　行　産業能率大学
〒158-8630　東京都世田谷区等々力6－39－15
経営学部　経営学科
マーケティング学科
〒259-1197　神奈川県伊勢原市上粕屋1573
情報マネジメント学部
現代マネジメント学科
発行事務局　産業能率大学　湘南キャンパス図書館
〒259-1197　神奈川県伊勢原市上粕屋1573
ＴＥＬ　0463（92）2218
印　刷　渡辺印刷株式会社
〒152-0031　東京都目黒区中根2-7-1
ＴＥＬ　03（3718）2161

SANNO University Bulletin

School of Information-Oriented Management
School of Management

Vol. 40 No.1 September 2019

Articles

Research Note

SANNO University