［研究ノート］

Sanno University Bulletin Vol. 41 No. 1 September 2020

チェビシェフ多項式基本型とエルミート多項式基本型との関係

The relationship between the fundamental styles of Chebyshev and Hermite polynomials

手代木　琢磨

Takuma Teshirogi

勝間　豊

Yutaka Katsuma

Abstract

The previous paper discussed the relationship between the fundamental styles of Chebyshev and Laguerre polynomials. In this paper, we discuss the relationship between the fundamental styles of Chebyshev and Hermite polynomials.

1. 序論

手代木と勝間〔2020〕は、チェビシェフ多項式基本型とラゲール多項式基本型との関係を議論した。

本稿では第一種および第二種のチェビシェフ多項式基本型とエルミート多項式基本型の関係を議論する。

2. チェビシェフ多項式基本型

2. 1　第一種のチェビシェフ多項式基本型とその微分方程式

第一種のチェビシェフ多項式基本型は次式で表される。

$$ {}_0T_N(x) = 2^{N-1} \cdot [\, x^N + \sum_{k=1} \{(-1)^k \cdot {}_N\mathrm{C}_{2k} \cdot \prod_{j=1}^{k} (\frac{2j-1}{2N-2j}) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k}\}] $$

この式を $\mathbf{{}_0}T_N(x) = 2^{N-1} \cdot x^N + 2^{N-1} \cdot \sum_{k=1} \{(-1)^k \cdot \frac{{}_N\mathrm{C}_{2k}}{2^k} \cdot \prod_{j=1}^{k} (\frac{2j-1}{N-j}) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k}\}$ と表す。

2020年3月24日　受理

ただし $N=0$, $N=1$ の場合は $_{\mathbf{0}}T_0(x)=1$, $_{\mathbf{0}}T_1(x)=x$ である。この $_{\mathbf{0}}T_N(x)$ の微分方程式は

$$(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot{}_0T_N(x)'' - \frac{x}{\gamma^2}\cdot{}_0T_N(x)' + \frac{N^2}{\gamma^2}\cdot{}_0T_N(x)=0$$ で表される。

この多項式と微分方程式は $\gamma^2=-1$ でも成立する。

2. 2　第二種のチェビシェフ多項式基本型とその微分方程式

第二種のチェビシェフ多項式基本型は次式で表される。

$$_0U_N(x)=2^N\cdot[\,x^N+\sum_{k=1}\{(-1)^k\cdot{}_N\mathrm{C}_{2k}\prod_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{2N-2j+2})\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-2k}\}\,]$$

この式を $_{\mathbf{0}}U_N(x)=2^N\cdot x^N+2^N\cdot\sum_{k=1}\{(-1)^k\cdot\frac{{}_N\mathrm{C}_{2k}}{2^k}\cdot\prod_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{N-j+1})\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-2k}\}$ と表す。

ただし $N=0$, $N=1$ の場合は $_{\mathbf{0}}U_0(x)=1$, $_{\mathbf{0}}U_1(x)=2x$ である。この $_{\mathbf{0}}U_N(x)$ の微分方程式は

$$(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot{}_0U_N(x)'' - \frac{3x}{\gamma^2}\cdot{}_0U_N(x)' + \frac{N(N+2)}{\gamma^2}\cdot{}_0U_N(x)=0$$ で表される。

この多項式と微分方程式は $\gamma^2=-1$ でも成立する。

3.　チェビシェフ多項式基本型とエルミート多項式基本型との関係

3. 1　エルミート多項式の微分方程式とその解

エルミート多項式 $H_N(x)$ の微分方程式は次式で表され、

$$H_N(x)'' - 2x\cdot H_N(x)' + 2N\cdot H_N(x)=0$$

この微分方程式の解は一般に次式で表される。

$$H_N(x)=(2x)^N-\frac{N(N-1)}{1!}(2x)^{N-2}+\frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{2!}(2x)^{N-4}-\cdots$$

3. 2　エルミート多項式基本型の微分方程式

エルミート多項式基本型 $_0H_N(x)$ の微分方程式を次式で定義する。

$$_0H_N(x)'' - \frac{2x}{\gamma^2}\cdot{}_0H_N(x)' + \frac{2N}{\gamma^2}\cdot{}_0H_N(x)=0$$

3．3　第一種のチェビシェフ多項式基本型とエルミート多項式基本型との関係

第一種のチェビシェフ多項式基本型 ${}_0T_N(x)$ を 2 倍して、エルミート多項式基本型 ${}_0H_N(x)$ は

次式で表されると仮定して $f_N(k)$ を求める。ただし係数 2^N を省いて検討する。

$$ {}_0H_N(x) = 2^N \cdot x^N + 2^N \cdot \sum_{k=1} [\,(-1)^k \cdot \frac{{}_N\mathrm{C}_{2k}}{2^k} \cdot \prod_{j=1}^{k} \{\,(\frac{2j-1}{N-j}) \cdot f_N(k)\} \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k}\,] $$

$$ \begin{cases} {}_0H_N(x)\,' = Nx^{N-1} + \sum_{k=1} [\,(-1)^k \cdot \frac{{}_N\mathrm{C}_{2k}}{2^k} \cdot (N-2k) \cdot \prod_{j=1}^{k} \{\,(\frac{2j-1}{N-j}) \cdot f_N(k)\} \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k-1}\,] \\ {}_0H_N(x)\,'' = N(N-1)\,x^{N-2} \\ \qquad + \sum_{k=1} [\,(-1)^k \cdot \frac{{}_N\mathrm{C}_{2k}}{2^k} \cdot (N-2k)(N-2k-1) \cdot \prod_{j=1}^{k} \{(\frac{2j-1}{N-j}) \cdot f_N(k)\} \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k-2}\,] \end{cases} $$

$k=1$ のとき　$4 \cdot {}_N\mathrm{C}_2 \cdot \frac{1}{2N-2} \cdot f_N(1) = N(N-1)$　から　$f_N(1) = N-1$

$k>1$ のとき $4\,k \cdot \frac{2k-1}{2N-2k} \cdot {}_N\mathrm{C}_{2k} \cdot f_N(k) = (N-2k+2)(N-2k+1) \cdot {}_N\mathrm{C}_{2k-2} \cdot f_N(k-1)$

を解いて　$f_N(k) = (N-k) \cdot f_N(k-1)$　なる漸化式が得られる。

$f_N(1) = N-1$ から　$f_N(k) = \prod_{j=1}^{k}(N-j)$　となるので　${}_0H_N(x)$ は次式で表される。

$$ \begin{aligned} {}_0H_N(x) &= 2^N \cdot x^N + 2^N \cdot \sum_{k=1} \{(-1)^k \cdot \frac{{}_N\mathrm{C}_{2k}}{2^k} \cdot \prod_{j=1}^{k}(2j-1) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k}\} \\ &= 2^N \cdot x^N + \sum_{k=1} \{(-1)^k \cdot 2^{N-k} \cdot {}_N\mathrm{C}_{2k} \cdot \prod_{j=1}^{k}(2j-1) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k}\} \end{aligned} $$

3．4　第二種のチェビシェフ多項式基本型とエルミート多項式基本型との関係

第二種のチェビシェフ多項式基本型 ${}_0U_N(x)$ を用いて、エルミート多項式基本型 ${}_0H_N(x)$ では

次式で表されると仮定して　$g_N(k)$ を求める。ただし係数 2^N を省いて検討する。

$$ {}_0H_N(x) = 2^N \cdot x^N + 2^N \cdot \sum_{k=1} [\,(-1)^k \cdot \frac{{}_N\mathrm{C}_{2k}}{2^k} \cdot \prod_{j=1}^{k} \{(\frac{2j-1}{N-j+1}) \cdot g_N(k)\} \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k}\,] $$

$$\begin{cases} {}_0H_N(x)\,' = Nx^{N-1} + \sum_{k=1}[\,(-1)^k \cdot \dfrac{{}_N\mathrm{C}_{2k}}{2^k} \cdot (N-2\,k) \cdot \prod_{j=1}^{k}\{\,(\dfrac{2j-1}{N-j+1}) \cdot g_N(k)\} \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k-1}\,] \\ {}_0H_N(x)\,'' = N(N-1)\,x^{N-2} \\ \qquad + \sum_{k=1}[\,(-1)^k \cdot \dfrac{{}_N\mathrm{C}_{2k}}{2^k} \cdot (N-2\,k)(N-2\,k-1) \cdot \prod_{j=1}^{k}\{\,(\dfrac{2j-1}{N-j+1}) \cdot g_N(k)\,\} \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k-2}\,] \end{cases}$$

$k=1$ のとき　$4 \cdot {}_N\mathrm{C}_{2k} \cdot \dfrac{1}{2N} \cdot g_N(1) = N(N-1)$　から　$g_N(1) = N$

$k>1$ のとき $4\,k \cdot \dfrac{2k-1}{2N-2k+2} \cdot {}_N\mathrm{C}_{2k} \cdot g_N(k) = (N-2\,k+2)(N-2\,k+1) \cdot {}_N\mathrm{C}_{2k-2} \cdot g_N(k-1)$

を解いて　$g_N(k) = (N-k+1) \cdot g_N(k-1)$　なる漸化式が得られる。

$g_N(1) = N$　から、$g_N(k) = \prod_{j=1}^{k}(N-j+1)$　となるので　${}_0H_N(x)$　は次式で表される。

$${}_0H_N(x) = 2^N \cdot x^N + \sum_{k=1}\{(-1)^k \cdot 2^{N-k} \cdot {}_N\mathrm{C}_{2k} \cdot \prod_{j=1}^{k}(2j-1) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k}\}$$

この結果は、第一種のチェビシェフ多項式基本型 ${}_0T_N(x)$ から得られた結果と一致する。しかし、後に述べるエルミート陪多項式基本型　${}_0H_N(x)^{(m)}$ と同じ表現にするために、次式のように書く。

$${}_0H_N(x) = {}_N\mathrm{P}_0 \cdot [\,2^N \cdot x^N + \sum_{k=1}\{(-1)^k \cdot 2^{N-k} \cdot {}_N\mathrm{C}_{2k} \cdot \prod_{j=1}^{k}(2j-1) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k}\}]$$

ただし簡略化のために順列の記号、${}_N\mathrm{P}_0$　を使い、　${}_N\mathrm{P}_0 = \dfrac{N!}{(N-0)!} = 1$　である。

4.　エルミート多項式基本型の性質

4. 1　エルミート多項式基本型とその微分方程式の関係

エルミート多項式基本型の微分方程式とエルミート多項式基本型の中の γ^2 に、$\gamma^2 = -1$ を代入しても、両者の関係はそのまま成立する。論文の最後の方に、関数 ${}_0H_N(x)$ をまとめておいたが、例えば ${}_0H_7(x)$ の中の γ^2 と、エルミート多項式基本型の微分方程式の γ^2 を $\gamma^2 = -1$ として計算すると、エルミート多項式基本型は ${}_0H_7(x) = 128\,x^7 + 1344\,x^5 + 3360\,x^3 + 1680\,x$ となり、

エルミート多項式基本型の微分方程式は ${}_0H_N(x)'' + 2x \cdot {}_0H_N(x)' - 2N \cdot {}_0H_N(x) = 0$ となる。

検算のために、この関数の一階微分および二階微分をとり、計算すると

$$
\begin{aligned}
{}_0H_7(x)'' + 2x \cdot {}_0H_7(x)' = &\quad 5376x^5 + 26880x^3 + 20160x \\
&+ 1792x^7 + 13440x^5 + 20160x^3 + 3360x \\
= &\quad 1792x^7 + 18816x^5 + 47040x^3 + 23520x \\
= &\ 14 \cdot (128x^7 + 1344x^5 + 3360x^3 + 1680x) = 2 \cdot 7 \cdot {}_0H_7(x)
\end{aligned}
$$

となり、$\gamma^2 = -1$ としても成立することが確認できる。

4. 2 エルミート多項式基本型の漸化式

エルミート多項式基本型 ${}_0H_{N-1}(x)$, ${}_0H_N(x)$, ${}_0H_{N+1}(x)$ の間に、

${}_0H_{N+1}(x) - \alpha(N) \cdot x \cdot {}_0H_N(x) + \beta(N) \cdot {}_0H_{N-1}(x) = 0$ なる漸化式が成立すると仮定する。

$$
\begin{cases}
{}_0H_{N-1}(x) = 2^{N-1} \cdot x^{N-1} + \sum_{k=1} \{ (-1)^k \cdot 2^{N-1-k} \cdot {}_{N-1}\mathrm{C}_{2k} \cdot \prod_{j=1}^{k} (2j-1) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-1-2k} \} \\
{}_0H_N(x) = 2^N \cdot x^N + \sum_{k=1} \{ (-1)^k \cdot 2^{N-k} \cdot {}_N\mathrm{C}_{2k} \cdot \prod_{j=1}^{k} (2j-1) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k} \} \\
{}_0H_{N+1}(x) = 2^{N+1} \cdot x^{N+1} + \sum_{k=1} \{ (-1)^k \cdot 2^{N+1-k} \cdot {}_{N+1}\mathrm{C}_{2k} \cdot \prod_{j=1}^{k} (2j-1) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N+1-2k} \}
\end{cases}
$$

まず ${}_0H_{N+1}(x) - \alpha(N) \cdot x \cdot {}_0H_N(x)$ の x^{N+1} の項が 0 となるので、 $\alpha(N) = 2$

次に ${}_0H_{N+1}(x) - \alpha(N) \cdot x \cdot {}_0H_N(x) + \beta(N) \cdot {}_0H_{N-1}(x) = 0$ の $\gamma^2 \cdot x^{N-1}$ の項も 0 となるので、

$-2^N \cdot {}_{N+1}\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 + 2 \cdot 2^{N-1} \cdot {}_N\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 + 2^{N-1} \cdot \beta(N) = 0$ から $\beta(N) = 2N \cdot \gamma^2$

結局漸化式は ${}_0H_{N+1}(x) - 2x \cdot {}_0H_N(x) + 2N \cdot \gamma^2 \cdot {}_0H_{N-1}(x) = 0$ となるはずである。

確認のために ${}_0H_{N+1}(x) - 2x \cdot {}_0H_N(x)$ に $k = l$ を代入して $\gamma^{2l} \cdot x^{N+1-2l}$ の項を計算すると、

$$
\begin{aligned}
{}_0H_{N+1}(x) - 2x \cdot {}_0H_N(x) &= (-1)^l \cdot 2^{N+1-l} \cdot ({}_{N+1}\mathrm{C}_{2l} - {}_N\mathrm{C}_{2l}) \cdot \prod_{j=1}^{l} (2j-1) \cdot \gamma^{2l} \cdot x^{N+1-2l} \\
&= (-1)^l \cdot 2^{N+1-l} \cdot \frac{2l}{N+1-2l} \cdot {}_N\mathrm{C}_{2l} \cdot \prod_{j=1}^{l} (2j-1) \cdot \gamma^{2l} \cdot x^{N+1-2l}
\end{aligned}
$$

となり、 $2N\cdot\gamma^2\cdot{}_0H_{N-1}(x)$ に $k=l-1$ を代入して $\gamma^{2l}\cdot x^{N+1-2l}$ の項を計算すると、

$$2N\cdot\gamma^2\cdot{}_0H_{N-1}(x)=(-1)^{l-1}\cdot 2N\cdot\gamma^2\cdot 2^{N-l}\cdot{}_{N-1}\mathrm{C}_{2l-2}\cdot\prod_{j=1}^{l-1}(2j-1)\cdot\gamma^{2l-2}\cdot x^{N+1-2l}$$

$$=(-1)^{l-1}\cdot 2^{N+1-l}\cdot\frac{2l\,(2l-1)}{N+1-2l}\cdot{}_N\mathrm{C}_{2l}\cdot\prod_{j=1}^{l-1}(2j-1)\cdot\gamma^{2l}\cdot x^{N+1-2l}$$

$$=(-1)^{l-1}\cdot 2^{N+1-l}\cdot\frac{2l}{N+1-2l}\cdot{}_N\mathrm{C}_{2l}\cdot\prod_{j=1}^{l}(2j-1)\cdot\gamma^{2l}\cdot x^{N+1-2l}$$

となるので、漸化式が成立していることが解る。

4．３　エルミート陪多項式基本型とその漸化式

エルミート多項式基本型 ${}_0H_N(x)$ を m 回微分して得られる関数 ${}_0H_N(x)^{(m)}$ を $N-m$ 次のエルミート陪多項式基本型と呼ぶ。まずこの関数の一般式は次のようになる。

$${}_0H_N(x)^{(m)}=2^N\cdot\frac{N!}{(N-m)!}\cdot x^{N-m}+\sum_{k=1}\{(-1)^k\cdot\frac{2^{N-k}}{(2k)!}\cdot\frac{N!}{(N-2k-m)\,!}\cdot\prod_{j=1}^{k}(2j-1)\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-2k-m}\}$$

$$={}_N\mathrm{P}_m\cdot[\,2^N\cdot x^{N-m}+\sum_{k=1}\{(-1)^k\cdot 2^{N-k}\cdot\frac{(N-m)!}{(2k)!(N-2k-m)\,!}\cdot\prod_{j=1}^{k}(2j-1)\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-2k-m}\}]$$

$$={}_N\mathrm{P}_m\cdot[\,2^N\cdot x^{N-m}+\sum_{k=1}\{(-1)^k\cdot 2^{N-k}\cdot{}_{N-m}\mathrm{C}_{2k}\cdot\prod_{j=1}^{k}(2j-1)\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-2k-m}\}]$$

ただし、簡略化のために順列の記号、 $\dfrac{N!}{(N-m)!}={}_N\mathrm{P}_m$ を使って書きなおした。

エルミート陪多項式基本型の ${}_0H_{N-1}(x)^{(m)}$ ，${}_0H_N(x)^{(m)}$ ，${}_0H_{N+1}(x)^{(m)}$ の間に

${}_0H_{N+1}(x)^{(m)}-\alpha(N)\cdot x\cdot{}_0H_N(x)^{(m)}+\beta(N)\cdot{}_0H_{N-1}(x)^{(m)}=0$ なる漸化式が成立すると考える。

$$\begin{cases}{}_0H_{N-1}(x)^{(m)}={}_{N-1}\mathrm{P}_m\cdot[\,2^{N-1}\cdot x^{N-1-m}+\sum_{k=1}\{(-1)^k\cdot 2^{N-1-k}\cdot{}_{N-1-m}\mathrm{C}_{2k}\cdot\prod_{j=1}^{k}(2j-1)\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-1-2k-m}\}]\\ {}_0H_N(x)^{(m)}={}_N\mathrm{P}_m\cdot[\,2^N\cdot x^{N-m}+\sum_{k=1}\{(-1)^k\cdot 2^{N-k}\cdot{}_{N-m}\mathrm{C}_{2k}\cdot\prod_{j=1}^{k}(2j-1)\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-2k-m}\}]\\ {}_0H_{N+1}(x)^{(m)}={}_{N+1}\mathrm{P}_m\cdot[\,2^{N+1}\cdot x^{N+1-m}+\sum_{k=1}\{(-1)^k\cdot 2^{N+1-k}\cdot{}_{N+1-m}\mathrm{C}_{2k}\cdot\prod_{j=1}^{k}(2j-1)\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N+1-2k-m}\}]\end{cases}$$

まず ${}_0H_{N+1}(x)^{(m)}-\alpha(N)\cdot x\cdot {}_0H_N(x)^{(m)}=0$ の x^{N+1-m} の項から、 $\alpha(N)=\dfrac{2(N+1)}{N+1-m}$ 。

次に ${}_0H_{N+1}(x)^{(m)}-\alpha(N)\cdot x\cdot {}_0H_N(x)^{(m)}+\beta(N)\cdot {}_0H_{N-1}(x)^{(m)}=0$ の $\gamma^2\cdot x^{N-1-m}$ の項も

0 となるので、 $\beta(N)=\dfrac{2N(N+1)}{N+1-m}\cdot\gamma^2$ となり、結局漸化式は次式となる。

$$(N+1-m)\cdot {}_0H_{N+1}(x)^{(m)}-2(N+1)\cdot x\cdot {}_0H_N(x)^{(m)}+2N(N+1)\cdot\gamma^2\cdot {}_0H_{N-1}(x)^{(m)}=0$$

確認のために $(N+1-m)\cdot {}_0H_{N+1}(x)^{(m)}-2(N+1)\cdot x\cdot {}_0H_N(x)^{(m)}$ に $k=l$ を代入して

$\gamma^{2l}\cdot x^{N+1-2l-m}$ の項を計算して次式を得る。

$$\frac{(-1)^l}{2^l}\cdot\{(N+1-m)\cdot 2^{N+1}\cdot {}_{N+1}\mathrm{P}_m\cdot {}_{N+1-m}\mathrm{C}_{2l}-2(N+1)\cdot 2^N\cdot {}_N\mathrm{P}_m\cdot {}_{N-m}\mathrm{C}_{2l}\}\cdot\prod_{j=1}^{l}(2j-1)$$
$$=(-1)^l\cdot 2^{N+1-l}\cdot\frac{(N+1)\,!}{(2l)\,!}\cdot\frac{2l}{(N+1-m-2l)\,!}\cdot\prod_{j=1}^{l}(2j-1)$$
$$=(-1)^l\cdot 2^{N+1-l}\cdot\frac{1}{(2l-1)\,!}\cdot {}_{N+1}\mathrm{P}_{m+2l}\cdot\prod_{j=1}^{l}(2j-1)$$

一方、 $2N(N+1)\cdot\gamma^2\cdot {}_0H_{N-1}(x)^{(m)}$ に $k=l-1$ を代入して、$\gamma^{2l}\cdot x^{N+1-2l-m}$ の項を計算して、

$$(-1)^{l-1}\cdot 2N(N+1)\cdot 2^{N-l}\cdot {}_{N-1}\mathrm{P}_m\cdot {}_{N-1-m}\mathrm{C}_{2l-2}$$
$$=(-1)^{l-1}\cdot 2^{N+1-l}\cdot N(N+1)\cdot\frac{(N-1)\,!}{(N-1-m)\,!}\cdot\frac{(N-1-m)\,!}{(N+1-m-2l)\,!\cdot(2l-2)\,!}\cdot\prod_{j=1}^{l-1}(2j-1)$$
$$=(-1)^{l-1}\cdot 2^{N+1-l}\cdot\frac{(2l-1)}{(2l-1)\,!}\cdot\frac{(N+1)\,!}{(N+1-m-2l)\,!}\cdot\prod_{j=1}^{l-1}(2j-1)$$
$$=(-1)^{l-1}\cdot 2^{N+1-l}\cdot\frac{1}{(2l-1)\,!}\cdot {}_{N+1}\mathrm{P}_{m+2l}\cdot\prod_{j=1}^{l}(2j-1)$$

となって、漸化式が成立していることが確認できる。

このエルミート陪多項式基本型の漸化式に $m=0$ を代入すると、すでに述べたエルミート多項式基本型の漸化式に等しくなるので、エルミート陪多項式基本型の漸化式は $m=0$ でも成立する。

また、エルミート多項式基本型の漸化式を m 回微分すると、次式が得られる。

$$ {}_0H_{N+1}(x)^{(m)} - 2x \cdot {}_0H_N(x)^{(m)} - 2m \cdot {}_0H_N(x)^{(m-1)} + 2N \cdot \gamma^2 \cdot {}_0H_{N-1}(x)^{(m)} = 0 $$

この式とエルミート陪多項式基本型との漸化式から、別の漸化式が得られる。

$$ {}_0H_{N+1}(x)^{(m)} = 2(N+1) \cdot {}_0H_N(x)^{(m-1)} $$

$$ (N+1-m) \cdot {}_0H_N(x)^{(m-1)} - x \cdot {}_0H_N(x)^{(m)} + N \cdot \gamma^2 \cdot {}_0H_{N-1}(x)^{(m)} = 0 $$

さらにエルミート多項式基本型の微分方程式を m 回微分して ${}_0H_N(x)^{(m)}$ の微分方程式を得る。

$$ {}_{\mathbf{0}}H_{\boldsymbol{N}}(x)^{(m+2)} - \frac{2x}{\gamma^2} \cdot {}_{\mathbf{0}}H_{\boldsymbol{N}}(x)^{(m+1)} + \frac{2(N-m)}{\gamma^2} \cdot {}_{\mathbf{0}}H_{\boldsymbol{N}}(x)^{(m)} = 0 $$

これらの漸化式と微分方程式は $\gamma^2 = -1$ の場合にも成立する。

また ${}_0H_{N+1}(x)^{(m)} = 2(N+1) \cdot {}_0H_N(x)^{(m-1)}$ の m に $m = 1$ を代入すれば

${}_0H_{N+1}(x)^{(1)} = 2(N+1) \cdot {}_0H_N(x)$ になると思われるので、このことを証明する。まず次式

$$ {}_0H_{N+1}(x)^{(m)} = {}_{N+1}\mathrm{P}_m \cdot [\, 2^{N+1} \cdot x^{N+1-m} + \sum_{k=1} \{\, (-1)^k \cdot 2^{N+1-k} \cdot {}_{N+1-m}\mathrm{C}_{2k} \cdot \prod_{j=1}^{k} (2j-1) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N+1-2k-m} \}] $$

の m に $m = 1$ を代入し、さらに整理して証明できる。

$$ \begin{aligned} {}_0H_{N+1}(x)^{(1)} &= {}_{N+1}\mathrm{P}_1 \cdot [\, 2^{N+1} \cdot x^N + \sum_{k=1} \{ (-1)^k \cdot 2^{N+1-k} \cdot {}_N\mathrm{C}_{2k} \cdot \prod_{j=1}^{k} (2j-1) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k} \}] \\ &= 2(N+1) \cdot [\, 2^N \cdot x^N + \sum_{k=1} \{ (-1)^k \cdot 2^{N-k} \cdot {}_N\mathrm{C}_{2k} \cdot \prod_{j=1}^{k} (2j-1) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k} \}] \\ &= 2(N+1) \cdot {}_0H_N(x) \end{aligned} $$

さらに ${}_0H_{N+1}(x)^{(m)} = 2(N+1) \cdot {}_0H_N(x)^{(m-1)}$ の N に $N+1$を、m に $m = 2$ を代入して、

${}_0H_{N+2}(x)^{(2)} = 2(N+2) \cdot {}_0H_{N+1}(x)^{(1)}$ が得られ、${}_0H_{N+1}(x)^{(1)} = 2(N+1) \cdot {}_0H_N(x)$ を用いて

${}_0H_{N+2}(x)^{(2)} = 2^2 (N+2)(N+1) \cdot {}_0H_N(x)$ となる。この議論を繰り返して、一般に次式が得られる。

$$ {}_0H_{N+\mathrm{m}}(x)^{(m)} = 2^m \cdot {}_{N+m}\mathrm{P}_m \cdot {}_0H_N(x) $$

4．4　エルミート直交関数とその微分方程式

エルミート多項式 $H_N(x)$ と $e^{-\frac{x^2}{2}}$ との積 $y_N = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot H_N(x)$ をエルミート直交関数という。

この関数の一階微分および二階微分を求める。

$$\begin{cases} y_N{}' = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \{ -x \cdot H_N(x) + H_N(x)' \} \\ y_N{}'' = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \{ - H_N(x) + x^2 \cdot H_N(x) - 2x \cdot H_N(x)' + H_N(x)'' \} \end{cases}$$

$y_N{}''$ とエルミート多項式 $H_N(x)$ の微分方程式を利用して次式が得られる。

$$\begin{aligned} y_N{}'' &= e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \{ H_N(x)'' - 2x \cdot H_N(x)' + 2N \cdot H_N(x) + x^2 \cdot H_N(x) - 2N \cdot H_N(x) - H_N(x) \} \\ &= e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot H_N(x) \cdot (x^2 - 2N - 1) = (x^2 - 2N - 1) \cdot y_N \end{aligned}$$

結局　$y_N = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot H_N(x)$ の微分方程式は $y_N{}'' + (-x^2 + 2N + 1) \cdot y_N = 0$ 　で表される。

4．5　エルミート直交関数基本型とその微分方程式

エルミート多項式基本型 ${}_0H_N(x)$ と $e^{-\frac{x^2}{2\gamma^2}}$ との積、${}_0y_N = e^{-\frac{x^2}{2\gamma^2}} \cdot {}_0H_N(x)$ をエルミート直交関数基本型と定義する。この関数の一階微分および二階微分をとると、次のようになる。

$$\begin{cases} {}_0y_N{}' = e^{-\frac{x^2}{2\gamma^2}} \cdot \{ -\dfrac{x}{\gamma^2} \cdot {}_0H_N(x) + {}_0H_N(x)' \} \\ {}_0y_N{}'' = e^{-\frac{x^2}{2\gamma^2}} \cdot \{ \dfrac{x^2}{\gamma^4} \cdot {}_0H_N(x) - \dfrac{1}{\gamma^2} \cdot {}_0H_N(x) - \dfrac{2x}{\gamma^2} \cdot {}_0H_N(x)' + {}_0H_N(x)'' \} \end{cases}$$

${}_0y_N{}'$ と ${}_0y_N{}''$ とエルミート多項式基本型 ${}_0H_N(x)$ の微分方程式を利用して次式が得られる。

$$\begin{aligned} {}_0y_N{}'' &= e^{-\frac{x^2}{2\gamma^2}} \cdot \left\{ \frac{x^2}{\gamma^4} \cdot {}_0H_N(x) - \frac{1+2N}{\gamma^2} \cdot {}_0H_N(x) \right\} = e^{-\frac{x^2}{2\gamma^2}} \cdot {}_0H_N(x) \cdot \left(\frac{x^2}{\gamma^4} - \frac{1+2N}{\gamma^2} \right) \\ &= {}_0y_N \cdot \left(\frac{x^2}{\gamma^4} - \frac{1+2N}{\gamma^2} \right) \end{aligned}$$

結局エルミート直交関数基本型の微分方程式は $\ {}_0y_N\,'' + \left(-\dfrac{x^2}{\gamma^4} + \dfrac{1+2N}{\gamma^2}\right)\cdot {}_0y_N = 0$ となる。

このエルミート直交関数基本型の微分方程式は $\gamma^2 = -1$ でも成立する。

例えば $\ {}_0y_7 = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (128x^7 + 1344x^5 + 3360x^3 + 1680x)$ の一階微分、二階微分は次式となり、

$${}_0y_7' = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (128x^8 + 2240x^6 + 10080x^4 + 11760x^2 + 1680)$$

$${}_0y_7'' = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (128x^9 + 3264x^7 + 23520x^5 + 52080x^3 + 25200x)$$

$$= e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \{\, x^2 \cdot (128x^7 + 1344x^5 + 3360x^3 + 1680x)$$

$$+ 15(\, 128x^7 + 1344x^5 + 3360x^3 + 1680x) \,\}$$

${}_0y_7'' = (x^2 + 1 + 2\cdot 7)\cdot {}_0y_7$ となるので ${}_0y_7'' - (\, x^2 + 1 + 2\cdot 7\,)\cdot {}_0y_7 = 0$ が成立する。

下にエルミート多項式基本型 ${}_0H_N(x)$ とエルミート陪多項式基本型 ${}_0H_N(x)^{(m)}$ を挙げる。

${}_0H_0(x) = 1$ ， ${}_0H_0(x)^{(1)} = 0$

${}_0H_1(x) = {}_1\mathrm{P}_0 \cdot 2^1 \cdot x$ ， ${}_0H_1(x)^{(1)} = {}_1\mathrm{P}_1 \cdot 2^1$

${}_0H_2(x) = {}_2\mathrm{P}_0 \cdot (\, 2^2 \cdot x^2 - 2^1 \cdot {}_2\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2)$ ， ${}_0H_2(x)^{(1)} = {}_2\mathrm{P}_1 \cdot 2^2 \cdot x$ ， ${}_0H_2(x)^{(2)} = {}_2\mathrm{P}_2 \cdot 2^2$

${}_0H_3(x) = {}_3\mathrm{P}_0 \cdot (\, 2^3 \cdot x^3 - 2^2 \cdot {}_3\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x)$

${}_0H_3(x)^{(1)} = {}_3\mathrm{P}_1 \cdot (\, 2^3 \cdot x^2 - 2^2 \cdot {}_2\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2)$ ， ${}_0H_3(x)^{(2)} = {}_3\mathrm{P}_2 \cdot 2^3 \cdot x$ ， ${}_0H_3(x)^{(3)} = {}_3\mathrm{P}_3 \cdot 2^3$

${}_0H_4(x) = {}_4\mathrm{P}_0 \cdot (\, 2^4 \cdot x^4 - 2^3 \cdot {}_4\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^2 + 2^2 \cdot {}_4\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4)$

${}_0H_4(x)^{(1)} = {}_4\mathrm{P}_1 \cdot (\, 2^4 \cdot x^3 - 2^3 \cdot {}_3\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x)$ ，

${}_0H_4(x)^{(2)} = {}_4\mathrm{P}_2 \cdot (\, 2^4 \cdot x^2 - 2^3 \cdot {}_2\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2)$ ， ${}_0H_4(x)^{(3)} = {}_4\mathrm{P}_3 \cdot 2^4 \cdot x$ ， ${}_0H_4(x)^{(4)} = {}_4\mathrm{P}_4 \cdot 2^4$

${}_0H_5(x) = {}_5\mathrm{P}_0 \cdot (\, 2^5 \cdot x^5 - 2^4 \cdot {}_5\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^3 + 2^3 \cdot {}_5\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x)$

${}_0H_5(x)^{(1)} = {}_5\mathrm{P}_1 \cdot (\, 2^5 \cdot x^4 - 2^4 \cdot {}_4\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^2 + 2^3 \cdot {}_4\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4)$

$${}_0H_5(x)^{(2)} = {}_5\mathrm{P}_2 \cdot (\ 2^5 \cdot x^3 - 2^4 \cdot {}_3\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x)$$

$${}_0H_5(x)^{(3)} = {}_5\mathrm{P}_3 \cdot (\ 2^5 \cdot x^2 - 2^4 \cdot {}_2\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2)\ , \quad {}_0H_5(x)^{(4)} = {}_5\mathrm{P}_4 \cdot 2^5 \cdot x \ , \quad {}_0H_5(x)^{(5)} = {}_5\mathrm{P}_5 \cdot 2^5$$

$${}_0H_6(x) = {}_6\mathrm{P}_0 \cdot (\ 2^6 \cdot x^6 - 2^5 \cdot {}_6\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^4 + 2^4 \cdot {}_6\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^2 - 2^3 \cdot {}_6\mathrm{C}_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6)$$

$${}_0H_6(x)^{(1)} = {}_6\mathrm{P}_1 \cdot (\ 2^6 \cdot x^5 - 2^5 \cdot {}_5\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^3 + 2^4 \cdot {}_5\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x)$$

$${}_0H_6(x)^{(2)} = {}_6\mathrm{P}_2 \cdot (\ 2^6 \cdot x^4 - 2^5 \cdot {}_4\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^2 + 2^4 \cdot {}_4\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4)$$

$${}_0H_6(x)^{(3)} = {}_6\mathrm{P}_3 \cdot (\ 2^6 \cdot x^3 - 2^5 \cdot {}_3\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x)$$

$${}_0H_6(x)^{(4)} = {}_6\mathrm{P}_4 \cdot (\ 2^6 \cdot x^2 - 2^5 \cdot {}_2\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2)\ , \quad {}_0H_6(x)^{(5)} = {}_6\mathrm{P}_5 \cdot 2^6 \cdot x \ , \quad {}_0H_6(x)^{(6)} = {}_6\mathrm{P}_6 \cdot 2^6$$

$${}_0H_7(x) = {}_7\mathrm{P}_0 \cdot (\ 2^7 \cdot x^7 - 2^6 \cdot {}_7\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^5 + 2^5 \cdot {}_7\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^3 - 2^4 \cdot {}_7\mathrm{C}_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x)$$

$${}_0H_7(x)^{(1)} = {}_7\mathrm{P}_1 \cdot (\ 2^7 \cdot x^6 - 2^6 \cdot {}_6\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^4 + 2^5 \cdot {}_6\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^2 - 2^4 \cdot {}_6\mathrm{C}_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6)$$

$${}_0H_7(x)^{(2)} = {}_7\mathrm{P}_2 \cdot (\ 2^7 \cdot x^5 - 2^6 \cdot {}_5\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^3 + 2^5 \cdot {}_5\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x)$$

$${}_0H_7(x)^{(3)} = {}_7\mathrm{P}_3 \cdot (\ 2^7 \cdot x^4 - 2^6 \cdot {}_4\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^2 + 2^5 \cdot {}_4\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4)$$

$${}_0H_7(x)^{(4)} = {}_7\mathrm{P}_4 \cdot (\ 2^7 \cdot x^3 - 2^6 \cdot {}_3\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x)\ ,$$

$${}_0H_7(x)^{(5)} = {}_7\mathrm{P}_5 \cdot (\ 2^7 \cdot x^2 - 2^6 \cdot {}_2\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2)\ , \quad {}_0H_7(x)^{(6)} = {}_7\mathrm{P}_6 \cdot 2^7 \cdot x \ , \quad {}_0H_7(x)^{(7)} = {}_7\mathrm{P}_7 \cdot 2^7$$

$$\begin{aligned}{}_0H_8(x) = {}_8\mathrm{P}_0 \cdot (\ & 2^8 \cdot x^8 - 2^7 \cdot {}_8\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^6 + 2^6 \cdot {}_8\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^4 - 2^5 \cdot {}_8\mathrm{C}_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x^2 \\ & + 2^4 \cdot {}_8\mathrm{C}_8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \gamma^8)\end{aligned}$$

$${}_0H_8(x)^{(1)} = {}_8\mathrm{P}_1 \cdot (\ 2^8 \cdot x^7 - 2^7 \cdot {}_7\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^5 + 2^6 \cdot {}_7\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^3 - 2^5 \cdot {}_7\mathrm{C}_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x)$$

$${}_0H_8(x)^{(2)} = {}_8\mathrm{P}_2 \cdot (\ 2^8 \cdot x^6 - 2^7 \cdot {}_6\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^4 + 2^6 \cdot {}_6\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^2 - 2^5 \cdot {}_6\mathrm{C}_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6)$$

$${}_0H_8(x)^{(3)} = {}_8\mathrm{P}_3 \cdot (\ 2^8 \cdot x^5 - 2^7 \cdot {}_5\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^3 + 2^6 \cdot {}_5\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x)$$

$${}_0H_8(x)^{(4)} = {}_8\mathrm{P}_4 \cdot (\ 2^8 \cdot x^4 - 2^7 \cdot {}_4\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^2 + 2^6 \cdot {}_4\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4)$$

$${}_0H_8(x)^{(5)} = {}_8\mathrm{P}_5 \cdot (\ 2^8 \cdot x^3 - 2^7 \cdot {}_3\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x)$$

$${}_0H_8(x)^{(6)} = {}_8\mathrm{P}_6 \cdot (\ 2^8 \cdot x^2 - 2^7 \cdot {}_2\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2)\ ,\quad {}_0H_8(x)^{(7)} = {}_8\mathrm{P}_7 \cdot 2^8 \cdot x\ ,\quad {}_0H_8(x)^{(8)} = {}_8\mathrm{P}_8 \cdot 2^8$$

$$\begin{aligned}{}_0H_9(x) = {}_9\mathrm{P}_0 \cdot (\ & 2^9 \cdot x^9 - 2^8 \cdot {}_9\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^7 + 2^7 \cdot {}_9\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^5 - 2^6 \cdot {}_9\mathrm{C}_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x^3 \\ & + 2^5 \cdot {}_9\mathrm{C}_8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \gamma^8 \cdot x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}{}_0H_9(x)^{(1)} = {}_9\mathrm{P}_1 \cdot (\ & 2^9 \cdot x^8 - 2^8 \cdot {}_8\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^6 + 2^7 \cdot {}_8\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^4 - 2^6 \cdot {}_8\mathrm{C}_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x^2 \\ & + 2^5 \cdot {}_8\mathrm{C}_8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \gamma^8)\end{aligned}$$

$${}_0H_9(x)^{(2)} = {}_9\mathrm{P}_2 \cdot (\ 2^9 \cdot x^7 - 2^8 \cdot {}_7\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^5 + 2^7 \cdot {}_7\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^3 - 2^6 \cdot {}_7\mathrm{C}_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x)$$

$${}_0H_9(x)^{(3)} = {}_9\mathrm{P}_3 \cdot (\ 2^9 \cdot x^6 - 2^8 \cdot {}_6\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^4 + 2^7 \cdot {}_6\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^2 - 2^6 \cdot {}_6\mathrm{C}_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6)$$

$${}_0H_9(x)^{(4)} = {}_9\mathrm{P}_4 \cdot (\ 2^9 \cdot x^5 - 2^8 \cdot {}_5\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^3 + 2^7 \cdot {}_5\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x)$$

$${}_0H_9(x)^{(5)} = {}_9\mathrm{P}_5 \cdot (\ 2^9 \cdot x^4 - 2^8 \cdot {}_4\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^2 + 2^7 \cdot {}_4\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4)$$

$${}_0H_9(x)^{(6)} = {}_9\mathrm{P}_6 \cdot (\ 2^9 \cdot x^3 - 2^8 \cdot {}_3\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x)\ ,$$

$${}_0H_9(x)^{(7)} = {}_9\mathrm{P}_7 \cdot (\ 2^9 \cdot x^2 - 2^8 \cdot {}_2\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2)\ ,\quad {}_0H_9(x)^{(8)} = {}_9\mathrm{P}_8 \cdot 2^9 \cdot x\ ,\quad {}_0H_9(x)^{(9)} = {}_9\mathrm{P}_9 \cdot 2^9$$

$$\begin{aligned}{}_0H_{10}(x) = {}_{10}\mathrm{P}_0 \cdot (\ & 2^{10} \cdot x^{10} - 2^9 \cdot {}_{10}\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^8 + 2^8 \cdot {}_{10}\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^6 - 2^7 \cdot {}_{10}\mathrm{C}_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x^4 \\ & + 2^6 \cdot {}_{10}\mathrm{C}_8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \gamma^8 \cdot x^2 - 2^5 \cdot {}_{10}\mathrm{C}_{10} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \gamma^{10})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}{}_0H_{10}(x)^{(1)} = {}_{10}\mathrm{P}_1 \cdot (\ & 2^{10} \cdot x^9 - 2^9 \cdot {}_9\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^7 + 2^8 \cdot {}_9\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^5 - 2^7 \cdot {}_9\mathrm{C}_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x^3 \\ & + 2^6 \cdot {}_9\mathrm{C}_8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \gamma^8 \cdot x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}{}_0H_{10}(x)^{(2)} = {}_{10}\mathrm{P}_2 \cdot (\ & 2^{10} \cdot x^8 - 2^9 \cdot {}_8\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^6 + 2^8 \cdot {}_8\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^4 - 2^7 \cdot {}_8\mathrm{C}_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x^2 \\ & + 2^6 \cdot {}_8\mathrm{C}_8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \gamma^8)\end{aligned}$$

$${}_0H_{10}(x)^{(3)} = {}_{10}\mathrm{P}_3 \cdot (\ 2^{10} \cdot x^7 - 2^9 \cdot {}_7\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^5 + 2^8 \cdot {}_7\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^3 - 2^7 \cdot {}_7\mathrm{C}_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x)$$

$${}_0H_{10}(x)^{(4)} = {}_{10}\mathrm{P}_4 \cdot (\ 2^{10} \cdot x^6 - 2^9 \cdot {}_6\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^4 + 2^8 \cdot {}_6\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^2 - 2^7 \cdot {}_6\mathrm{C}_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6)$$

$${}_0H_{10}(x)^{(5)} = {}_{10}\mathrm{P}_5 \cdot (\ 2^{10} \cdot x^5 - 2^9 \cdot {}_5\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^3 + 2^8 \cdot {}_5\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x)$$

$${}_0H_{10}(x)^{(6)} = {}_{10}\mathrm{P}_6 \cdot (\, 2^{10} \cdot x^4 - 2^9 \cdot {}_4\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^2 + 2^8 \cdot {}_4\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4)$$

$${}_0H_{10}(x)^{(7)} = {}_{10}\mathrm{P}_7 \cdot (\, 2^{10} \cdot x^3 - 2^9 \cdot {}_3\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x)$$

$${}_0H_{10}(x)^{(8)} = {}_{10}\mathrm{P}_8 \cdot (\, 2^{10} \cdot x^2 - 2^9 \cdot {}_2\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2),\ {}_0H_{10}(x)^{(9)} = {}_{10}\mathrm{P}_9 \cdot 2^{10} \cdot x\ ,\ {}_0H_{10}(x)^{(10)} = {}_{10}\mathrm{P}_{10} \cdot 2^{10}$$

$$\begin{aligned}{}_0H_{11}(x) = {}_{11}\mathrm{P}_0 \cdot (\, & 2^{11} \cdot x^{11} - 2^{10} \cdot {}_{11}\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^9 + 2^9 \cdot {}_{11}\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^7 - 2^8 \cdot {}_{11}\mathrm{C}_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x^5 \\ & + 2^7 \cdot {}_{11}\mathrm{C}_8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \gamma^8 \cdot x^3 - 2^6 \cdot {}_{11}\mathrm{C}_{10} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \gamma^{10} \cdot x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}{}_0H_{11}(x)^{(1)} = {}_{11}\mathrm{P}_1 \cdot (\, & 2^{11} \cdot x^{10} - 2^{10} \cdot {}_{10}\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^8 + 2^9 \cdot {}_{10}\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^6 - 2^8 \cdot {}_{10}\mathrm{C}_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x^4 \\ & + 2^7 \cdot {}_{10}\mathrm{C}_8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \gamma^8 \cdot x^2 - 2^6 \cdot {}_{10}\mathrm{C}_{10} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \gamma^{10})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}{}_0H_{11}(x)^{(2)} = {}_{11}\mathrm{P}_2 \cdot (\, & 2^{11} \cdot x^9 - 2^{10} \cdot {}_9\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^7 + 2^9 \cdot {}_9\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^5 - 2^8 \cdot {}_9\mathrm{C}_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x^3 \\ & + 2^7 \cdot {}_9\mathrm{C}_8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \gamma^8 \cdot x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}{}_0H_{11}(x)^{(3)} = {}_{11}\mathrm{P}_3 \cdot (\, & 2^{11} \cdot x^8 - 2^{10} \cdot {}_8\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^6 + 2^9 \cdot {}_8\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^4 - 2^8 \cdot {}_8\mathrm{C}_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x^2 \\ & + 2^7 \cdot {}_8\mathrm{C}_8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \gamma^8)\end{aligned}$$

$${}_0H_{11}(x)^{(4)} = {}_{11}\mathrm{P}_4 \cdot (\, 2^{11} \cdot x^7 - 2^{10} \cdot {}_7\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^5 + 2^9 \cdot {}_7\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^3 - 2^8 \cdot {}_7\mathrm{C}_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x)$$

$${}_0H_{11}(x)^{(5)} = {}_{11}\mathrm{P}_5 \cdot (\, 2^{11} \cdot x^6 - 2^{10} \cdot {}_6\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^4 + 2^9 \cdot {}_6\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^2 - 2^8 \cdot {}_6\mathrm{C}_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6)$$

$${}_0H_{11}(x)^{(6)} = {}_{11}\mathrm{P}_6 \cdot (\, 2^{11} \cdot x^5 - 2^{10} \cdot {}_5\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^3 + 2^9 \cdot {}_5\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x)$$

$${}_0H_{11}(x)^{(7)} = {}_{11}\mathrm{P}_7 \cdot (\, 2^{11} \cdot x^4 - 2^{10} \cdot {}_4\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^2 + 2^9 \cdot {}_4\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4)$$

$${}_0H_{11}(x)^{(8)} = {}_{11}\mathrm{P}_8 \cdot (\, 2^{11} \cdot x^3 - 2^{10} \cdot {}_3\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x)\ ,$$

$${}_0H_{11}(x)^{(9)} = {}_{11}\mathrm{P}_9 \cdot (\, 2^{11} \cdot x^2 - 2^{10} \cdot {}_2\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2),\ {}_0H_{11}(x)^{(10)} = {}_{11}\mathrm{P}_{10} \cdot 2^{11} \cdot x,\ {}_0H_{11}(x)^{(11)} = {}_{11}\mathrm{P}_{11} \cdot 2^{11}$$

$$\begin{aligned}{}_0H_{12}(x) = {}_{12}\mathrm{P}_0 \cdot (\, & 2^{12} \cdot x^{12} - 2^{11} \cdot {}_{12}\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^{10} + 2^{10} \cdot {}_{12}\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^8 - 2^9 \cdot {}_{12}\mathrm{C}_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x^6 \\ & + 2^8 \cdot {}_{12}\mathrm{C}_8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \gamma^8 \cdot x^4 - 2^7 \cdot {}_{12}\mathrm{C}_{10} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \gamma^{10} \cdot x^2 \\ & + 2^6 \cdot {}_{12}\mathrm{C}_{12} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \gamma^{12})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}{}_0H_{12}(x)^{(1)} = {}_{12}\mathrm{P}_1 \cdot (\, & 2^{12} \cdot x^{11} - 2^{11} \cdot {}_{11}\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^9 + 2^{10} \cdot {}_{11}\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^7 - 2^9 \cdot {}_{11}\mathrm{C}_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x^5 \\ & + 2^8 \cdot {}_{11}\mathrm{C}_8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \gamma^8 \cdot x^3 - 2^7 \cdot {}_{11}\mathrm{C}_{10} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \gamma^{10} \cdot x)\end{aligned}$$

$$ {}_0H_{12}(x)^{(2)} = {}_{12}\mathrm{P}_2\cdot(\,2^{12}\cdot x^{10}-2^{11}\cdot{}_{10}\mathrm{C}_2\cdot\gamma^2\cdot x^8+2^{10}\cdot{}_{10}\mathrm{C}_4\cdot3\cdot\gamma^4\cdot x^6-2^9\cdot{}_{10}\mathrm{C}_6\cdot3\cdot5\cdot\gamma^6\cdot x^4 \\ +2^8\cdot{}_{10}\mathrm{C}_8\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\gamma^8\cdot x^2-2^7\cdot{}_{10}\mathrm{C}_{10}\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot\gamma^{10}) $$

$$ {}_0H_{12}(x)^{(3)} = {}_{12}\mathrm{P}_3\cdot(\,2^{12}\cdot x^9-2^{11}\cdot{}_9\mathrm{C}_2\cdot\gamma^2\cdot x^7+2^{10}\cdot{}_9\mathrm{C}_4\cdot3\cdot\gamma^4\cdot x^5-2^9\cdot{}_9\mathrm{C}_6\cdot3\cdot5\cdot\gamma^6\cdot x^3 \\ +2^8\cdot{}_9\mathrm{C}_8\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\gamma^8\cdot x) $$

$$ {}_0H_{12}(x)^{(4)} = {}_{12}\mathrm{P}_4\cdot(\,2^{12}\cdot x^8-2^{11}\cdot{}_8\mathrm{C}_2\cdot\gamma^2\cdot x^6+2^{10}\cdot{}_8\mathrm{C}_4\cdot3\cdot\gamma^4\cdot x^4-2^9\cdot{}_8\mathrm{C}_6\cdot3\cdot5\cdot\gamma^6\cdot x^2 \\ +2^8\cdot{}_8\mathrm{C}_8\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\gamma^8) $$

$$ {}_0H_{12}(x)^{(5)} = {}_{12}\mathrm{P}_5\cdot(\,2^{12}\cdot x^7-2^{11}\cdot{}_7\mathrm{C}_2\cdot\gamma^2\cdot x^5+2^{10}\cdot{}_7\mathrm{C}_4\cdot3\cdot\gamma^4\cdot x^3-2^9\cdot{}_7\mathrm{C}_6\cdot3\cdot5\cdot\gamma^6\cdot x) $$

$$ {}_0H_{12}(x)^{(6)} = {}_{12}\mathrm{P}_6\cdot(\,2^{12}\cdot x^6-2^{11}\cdot{}_6\mathrm{C}_2\cdot\gamma^2\cdot x^4+2^{10}\cdot{}_6\mathrm{C}_4\cdot3\cdot\gamma^4\cdot x^2-2^9\cdot{}_6\mathrm{C}_6\cdot3\cdot5\cdot\gamma^6) $$

$$ {}_0H_{12}(x)^{(7)} = {}_{12}\mathrm{P}_7\cdot(\,2^{12}\cdot x^5-2^{11}\cdot{}_5\mathrm{C}_2\cdot\gamma^2\cdot x^3+2^{10}\cdot{}_5\mathrm{C}_4\cdot3\cdot\gamma^4\cdot x) $$

$$ {}_0H_{12}(x)^{(8)} = {}_{12}\mathrm{P}_8\cdot(\,2^{12}\cdot x^4-2^{11}\cdot{}_4\mathrm{C}_2\cdot\gamma^2\cdot x^2+2^{10}\cdot{}_4\mathrm{C}_4\cdot3\cdot\gamma^4) $$

$$ {}_0H_{12}(x)^{(9)} = {}_{12}\mathrm{P}_9\cdot(\,2^{12}\cdot x^3-2^{11}\cdot{}_3\mathrm{C}_2\cdot\gamma^2\cdot x), $$

$$ {}_0H_{12}(x)^{(10)} = {}_{12}\mathrm{P}_{10}\cdot(\,2^{12}\cdot x^2-2^{11}\cdot{}_2\mathrm{C}_2\cdot\gamma^2),\ \ {}_0H_{12}(x)^{(11)} = {}_{12}\mathrm{P}_{11}\cdot2^{12}\cdot x,\ \ {}_0H_{12}(x)^{(12)} = {}_{12}\mathrm{P}_{12}\cdot2^{12} $$

$$ {}_0H_{13}(x) = {}_{13}\mathrm{P}_0\cdot(2^{13}\cdot x^{13}-2^{12}\cdot{}_{13}\mathrm{C}_2\cdot\gamma^2\cdot x^{11}+2^{11}\cdot{}_{13}\mathrm{C}_4\cdot3\cdot\gamma^4\cdot x^9-2^{10}\cdot{}_{13}\mathrm{C}_6\cdot3\cdot5\cdot\gamma^6\cdot x^7 \\ +2^9\cdot{}_{13}\mathrm{C}_8\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\gamma^8\cdot x^5-2^8\cdot{}_{13}\mathrm{C}_{10}\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot\gamma^{10}\cdot x^3 \\ +2^7\cdot{}_{13}\mathrm{C}_{12}\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot\gamma^{12}\cdot x) $$

$$ {}_0H_{13}(x)^{(1)} = {}_{13}\mathrm{P}_1\cdot(2^{13}\cdot x^{12}-2^{12}\cdot{}_{12}\mathrm{C}_2\cdot\gamma^2\cdot x^{10}+2^{11}\cdot{}_{12}\mathrm{C}_4\cdot3\cdot\gamma^4\cdot x^8-2^{10}\cdot{}_{12}\mathrm{C}_6\cdot3\cdot5\cdot\gamma^6\cdot x^6 \\ +2^9\cdot{}_{12}\mathrm{C}_8\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\gamma^8\cdot x^4-2^8\cdot{}_{12}\mathrm{C}_{10}\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot\gamma^{10}\cdot x^2 \\ +2^7\cdot{}_{12}\mathrm{C}_{12}\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot\gamma^{12}) $$

$$ {}_0H_{13}(x)^{(2)} = {}_{13}\mathrm{P}_2\cdot(2^{13}\cdot x^{11}-2^{12}\cdot{}_{11}\mathrm{C}_2\cdot\gamma^2\cdot x^9+2^{11}\cdot{}_{11}\mathrm{C}_4\cdot3\cdot\gamma^4\cdot x^7-2^{10}\cdot{}_{11}\mathrm{C}_6\cdot3\cdot5\cdot\gamma^6\cdot x^5 \\ +2^9\cdot{}_{11}\mathrm{C}_8\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\gamma^8\cdot x^3-2^8\cdot{}_{11}\mathrm{C}_{10}\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot\gamma^{10}\cdot x) $$

$$ {}_0H_{13}(x)^{(3)} = {}_{13}\mathrm{P}_3\cdot(2^{13}\cdot x^{10}-2^{12}\cdot{}_{10}\mathrm{C}_2\cdot\gamma^2\cdot x^8+2^{11}\cdot{}_{10}\mathrm{C}_4\cdot3\cdot\gamma^4\cdot x^6-2^{10}\cdot{}_{10}\mathrm{C}_6\cdot3\cdot5\cdot\gamma^6\cdot x^4 \\ +2^9\cdot{}_{10}\mathrm{C}_8\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\gamma^8\cdot x^2-2^8\cdot{}_{10}\mathrm{C}_{10}\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot\gamma^{10}) $$

$$\begin{aligned}{}_{0}H_{13}(x)^{(4)} = {}_{13}\mathrm{P}_{4}\cdot(&\,2^{13}\cdot x^{9}-2^{12}\cdot{}_{9}\mathrm{C}_{2}\cdot\gamma^{2}\cdot x^{7}+2^{11}\cdot{}_{9}\mathrm{C}_{4}\cdot3\cdot\gamma^{4}\cdot x^{5}-2^{10}\cdot{}_{9}\mathrm{C}_{6}\cdot3\cdot5\cdot\gamma^{6}\cdot x^{3}\\&+2^{9}\cdot{}_{9}\mathrm{C}_{8}\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\gamma^{8}\cdot x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}{}_{0}H_{13}(x)^{(5)} = {}_{13}\mathrm{P}_{5}\cdot(&\,2^{13}\cdot x^{8}-2^{12}\cdot{}_{8}\mathrm{C}_{2}\cdot\gamma^{2}\cdot x^{6}+2^{11}\cdot{}_{8}\mathrm{C}_{4}\cdot3\cdot\gamma^{4}\cdot x^{4}-2^{10}\cdot{}_{8}\mathrm{C}_{6}\cdot3\cdot5\cdot\gamma^{6}\cdot x^{2}\\&+2^{9}\cdot{}_{8}\mathrm{C}_{8}\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\gamma^{8})\end{aligned}$$

$${}_{0}H_{13}(x)^{(6)} = {}_{13}\mathrm{P}_{6}\cdot(\,2^{13}\cdot x^{7}-2^{12}\cdot{}_{7}\mathrm{C}_{2}\cdot\gamma^{2}\cdot x^{5}+2^{11}\cdot{}_{7}\mathrm{C}_{4}\cdot3\cdot\gamma^{4}\cdot x^{3}-2^{10}\cdot{}_{7}\mathrm{C}_{6}\cdot3\cdot5\cdot\gamma^{6}\cdot x)$$

$${}_{0}H_{13}(x)^{(7)} = {}_{13}\mathrm{P}_{7}\cdot(\,2^{13}\cdot x^{6}-2^{12}\cdot{}_{6}\mathrm{C}_{2}\cdot\gamma^{2}\cdot x^{4}+2^{11}\cdot{}_{6}\mathrm{C}_{4}\cdot3\cdot\gamma^{4}\cdot x^{2}-2^{10}\cdot{}_{6}\mathrm{C}_{6}\cdot3\cdot5\cdot\gamma^{6})$$

$${}_{0}H_{13}(x)^{(8)} = {}_{13}\mathrm{P}_{8}\cdot(\,2^{13}\cdot x^{5}-2^{12}\cdot{}_{5}\mathrm{C}_{2}\cdot\gamma^{2}\cdot x^{3}+2^{11}\cdot{}_{5}\mathrm{C}_{4}\cdot3\cdot\gamma^{4}\cdot x)$$

$${}_{0}H_{13}(x)^{(9)} = {}_{13}\mathrm{P}_{9}\cdot(\,2^{13}\cdot x^{4}-2^{12}\cdot{}_{4}\mathrm{C}_{2}\cdot\gamma^{2}\cdot x^{2}+2^{11}\cdot{}_{4}\mathrm{C}_{4}\cdot3\cdot\gamma^{4})$$

$${}_{0}H_{13}(x)^{(10)} = {}_{13}\mathrm{P}_{10}\cdot(\,2^{13}\cdot x^{3}-2^{12}\cdot{}_{3}\mathrm{C}_{2}\cdot\gamma^{2}\cdot x)$$

$${}_{0}H_{13}(x)^{(11)} = {}_{13}\mathrm{P}_{11}\cdot(\,2^{13}\cdot x^{2}-2^{12}\cdot{}_{2}\mathrm{C}_{2}\cdot\gamma^{2}),\quad {}_{0}H_{13}(x)^{(12)} = {}_{13}\mathrm{P}_{12}\cdot2^{13}\cdot x,\quad {}_{0}H_{13}(x)^{(13)} = {}_{13}\mathrm{P}_{13}\cdot2^{13}$$

$$\begin{aligned}{}_{0}H_{14}(x) = {}_{14}\mathrm{P}_{0}\cdot(&\,2^{14}\cdot x^{14}-2^{13}\cdot{}_{14}\mathrm{C}_{2}\cdot\gamma^{2}\cdot x^{12}+2^{12}\cdot{}_{14}\mathrm{C}_{4}\cdot3\cdot\gamma^{4}\cdot x^{10}-2^{11}\cdot{}_{14}\mathrm{C}_{6}\cdot3\cdot5\cdot\gamma^{6}\cdot x^{8}\\&+2^{10}\cdot{}_{14}\mathrm{C}_{8}\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\gamma^{8}\cdot x^{6}-2^{9}\cdot{}_{14}\mathrm{C}_{10}\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot\gamma^{10}\cdot x^{4}\\&+2^{8}\cdot{}_{14}\mathrm{C}_{12}\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot\gamma^{12}\cdot x^{2}-2^{7}\cdot{}_{14}\mathrm{C}_{14}\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot13\cdot\gamma^{14})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}{}_{0}H_{14}(x)^{(1)} = {}_{14}\mathrm{P}_{1}\cdot(&\,2^{14}\cdot x^{13}-2^{13}\cdot{}_{13}\mathrm{C}_{2}\cdot\gamma^{2}\cdot x^{11}+2^{12}\cdot{}_{13}\mathrm{C}_{4}\cdot3\cdot\gamma^{4}\cdot x^{9}-2^{11}\cdot{}_{13}\mathrm{C}_{6}\cdot3\cdot5\cdot\gamma^{6}\cdot x^{7}\\&+2^{10}\cdot{}_{13}\mathrm{C}_{8}\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\gamma^{8}\cdot x^{5}-2^{9}\cdot{}_{13}\mathrm{C}_{10}\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot\gamma^{10}\cdot x^{3}\\&+2^{8}\cdot{}_{13}\mathrm{C}_{12}\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot\gamma^{12}\cdot x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}{}_{0}H_{14}(x)^{(2)} = {}_{14}\mathrm{P}_{2}\cdot(&\,2^{14}\cdot x^{12}-2^{13}\cdot{}_{12}\mathrm{C}_{2}\cdot\gamma^{2}\cdot x^{10}+2^{12}\cdot{}_{12}\mathrm{C}_{4}\cdot3\cdot\gamma^{4}\cdot x^{8}-2^{11}\cdot{}_{12}\mathrm{C}_{6}\cdot3\cdot5\cdot\gamma^{6}\cdot x^{6}\\&+2^{10}\cdot{}_{12}\mathrm{C}_{8}\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\gamma^{8}\cdot x^{4}-2^{9}\cdot{}_{12}\mathrm{C}_{10}\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot\gamma^{10}\cdot x^{2}\\&+2^{8}\cdot{}_{12}\mathrm{C}_{12}\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot\gamma^{12})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}{}_{0}H_{14}(x)^{(3)} = {}_{14}\mathrm{P}_{3}\cdot(&\,2^{14}\cdot x^{11}-2^{13}\cdot{}_{11}\mathrm{C}_{2}\cdot\gamma^{2}\cdot x^{9}+2^{12}\cdot{}_{11}\mathrm{C}_{4}\cdot3\cdot\gamma^{4}\cdot x^{7}-2^{11}\cdot{}_{11}\mathrm{C}_{6}\cdot3\cdot5\cdot\gamma^{6}\cdot x^{5}\\&+2^{10}\cdot{}_{11}\mathrm{C}_{8}\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\gamma^{8}\cdot x^{3}-2^{9}\cdot{}_{11}\mathrm{C}_{10}\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot\gamma^{10}\cdot x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}{}_{0}H_{14}(x)^{(4)} = {}_{14}\mathrm{P}_{4}\cdot(&\,2^{14}\cdot x^{10}-2^{13}\cdot{}_{10}\mathrm{C}_{2}\cdot\gamma^{2}\cdot x^{8}+2^{12}\cdot{}_{10}\mathrm{C}_{4}\cdot3\cdot\gamma^{4}\cdot x^{6}-2^{11}\cdot{}_{10}\mathrm{C}_{6}\cdot3\cdot5\cdot\gamma^{6}\cdot x^{4}\\&+2^{10}\cdot{}_{10}\mathrm{C}_{8}\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\gamma^{8}\cdot x^{2}-2^{9}\cdot{}_{10}\mathrm{C}_{10}\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot\gamma^{10})\end{aligned}$$

$$
{}_0H_{14}(x)^{(5)} = {}_{14}\mathrm{P}_5 \cdot (\ 2^{14} \cdot x^9 - 2^{13} \cdot {}_9\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^7 + 2^{12} \cdot {}_9\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^5 - 2^{11} \cdot {}_9\mathrm{C}_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x^3 \\ + 2^{10} \cdot {}_9\mathrm{C}_8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \gamma^8 \cdot x)
$$

$$
{}_0H_{14}(x)^{(6)} = {}_{14}\mathrm{P}_6 \cdot (\ 2^{14} \cdot x^8 - 2^{13} \cdot {}_8\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^6 + 2^{12} \cdot {}_8\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^4 - 2^{11} \cdot {}_8\mathrm{C}_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x^2 \\ + 2^{10} \cdot {}_8\mathrm{C}_8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \gamma^8)
$$

$$
{}_0H_{14}(x)^{(7)} = {}_{14}\mathrm{P}_7 \cdot (\ 2^{14} \cdot x^7 - 2^{13} \cdot {}_7\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^5 + 2^{12} \cdot {}_7\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^3 - 2^{11} \cdot {}_7\mathrm{C}_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6 \cdot x)
$$

$$
{}_0H_{14}(x)^{(8)} = {}_{14}\mathrm{P}_8 \cdot (\ 2^{14} \cdot x^6 - 2^{13} \cdot {}_6\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^4 + 2^{12} \cdot {}_6\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^2 - 2^{11} \cdot {}_6\mathrm{C}_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6)
$$

$$
{}_0H_{14}(x)^{(9)} = {}_{14}\mathrm{P}_9 \cdot (\ 2^{14} \cdot x^5 - 2^{13} \cdot {}_5\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^3 + 2^{12} \cdot {}_5\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x)
$$

$$
{}_0H_{14}(x)^{(10)} = {}_{14}\mathrm{P}_{10} \cdot (\ 2^{14} \cdot x^4 - 2^{13} \cdot {}_4\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^2 + 2^{12} \cdot {}_4\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4)
$$

$$
{}_0H_{14}(x)^{(11)} = {}_{14}\mathrm{P}_{11} \cdot (\ 2^{14} \cdot x^3 - 2^{13} \cdot {}_3\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x)
$$

$$
{}_0H_{14}(x)^{(12)} = {}_{14}\mathrm{P}_{12} \cdot (\ 2^{14} \cdot x^2 - 2^{13} \cdot {}_2\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2),\ {}_0H_{14}(x)^{(13)} = {}_{14}\mathrm{P}_{13} \cdot 2^{14} \cdot x,\ {}_0H_{14}(x)^{(14)} = {}_{14}\mathrm{P}_{14} \cdot 2^{14}
$$

以上のデータをもとに、すでに述べた ${}_0H_{N+\mathrm{m}}(x)^{(m)} = 2^m \cdot {}_{N+m}\mathrm{P}_m \cdot {}_0H_N(x)$ を検討する。
N に $N=6$ を、m に $m=1$ から $m=4$ を代入して、データを抜き出し、整理すると

$$
{}_0H_6(x) \quad = 2^0 \cdot {}_6\mathrm{P}_0 \cdot (\ 2^6 \cdot x^6 - 2^5 \cdot {}_6\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^4 + 2^4 \cdot {}_6\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^2 - 2^3 \cdot {}_6\mathrm{C}_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6)
$$

$$
{}_0H_7(x)^{(1)} = 2^1 \cdot {}_7\mathrm{P}_1 \cdot (\ 2^6 \cdot x^6 - 2^5 \cdot {}_6\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^4 + 2^4 \cdot {}_6\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^2 - 2^3 \cdot {}_6\mathrm{C}_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6)
$$

$$
{}_0H_8(x)^{(2)} = 2^2 \cdot {}_8\mathrm{P}_2 \cdot (\ 2^6 \cdot x^6 - 2^5 \cdot {}_6\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^4 + 2^4 \cdot {}_6\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^2 - 2^3 \cdot {}_6\mathrm{C}_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6)
$$

$$
{}_0H_9(x)^{(3)} = 2^3 \cdot {}_9\mathrm{P}_3 \cdot (\ 2^6 \cdot x^6 - 2^5 \cdot {}_6\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^4 + 2^4 \cdot {}_6\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^2 - 2^3 \cdot {}_6\mathrm{C}_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6)
$$

$$
{}_0H_{10}(x)^{(4)} = 2^4 \cdot {}_{10}\mathrm{P}_4 \cdot (\ 2^6 \cdot x^6 - 2^5 \cdot {}_6\mathrm{C}_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^4 + 2^4 \cdot {}_6\mathrm{C}_4 \cdot 3 \cdot \gamma^4 \cdot x^2 - 2^3 \cdot {}_6\mathrm{C}_6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \gamma^6)
$$

となり、導入した式が正しいことが判明した。

5. 総括

第一種のチェビシェフ多項式基本型 ${}_{\mathbf{0}}T_{N}(x)$ の微分方程式：

$$(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_{\mathbf{0}}T_{N}(x)'' - \frac{x}{\gamma^2}\cdot {}_{\mathbf{0}}T_{N}(x)' + \frac{N^2}{\gamma^2}\cdot {}_{\mathbf{0}}T_{N}(x) = 0$$

第二種のチェビシェフ多項式基本型 ${}_{\mathbf{0}}U_{N}(x)$ の微分方程式：

$$(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_{\mathbf{0}}U_{N}(x)'' - \frac{3x}{\gamma^2}\cdot {}_{\mathbf{0}}U_{N}(x)' + \frac{N(N+2)}{\gamma^2}\cdot {}_{\mathbf{0}}U_{N}(x) = 0$$

第一種のチェビシェフ多項式基本型 ${}_{\mathbf{0}}T_{N}(x)$ の一般式　：

$${}_{\mathbf{0}}T_{N}(x) = 2^{N-1}\cdot x^N + 2^{N-1}\cdot\sum_{k=1}\{(-1)^k\cdot\frac{{}_N\mathrm{C}_{2k}}{2^k}\cdot\prod_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{N-j})\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-2k}\}$$

第二種のチェビシェフ多項式基本型 ${}_{\mathbf{0}}U_{N}(x)$ の一般式　：

$${}_{\mathbf{0}}U_{N}(x) = 2^N\cdot x^N + 2^N\cdot\sum_{k=1}\{(-1)^k\cdot\frac{{}_N\mathrm{C}_{2k}}{2^k}\cdot\prod_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{N-j+1})\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-2k}\}$$

エルミート多項式基本型　${}_{\mathbf{0}}H_{N}(x)$　の微分方程式:

$${}_{\mathbf{0}}H_{N}(x)'' - \frac{2x}{\gamma^2}\cdot {}_{\mathbf{0}}H_{N}(x)' + \frac{2N}{\gamma^2}\cdot {}_{\mathbf{0}}H_{N}(x) = 0$$

エルミート多項式基本型　${}_{\mathbf{0}}H_{N}(x)$　の一般式　：

$${}_0H_N(x) = {}_N\mathrm{P}_0\cdot[\,2^N\cdot x^N + \sum_{k=1}\{(-1)^k\cdot 2^{N-k}\cdot {}_N\mathrm{C}_{2k}\cdot\prod_{j=1}^{k}(2j-1)\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-2k}\}\,]$$

エルミート多項式基本型の漸化式：${}_{\mathbf{0}}H_{N+1}(x) - 2x\cdot {}_{\mathbf{0}}H_{N}(x) + 2N\cdot\gamma^2\cdot {}_{\mathbf{0}}H_{N-1}(x) = 0$

$N-m$　次のエルミート陪多項式基本型　${}_{\mathbf{0}}H_{N}(x)^{(m)}$　の微分方程式　：

$${}_{\mathbf{0}}H_{N}(x)^{(m+2)} - \frac{2x}{\gamma^2}\cdot {}_{\mathbf{0}}H_{N}(x)^{(m+1)} + \frac{2(N-m)}{\gamma^2}\cdot {}_{\mathbf{0}}H_{N}(x)^{(m)} = 0$$

$N-m$ 次のエルミート陪多項式基本型の $_{\mathbf{0}}H_{\boldsymbol{N}}(x)^{(m)}$ の一般式 ：

$$_{0}H_{N}(x)^{(m)} = {}_{N}\mathrm{P}_{m} \cdot [\, 2^{N} \cdot x^{N-m} + \sum_{k=1} \{(-1)^{k} \cdot 2^{N-k} \cdot {}_{N-m}\mathrm{C}_{2k} \cdot \prod_{j=1}^{k} (2j-1) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k-m} \}]$$

エルミート陪多項式基本型の漸化式 ：

$$(N+1-m\ ) \cdot {}_{\mathbf{0}}H_{\boldsymbol{N}+1}(x)^{(m)} - 2\,(N+1) \cdot x \cdot {}_{\mathbf{0}}H_{\boldsymbol{N}}(x)^{(m)} + 2N(N+1) \cdot \gamma^{2} \cdot {}_{\mathbf{0}}H_{\boldsymbol{N}-1}(x)^{(m)} = 0$$

$$_{\mathbf{0}}H_{\boldsymbol{N}+1}(x)^{(m)} = 2\,(N+1) \cdot {}_{\mathbf{0}}H_{\boldsymbol{N}}(x)^{(m-1)}$$

$$_{0}H_{N+\mathrm{m}}(x)^{(m)} = 2^{m} \cdot {}_{N+m}\mathrm{P}_{m} \cdot {}_{0}H_{N}(x)$$

$$(N+1-m) \cdot {}_{\mathbf{0}}H_{\boldsymbol{N}}(x)^{(m-1)} - x \cdot {}_{\mathbf{0}}H_{\boldsymbol{N}}(x)^{(m)} + N \cdot \gamma^{2} \cdot {}_{\mathbf{0}}H_{\boldsymbol{N}-1}(x)^{(m)} = 0$$

エルミート直交関数基本型 $_{0}y_{N}$ ： $_{0}y_{N} = e^{-\frac{x^{2}}{2\gamma^{2}}} \cdot {}_{0}H_{N}(x)$

エルミート直交関数基本型 $_{0}y_{N}$ の微分方程式 ： $_{0}y_{N}'' + \left(-\frac{x^{2}}{\gamma^{4}} + \frac{1+2N}{\gamma^{2}}\right) \cdot {}_{0}y_{N} = 0$

参考文献

手代木　琢磨、 勝間　豊：チェビシェフ多項式基本型とラゲール多項式基本型との関係、産業能率大学紀要、40（2），2020, pp71-96