［研究ノート］

Sanno University Bulletin Vol. 40 No. 2 February 2020

チェビシェフ多項式基本型とラゲール多項式基本型との関係

The Relationship between the fundamental Style of Chebyshev Polynomials and that of the Laguerre Polynomial

手代木　琢磨
Takuma Teshirogi
勝間　豊
Yutaka Katsuma

Abstract

In the previous paper, the relationship between the fundamental style of Chebyshev polynomials and that of the Legendre polynomial was discussed. In this paper, the relationship between the fundamental style of Chebyshev polynomials and that the Laguerre polynomial is discussed.

1. 序論

手代木＆勝間 [2019] において、第一種および第二種チェビシェフ多項式基本型とルジャンドル多項式基本型との関係を報告した。本稿では第一種および第二種チェビシェフ多項式基本型とラゲール多項式との関係を議論する。

2. チェビシェフ多項式基本型

2. 1　第一種のチェビシェフ多項式基本型の微分方程式とその解

第一種のチェビシェフ多項式基本型の微分方程式は次式で表される。

$$(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_{\mathbf{0}}T_N(x)'' - \frac{x}{\gamma^2}\cdot {}_{\mathbf{0}}T_N(x)' + \frac{N^2}{\gamma^2}\cdot {}_0T_N(x) = 0$$

上の微分方程式の解は次式で表され、 $\gamma^2 = -1$ でも成立する。

2019年7月15日　受理

$$ {}_{\mathbf{0}}T_{\boldsymbol{N}}(x) \ = 2^{N-1} \cdot \ x^N \ + \ 2^{N-1} \cdot \sum_{k=1} \{(-1)^k \cdot \frac{{}_N C_{2k}}{2^k} \cdot \prod_{j=1}^{k} (\frac{2j-1}{N-j}) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k} \} $$

ただし　$N=0$ ，　$N=1$ 　の場合の値はそれぞれ、　${}_{\mathbf{0}}T_0(x)=1$ ，　${}_{\mathbf{0}}T_1(x)=x$ 　である。

2. 2　第二種のチェビシェフ多項式基本型の微分方程式とその解

第二種のチェビシェフ多項式基本型の微分方程式は次式で表される。

$$ (1-\frac{x^2}{\gamma^2}) \cdot {}_{\mathbf{0}}U_{\boldsymbol{N}}(x)'' \ - \frac{3x}{\gamma^2} \cdot {}_{\mathbf{0}}U_{\boldsymbol{N}}(x)' \ + \frac{N(N+2)}{\gamma^2} \cdot {}_{\mathbf{0}}U_{\boldsymbol{N}}(x) = 0 $$

上の微分方程式の解は次式で表され、 $\gamma^2 = -1$ でも成立する。

$$ {}_{\mathbf{0}}U_{\boldsymbol{N}}(x) = 2^N \cdot x^N + 2^N \cdot \sum_{k=1} \{ (-1)^k \ \cdot \frac{{}_N C_{2k}}{2^k} \cdot \prod_{j=1}^{k} (\frac{2j-1}{N-j+1}) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k} \} $$

ただし　$N=0$ ，　$N=1$ 　の場合の値はそれぞれ、　${}_{\mathbf{0}}U_0(x)=1$ ，　${}_{\mathbf{0}}U_1(x)=2\,x$ 　である。

3.　チェビシェフ多項式基本型とラゲール多項式基本型の関係

3. 1　ラゲール多項式の微分方程式とラゲール多項式

ラゲール多項式 $La_N(x)$ の微分方程式は次式で表され、

$$ x \cdot La_{\boldsymbol{N}}(x)'' + (1-x) \cdot La_{\boldsymbol{N}}(x)' + N \cdot \ La_{\boldsymbol{N}}(x) = 0 $$

この微分方程式の解であるラゲール多項式 $La_N(x)$ 　は一般的に次式で表される。

$$ \begin{aligned} La_{\boldsymbol{N}}(x) \ &= (-1)^N [\, x^N - \frac{N^2}{1!} \cdot x^{N-1} + \frac{N^2(N-1)^2}{2\,!} \cdot x^{N-2} - \frac{N^2(N-1)^2(N-2)^2}{3!} \cdot x^{N-3} \\ &\quad + \frac{N^2(N-1)^2(N-2)^2(N-3)^2}{4!} \cdot x^{N-4} - \cdots \ + (-1)^N \cdot N\,! \,] \end{aligned} $$

3. 2　ラゲール多項式基本型の微分方程式

ラゲール多項式基本型 ${}_{\mathbf{0}}La_N(x)$ 　の微分方程式を次式で定義する。

$$ x \cdot {}_{\mathbf{0}}La_N(x)'' \ + (1-\frac{x}{\gamma}) \cdot {}_{\mathbf{0}}La_N(x)' \ + \frac{N}{\gamma} \cdot {}_{\mathbf{0}}La_N(x) = 0 $$

3. 3　第一種のチェビシェフ多項式基本型とラゲール多項式基本型の関係

第一種のチェビシェフ多項式基本型 ${}_{\mathbf{0}}T_{\mathbf{N}}(x)$ からラゲール多項式基本型 ${}_{\mathbf{0}}La_N(x)$ を導入する。

第一種のチェビシェフ多項式基本型中の $\prod_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{N-j})$ がラゲール多項式基本型では

$\prod_{j=1}^{k}\{(\frac{2j-1}{N-j})\cdot p_N(k)\}$ と表され、また ${}_N C_{2k}$ が ${}_N C_k$ 、x^{N-2k} が x^{N-k} と表されると仮定する。

また x^N の項の係数を 1 とおく。

$$
{}_{\mathbf{0}}La_{\mathbf{N}}(x) = x^N + \sum_{k=1}^{N}[(-1)^k \cdot \frac{{}_N C_k}{2^k} \cdot \prod_{j=1}^{k}\{(\frac{2j-1}{N-j})\cdot p_N(k)\}\cdot \gamma^k \cdot x^{N-k}]
$$

${}_{\mathbf{0}}La_N(x)$ の一階微分および二階微分を求め、ラゲール多項式基本型の微分方程式に代入する。

$$
\begin{cases}
{}_{\mathbf{0}}La_{\mathbf{N}}(x)' = N x^{N-1} + \sum_{k=1}^{N}[(-1)^k \cdot \frac{{}_N C_k}{2^k}\cdot (N-k)\cdot \prod_{j=1}^{k}\{(\frac{2j-1}{N-j})\cdot p_N(k)\}\cdot \gamma^k \cdot x^{N-k-1}] \\
{}_{\mathbf{0}}La_{\mathbf{N}}(x)'' = N(N-1)x^{N-2} \\
\qquad + \sum_{k=1}^{N}[(-1)^k \cdot \frac{{}_N C_k}{2^k}\cdot (N-k)(N-k-1)\cdot \prod_{j=1}^{k}\{(\frac{2j-1}{N-j})\cdot p_N(k)\}\cdot \gamma^k \cdot x^{N-k-2}]
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
& x\cdot {}_{\mathbf{0}}La_N(x)'' + (1-\frac{x}{\gamma})\cdot {}_{\mathbf{0}}La_N(x)' + \frac{N}{\gamma}\cdot {}_{\mathbf{0}}La_N(x) \\
&= N^2 x^{N-1} + \sum_{k=1}^{N-1}[(-1)^k \cdot \frac{{}_N C_k}{2^k}\cdot (N-k)^2 \cdot \prod_{j=1}^{k}\{(\frac{2j-1}{N-j})\cdot p_{\mathbf{N}}(k)\}\cdot \gamma^k \cdot x^{N-k-1}] \\
&\quad + \sum_{k=1}^{N}[(-1)^k \cdot \frac{{}_N C_k}{2^k}\cdot k \cdot \prod_{j=1}^{k}\{(\frac{2j-1}{N-j})\cdot p_{\mathbf{N}}(k)\}\cdot \gamma^{k-1} \cdot x^{N-k}] = 0
\end{aligned}
$$

x^{N-1} の項は第三項に $k=1$ を代入して $N^2 - \frac{N}{2(N-1)}\cdot p_N(1) = 0$ から $p_N(1) = 2N(N-1)$

となり、同様に x^{N-2} の項は $p_N(2) = \frac{2(N-1)(N-2)}{3}\cdot p_N(1) = \frac{2^2 N(N-1)^2(N-2)}{3}$ となる。

一般に x^{N-k} の項は $p_{\mathbf{N}}(k) = 2\cdot\frac{(N-k+1)(N-k)}{2k-1}\cdot p_{\mathbf{N}}(k-1)$ から、$p_{\mathbf{N}}(k)$ は次式となる。

$$
p_{\mathbf{N}}(k) = 2^k \cdot \frac{N(N-1)\cdots(N-k+1)\cdot(N-1)(N-2)\cdots(N-k)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots\ (2k-1)} = 2^k \cdot \prod_{j=1}^{k}\{\frac{(N-j+1)(N-j)}{2j-1}\}
$$

結局ラゲール多項式基本型 ${}_{\mathbf{0}}La_N(x)$ は次式となる。

$$
\begin{aligned}
{}_{\mathbf{0}}La_{\boldsymbol{N}}(x) \;&=\; x^N + \sum_{k=1}^{N}[\,(-1)^k \cdot \frac{{}_N C_k}{2^k} \cdot \prod_{j=1}^{k}\{(\frac{2j-1}{N-j}) \cdot 2^k \cdot \frac{(N-j+1\,)(N-j\,)}{(\,2j-1\,)}\} \cdot \gamma^k \cdot x^{N-k}\,] \\
&=\; x^N + \sum_{k=1}^{N}[\,(-1)^k \cdot {}_N C_k \cdot \prod_{j=1}^{k}(N-j+1) \cdot \gamma^k \cdot x^{N-k}\,]
\end{aligned}
$$

3. 4　第二種のチェビシェフ多項式基本型とラゲール多項式基本型の関係

第二種のチェビシェフ多項式基本型 ${}_{\mathbf{0}}U_{\boldsymbol{N}}(x)$ からラゲール多項式基本型 ${}_{\mathbf{0}}La_N(x)$ を導入する。

第二種のチェビシェフ多項式基本型中の $\prod_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{N-j+1})$ がラゲール多項式基本型では

$\prod_{j=1}^{k}\{(\frac{2j-1}{N-j+1}) \cdot q_N(k)\}$ と表され、また ${}_N C_{2k}$ が ${}_N C_k$ 、x^{N-2k} が x^{N-k} と表されると

仮定する。また x^N の項の係数を 1 とおく。

$$
{}_{\mathbf{0}}La_{\boldsymbol{N}}(x) \;=\; x^N + \sum_{k=1}^{N}[\,(-1)^k \cdot \frac{{}_N C_k}{2^k} \cdot \prod_{j=1}^{k}\{(\frac{2j-1}{N-j+1}) \cdot q_N(k)\} \cdot \gamma^k \cdot x^{N-k}\,]
$$

${}_{\mathbf{0}}La_N(x)$ の一階微分および二階微分を求め、ラゲール多項式基本型の微分方程式に代入する。

$$
\left\{
\begin{aligned}
{}_{\mathbf{0}}La_{\boldsymbol{N}}(x)' \;&=\; N\,x^{N-1} + \sum_{k=1}^{N}[\,(-1)^k \cdot \frac{{}_N C_k}{2^k} \cdot (N-k) \cdot \prod_{j=1}^{k}\{(\frac{2j-1}{N-j+1}) \cdot q_N(k)\} \cdot \gamma^k \cdot x^{N-k-1}\,] \\
{}_{\mathbf{0}}La_{\boldsymbol{N}}(x)'' \;&=\; N(\,N-1)\,x^{N-2} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{N}[\,(-1)^k \cdot \frac{{}_N C_k}{2^k} \cdot (N-k)(\,N-k-1) \cdot \prod_{j=1}^{k}\{(\frac{2j-1}{N-j+1}) \cdot q_N(k)\} \cdot \gamma^k \cdot x^{N-k-2}\,]
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\begin{aligned}
&x \cdot {}_{\mathbf{0}}La_N(x)'' + (1-\frac{x}{\gamma}) \cdot {}_{\mathbf{0}}La_N(x)' + \frac{N}{\gamma} \cdot {}_0 La_N(x) \\
&= N^2\,x^{N-1} + \sum_{k=1}^{N-1}[\,(-1)^k \cdot \frac{{}_N C_k}{2^k} \cdot (N-k)^2 \cdot \prod_{j=1}^{k}\{(\frac{2j-1}{N-j+1}) \cdot q_{\boldsymbol{N}}(k)\} \cdot \gamma^k \cdot x^{N-k-1}] \\
&\quad + \sum_{k=1}^{N}[\,(-1)^k \cdot \frac{{}_N C_k}{2^k} \cdot k \cdot \prod_{j=1}^{k}\{(\frac{2j-1}{N-j+1}) \cdot q_{\boldsymbol{N}}(k)\} \cdot \gamma^{k-1} \cdot x^{N-k}\,] = 0
\end{aligned}
$$

x^{N-1} の項は第三項に $k=1$ を代入して $N^2 - \frac{N}{2}\cdot\frac{1}{N}\cdot q_N(1) = 0$ から $q_N(1) = 2N^2$ となり、

同様に x^{N-2} の項は $q_N(2) = \frac{2(N-1)^2}{3}\cdot q_N(1) = \frac{2^2 N^2 (N-1)^2}{3}$ となる。

一般に x^{N-k} の項は $q_N(k) = 2\cdot\frac{(N-k+1)^2}{2k-1}\cdot q_N(k-1)$ から、$q_N(k)$ は次式となる。

$$q_N(k) = 2^k \cdot \frac{N^2(N-1)^2 \cdots (N-k+1)^2}{1\cdot 3\cdot 5\cdots\ (2k-1)} = 2^k \cdot \prod_{j=1}^{k}\{\frac{(N-j+1)^2}{(2j-1)}\}$$

結局ラゲール多項式基本型 ${}_{\mathbf{0}}La_N(x)$ は次式となる。

$$\begin{aligned} {}_{\mathbf{0}}La_{\boldsymbol{N}}(x) &= x^N + \sum_{k=1}^{N}[(-1)^k \cdot \frac{{}_N C_k}{2^k}\cdot\prod_{j=1}^{k}\{(\frac{2j-1}{N-j+1})\cdot 2^k \cdot\frac{(N-j+1)^2}{(2j-1)}\}\cdot \gamma^k \cdot x^{N-k}] \\ &= x^N + \sum_{k=1}^{N}[(-1)^k \cdot {}_N C_k \cdot\prod_{j=1}^{k}(N-j+1)\cdot \gamma^k \cdot x^{N-k}] \end{aligned}$$

第一種のチェビシェフ多項式基本型 ${}_{\mathbf{0}}T_{\boldsymbol{N}}(x)$ から誘導しても、第二種のチェビシェフ多項式基本型 ${}_{\mathbf{0}}U_{\boldsymbol{N}}(x)$ から誘導しても、ラゲール多項式基本型 ${}_{\mathbf{0}}La_N(x)$ は同じとなる。そこでラゲール多項式 $La_N(x)$ と係数を合わせるために、今後ラゲール多項式基本型 ${}_{\mathbf{0}}La_N(x)$ を次式のように表す。

$${}_{\mathbf{0}}La_{\boldsymbol{N}}(x) = (-1)^N \cdot x^N + \sum_{k=1}^{N}[(-1)^{N+k} \cdot {}_N C_k \cdot\prod_{j=1}^{k}(N-j+1)\cdot\gamma^k \cdot x^{N-k}]$$

またこの式は次式のようにも表される。

$$\begin{aligned} {}_{\mathbf{0}}La_{\boldsymbol{N}}(x) &= \sum_{k=0}^{N}\{(-1)^{N+k} \cdot k!\cdot({}_N C_k)^2 \cdot\gamma^k \cdot x^{N-k}\} = N!\cdot\sum_{k=0}^{N}\{(-1)^{N+k} \cdot\frac{{}_N C_k}{(N-k)!}\cdot\gamma^k \cdot x^{N-k}\} \\ &= \sum_{k=0}^{N}\{(-1)^{N+k} \cdot {}_N P_k \cdot {}_N C_k \cdot\gamma^k \cdot x^{N-k}\} \end{aligned}$$

３．５　ラゲール多項式基本型の漸化式

$$\begin{cases} {}_{\mathbf{0}}La_{\boldsymbol{N}-1}(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \{(-1)^{N-1+k} \cdot k! \cdot ({}_{N-1}C_k)^2 \cdot \gamma^k \cdot x^{N-1-k}\} \\ {}_{\mathbf{0}}La_{\boldsymbol{N}}(x) = \sum_{k=0}^{N} \{(-1)^{N+k} \cdot k! \cdot ({}_{N}C_k)^2 \cdot \gamma^k \cdot x^{N-k}\} \\ {}_{\mathbf{0}}La_{\boldsymbol{N}+1}(x) = \sum_{k=0}^{N+1} \{(-1)^{N+1+k} \cdot k! \cdot ({}_{N+1}C_k)^2 \cdot \gamma^k \cdot x^{N+1-k}\} \end{cases}$$

上にまとめたラゲール多項式基本型 ${}_{\mathbf{0}}La_{N-1}(x)$，${}_{\mathbf{0}}La_{N}(x)$，${}_{\mathbf{0}}La_{N+1}(x)$ 間の漸化式は、

x^{N+1} の項が 0 なので、 ${}_{\mathbf{0}}La_{\boldsymbol{N}+1}(x) + \{x + \alpha(N)\} \cdot {}_{\mathbf{0}}La_{\boldsymbol{N}}(x) + \beta(N) \cdot {}_{\mathbf{0}}La_{\boldsymbol{N}-1}(x) = 0$ とおいてよい。

次に $\gamma \cdot x^N$ の項も 0 となるので、 $1! \cdot ({}_{N+1}C_1)^2 \cdot \gamma - 1! \cdot ({}_{N}C_1)^2 \cdot \gamma + \alpha(N) \cdot 0! \cdot ({}_{N}C_0)^2 = 0$

から、$\alpha(N) = -(2N+1) \cdot \gamma$ となる。 さらに $\gamma^2 \cdot x^{N-1}$ の項も 0 とおいて

$$2! \cdot \{({}_{N+1}C_2)^2 - ({}_{N}C_2)^2\} \cdot \gamma^2 - (2N+1) \cdot 1! \cdot ({}_{N}C_1)^2 \cdot \gamma^2 + \beta(N) \cdot 0! \cdot ({}_{N-1}C_0)^2 = 0 \quad \text{から}$$

$$\beta(N) = N^2 \cdot \gamma^2$$

結局漸化式は ${}_{\mathbf{0}}La_{\boldsymbol{N}+1}(x) + \{x - (2N+1) \cdot \gamma\} \cdot {}_{\mathbf{0}}La_{\boldsymbol{N}}(x) + N^2 \cdot \gamma^2 \cdot {}_{\mathbf{0}}La_{\boldsymbol{N}-1}(x) = 0$ となる。

確認のために ${}_{\mathbf{0}}La_{\boldsymbol{N}+1}(x) + \{x - (2N+1) \cdot \gamma\} \cdot {}_{\mathbf{0}}La_{\boldsymbol{N}}(x)$ の $\gamma^l \cdot x^{N+1-l}$ の項を計算すると、

$$\begin{aligned} &(-1)^{N+l}\{-l! \cdot ({}_{N+1}C_l)^2 + l! \cdot ({}_{N}C_l)^2 + (l-1)! \cdot (2N+1) \cdot ({}_{N}C_{l-1})^2\} \cdot \gamma^l \cdot x^{N+1-l} \\ &= (-1)^{N+l} \cdot N^2 \cdot (l-2)! \cdot ({}_{N-1}C_{l-2})^2 \cdot \gamma^l \cdot x^{N+1-l} \end{aligned}$$

一方 $N^2 \cdot \gamma^2 \cdot {}_{\mathbf{0}}La_{\boldsymbol{N}-1}(x)$ の $\gamma^l \cdot x^{N+1-l}$ の項を計算すると、

$$\begin{aligned} &(-1)^{N-3+l} \cdot N^2 \cdot \gamma^2 \cdot (l-2)! \cdot ({}_{N-1}C_{l-2})^2 \cdot \gamma^{l-2} \cdot x^{N+1-l} \\ &= -(-1)^{N+l} \cdot N^2 \cdot (l-2)! \cdot ({}_{N-1}C_{l-2})^2 \cdot \gamma^l \cdot x^{N+1-l} \end{aligned}$$

となり、漸化式が成立していることが確認できる。

3．6　ラゲール陪多項式

ラゲール多項式 $La_N(x)$ の微分方程式、 $x \cdot La_N(x)'' + (1-x) \cdot La_N(x)' + N \cdot La_N(x) = 0$

を一回微分して整理すると次式が得られ、

$$x \cdot La_N(x)^{(3)} + (1+1-x) \cdot La_N(x)^{(2)} + (N-1) \cdot La_N(x)^{(1)} = 0$$

もう一回微分して整理すると次式が得られる。

$$x \cdot La_N(x)^{(4)} + (2+1-x) \cdot La_N(x)^{(3)} + (N-2) \cdot La_N(x)^{(2)} = 0$$

同様に m 回微分すると次式が得られる。

$$x \cdot La_N(x)^{(m+2)} + (m+1-x) \cdot La_N(x)^{(m+1)} + (N-m) \cdot La_N(x)^{(m)} = 0$$

この結果から $y_N^m = La_N(x)^{(m)}$ の微分方程式は次式になる。

$$x \cdot y_N^m{}'' + (m+1-x) \cdot y_N^m{}' + (N-m) \cdot y_N^m = 0$$

この関数 $y_N^m = La_N(x)^{(m)}$ は $N-m$ 次のラゲール陪多項式と呼ばれている。

3．7　ラゲール陪関数

微分方程式 $x \cdot y'' + 2 \cdot y' + \left(N - \frac{k-1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{k^2-1}{4x}\right) \cdot y = 0$ の解を $y = e^{-\frac{x}{2}} \cdot x^{\frac{k-1}{2}} \cdot v(x)$

と仮定して、この微分方程式に代入すると、別の微分方程式が得られ、

$$x \cdot v(x)'' + (k+1-x) \cdot v(x)' + (N-k) \cdot v(x) = 0$$

この微分方程式の解は $N-k$ 次のラゲール陪多項式なので、最初の微分方程式の解は次式となる。

$$y = e^{-\frac{x}{2}} \cdot x^{\frac{k-1}{2}} \cdot La_N(x)^{(k)}$$

この関数は水素原子の理論で非常に重要な関数で、ラゲール陪関数と呼ばれている。

3．８　ラゲール陪多項式基本型

ラゲール多項式基本型 $\mathbf{_0}La_N(x)$ の微分方程式を一回微分して整理すると次式が得られ、

$$x \cdot \mathbf{_0}La_N(x)^{(3)} + (1+1-\frac{x}{\gamma}) \cdot \mathbf{_0}La_N(x)^{(2)} + \frac{N-1}{\gamma} \cdot \mathbf{_0}La_N(x)^{(1)} = 0$$

もう一回微分して整理すると次式が得られる。

$$x \cdot \mathbf{_0}La_N(x)^{(4)} + (2+1-\frac{x}{\gamma}) \cdot \mathbf{_0}La_N(x)^{(3)} + \frac{N-2}{\gamma} \cdot \mathbf{_0}La_N(x)^{(2)} = 0$$

同様に、 m 回微分すると次式が得られる。

$$x \cdot \mathbf{_0}La_N(x)^{(m+2)} + (m+1-\frac{x}{\gamma}) \cdot \mathbf{_0}La_N(x)^{(m+1)} + \frac{N-m}{\gamma} \cdot \mathbf{_0}La_N(x)^{(m)} = 0$$

この結果から $_0y_N^m = \mathbf{_0}La_N(x)^{(m)}$ の微分方程式は次式になる。

$$x \cdot {_0y_N^m}'' + (m+1-\frac{x}{\gamma}) \cdot {_0y_N^m}' + \frac{N-m}{\gamma} \cdot {_0y_N^m} = 0$$

そこで $_0y_N^m = \mathbf{_0}La_N(x)^{(m)}$ を $N-m$ 次のラゲール陪多項式基本型と呼ぶ。

ラゲール多項式基本型を直接 m 回微分して、$N-m$ 次のラゲール陪多項式基本型を得る。

$$\begin{aligned}\mathbf{_0}La_{\mathbf{N}}(x)^{(m)} &= N! \cdot \sum_{k=0}^{N} \{ (-1)^{N+k} \cdot \frac{_NC_k}{(N-k-m)!} \cdot \gamma^k \cdot x^{N-k-m} \} \\ &= \sum_{k=0}^{N} \{ (-1)^{N+k} \cdot {_NP_{m+k}} \cdot {_NC_k} \cdot \gamma^k \cdot x^{N-k-m} \}\end{aligned}$$

ラゲール陪多項式基本型 $\mathbf{_0}La_{\mathbf{N}-1}(x)^{(m)}$ ， $\mathbf{_0}La_{\mathbf{N}}(x)^{(m)}$ ， $\mathbf{_0}La_{\mathbf{N}+1}(x)^{(m)}$ 間の漸化式を求める。

$$\begin{cases} \mathbf{_0}La_{\mathbf{N}-1}(x)^{(m)} = \sum_{k=0}^{N-1} \{ (-1)^{N-1+k} \cdot {_{N-1}P_{m+k}} \cdot {_{N-1}C_k} \cdot \gamma^k \cdot x^{N-1-k-m} \} \\ \mathbf{_0}La_{\mathbf{N}}(x)^{(m)} = \sum_{k=0}^{N} \{ (-1)^{N+k} \cdot {_NP_{m+k}} \cdot {_NC_k} \cdot \gamma^k \cdot x^{N-k-m} \} \\ \mathbf{_0}La_{\mathbf{N}+1}(x)^{(m)} = \sum_{k=0}^{N+1} \{ (-1)^{N+1+k} \cdot {_{N+1}P_{m+k}} \cdot {_{N+1}C_k} \cdot \gamma^k \cdot x^{N+1-k-m} \} \end{cases}$$

まず x^{N+1-m} の項が 0 となるので、漸化式はまず次式のように置くことができる。

$$\mathbf{_0}La_{\mathbf{N}+1}(x)^{(m)} + \{ \frac{N+1}{N+1-m} \cdot x + \alpha(N) \} \cdot \mathbf{_0}La_{\mathbf{N}}(x)^{(m)} + \beta(N) \cdot \mathbf{_0}La_{\mathbf{N}-1}(x)^{(m)} = 0$$

次に　$\gamma \cdot x^{N-m}$ の項も 0 となるので、

$$(-1)^N \cdot \{ {}_{N+1}P_{m+1} \cdot {}_{N+1}C_1 \cdot \gamma - \frac{N+1}{N+1-m} \cdot {}_N P_{m+1} \cdot {}_N C_1 \cdot \gamma + \alpha(N) \cdot {}_N P_m \cdot {}_N C_0 \} = 0 \quad \text{から}$$

$${}_N P_m \cdot \{ (N+1) \cdot \gamma \cdot \frac{(N+1)^2 - m(N+1) - N(N-m)}{N+1-m} + \alpha(N) \} = 0 \quad \text{となって、}$$

$$\alpha(N) = -\frac{(N+1)(2N+1-m)}{N+1-m} \cdot \gamma$$

さらに　$\gamma^2 \cdot x^{N-1-m}$ の項も 0 となる必要があるので、次式となり、

$$- {}_{N+1}P_{m+2} \cdot {}_{N+1}C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^{N-1-m} + \frac{N+1}{N+1-m} \cdot {}_N P_{m+2} \cdot {}_N C_2 \cdot \gamma^2 \cdot x^{N-1-m}$$
$$+ \frac{2N+1-m}{N+1-m} \cdot (N+1) \cdot {}_N P_{m+1} \cdot {}_N C_1 \cdot \gamma^2 \cdot x^{N-1-m} - \beta(N) \cdot {}_{N-1}P_m \cdot x^{N-1-m} = 0$$

整理して $\beta(N)$ が得られる。

$$\beta(N) \cdot {}_{N-1}P_m = \beta(N) \cdot \frac{(N-1)!}{(N-1-m)!}$$
$$= \{ - {}_{N+1}P_{m+2} \cdot {}_{N+1}C_2 + \frac{N+1}{N+1-m} \cdot {}_N P_{m+2} \cdot {}_N C_2 + \frac{2N+1-m}{N+1-m} \cdot (N+1) \cdot {}_N P_{m+1} \cdot {}_N C_1 \} \cdot \gamma^2$$
$$= \frac{N(N+1)!}{(N-1-m)!} \cdot \{ -\frac{N+1}{2} + \frac{N-1-m}{N+1-m} \cdot \frac{N-1}{2} + \frac{2N+1-m}{N+1-m} \} \cdot \gamma^2 = \frac{N(N+1)!}{(N-1-m)!} \cdot \frac{1}{N+1-m} \cdot \gamma^2$$

$$\beta(N) = \frac{N^2(N+1)}{N+1-m} \cdot \gamma^2$$

結局ラゲール陪多項式基本型の漸化式は次式となる。

$$\frac{N+1-m}{N+1} \cdot {}_{\mathbf{0}}La_{N+1}(x)^{(m)} + \{ x - (2N+1-m) \cdot \gamma \} \cdot {}_{\mathbf{0}}La_{\boldsymbol{N}}(x)^{(m)} + N^2 \cdot \gamma^2 \cdot {}_{\mathbf{0}}La_{\boldsymbol{N}-1}(x)^{(m)} = 0$$

確認のために $\frac{N+1-m}{N+1} \cdot {}_{\mathbf{0}}La_{N+1}(x)^{(m)} + \{ x - (2N+1-m) \cdot \gamma \} \cdot {}_{\mathbf{0}}La_{\boldsymbol{N}}(x)^{(m)}$ の $\gamma^l \cdot x^{N+1-l-m}$

の項を計算すると、

$$\frac{N+1-m}{N+1}\cdot {}_{\mathbf{0}}La_{N+1}(x)^{(m)}+\{x-(2N+1-m)\cdot\gamma\}\cdot {}_{\mathbf{0}}La_{N}(x)^{(m)}$$
$$=\quad(-1)^{N+1+l}\cdot\frac{N+1-m}{N+1}\cdot {}_{N+1}P_{m+l}\cdot {}_{N+1}C_{l}\cdot\gamma^{l}\cdot x^{N+1-l-m}+(-1)^{N+l}\cdot {}_{N}P_{m+l}\cdot {}_{N}C_{l}\cdot\gamma^{l}\cdot x^{N+1-l-m}$$
$$-(-1)^{N-1+l}\cdot(2N+1-m)\cdot\gamma\cdot {}_{N}P_{m+l-1}\cdot {}_{N}C_{l-1}\cdot\gamma^{l-1}\cdot x^{N+1-l-m}$$
$$=(-1)^{N+l}\cdot\frac{N!}{(N+1-l-m)!}\cdot\frac{N!}{(N+1-l)!\cdot(l-2)!}\cdot\gamma^{l}\cdot x^{N+1-l-m}$$

となり、$N^2\cdot\gamma^2\cdot {}_{\mathbf{0}}La_{N-1}(x)^{(m)}$ の場合は次式となるので漸化式が成立していることが解る。

$$(-1)^{N-1+l-2}\cdot N^2\cdot\gamma^2\cdot {}_{N-1}P_{m+l-2}\cdot {}_{N-1}C_{l-2}\cdot\gamma^{l-2}\cdot x^{N+1-l-m}$$
$$=(-1)^{N+l-3}\cdot N^2\cdot\frac{(N-1)!}{(N+1-l-m)!}\cdot\frac{(N-1)!}{(N+1-l)!\cdot(l-2)!}\cdot\gamma^{l}\cdot x^{N+1-l-m}$$
$$=-(-1)^{N+l}\cdot\frac{N!}{(N+1-l-m)!}\cdot\frac{N!}{(N+1-l)!\cdot(l-2)!}\cdot\gamma^{l}\cdot x^{N+1-l-m}$$

上のラゲール陪多項式基本型の漸化式に $m=0$ を代入すると、ラゲール多項式基本型の

漸化式 ${}_{\mathbf{0}}La_{N+1}(x)+\{x-(2N+1)\cdot\gamma\}\cdot {}_{\mathbf{0}}La_{N}(x)+N^2\cdot\gamma^2\cdot {}_{\mathbf{0}}La_{N-1}(x)=0$ に等しくなるので、

ラゲール陪多項式基本型の漸化式は $m=0$ でも成立する。

さらにラゲール多項式基本型の漸化式を m 回微分すると次式が得られ、

$$La_{N+1}(x)^{(m)}+\{x-(2N+1)\cdot\gamma\}\cdot {}_{\mathbf{0}}La_{N}(x)^{(m)}+m\cdot {}_{\mathbf{0}}La_{N}(x)^{(m-1)}+N^2\cdot\gamma^2\cdot {}_{\mathbf{0}}La_{N-1}(x)^{(m)}=0$$

この式とラゲール陪多項式基本型の漸化式とから、次の漸化式が得られる。

$${}_{\mathbf{0}}La_{N+1}(x)^{(m)}=(N+1)\{\gamma\cdot {}_{\mathbf{0}}La_{N}(x)^{(m)}-{}_{\mathbf{0}}La_{N}(x)^{(m-1)}\}$$

この漸化式をラゲール陪多項式基本型の漸化式に代入して整理すると次式が得られる。

$$(N+1-m)\cdot {}_{\mathbf{0}}La_{N}(x)^{(m-1)}-x\cdot {}_{\mathbf{0}}La_{N}(x)^{(m)}-N^2\cdot\gamma\cdot {}_{\mathbf{0}}La_{N-1}(x)^{(m-1)}=0$$

またラゲールの多項式基本型およびラゲール陪多項式基本型を簡単に求めるために、例えば

$\mathbf{_0}La_N(x)^{(m)} = (-1)^N \cdot N! \cdot \sum_{k=0}^{N} \{(-1)^k \cdot \frac{{}_N C_k}{(N-k-m)!} \cdot \gamma^k \cdot x^{N-k-m}\}$ に $m = N-3$ を代入すると、

$$\mathbf{_0}La_N(x)^{(N-3)} = (-1)^N \cdot N! \cdot (\frac{{}_N C_0}{3!} \cdot x^3 - \frac{{}_N C_1}{2!} \cdot \gamma \cdot x^2 + \frac{{}_N C_2}{1!} \cdot \gamma^2 \cdot x - \frac{{}_N C_3}{0!} \cdot \gamma^3)$$

が得られ、 $m = N-4$ を代入すると次式が得られる。

$$\mathbf{_0}La_N(x)^{(N-4)} = (-1)^N \cdot N! \cdot (\frac{{}_N C_0}{4!} \cdot x^4 - \frac{{}_N C_1}{3!} \cdot \gamma \cdot x^3 + \frac{{}_N C_2}{2!} \cdot \gamma^2 \cdot x^2 - \frac{{}_N C_3}{1!} \cdot \gamma^3 \cdot x + \frac{{}_N C_4}{0!} \cdot \gamma^4)$$

例えば $\mathbf{_0}La_N(x)^{(N-4)}$ に $N = 4$ を代入すればラゲール多項式基本型 $\mathbf{_0}La_4(x)$ が得られ、

$$\mathbf{_0}La_4(x) = 4! \cdot (\frac{{}_4 C_0}{4!} \cdot x^4 - \frac{{}_4 C_1}{3!} \cdot \gamma \cdot x^3 + \frac{{}_4 C_2}{2!} \cdot \gamma^2 \cdot x^2 - \frac{{}_4 C_3}{1!} \cdot \gamma^3 \cdot x + \frac{{}_4 C_4}{0!} \cdot \gamma^4)$$

$\mathbf{_0}La_N(x)^{(N-3)}$ に $N = 4$ を代入すれば 3 次のラゲール陪多項式基本型 $\mathbf{_0}La_4(x)^{(1)}$ が得られる。

$$\mathbf{_0}La_4(x)^{(1)} = 4! \cdot (\frac{{}_4 C_0}{3!} \cdot x^3 - \frac{{}_4 C_1}{2!} \cdot \gamma \cdot x^2 + \frac{{}_4 C_2}{1!} \cdot \gamma^2 \cdot x - \frac{{}_4 C_3}{0!} \cdot \gamma^3)$$

$\mathbf{_0}La_N(x)^{(N-1)}$ から $\mathbf{_0}La_N(x)^{(N-14)}$ を下にまとめて示す。

$$\mathbf{_0}La_N(x)^{(N-1)} = (-1)^N \cdot N! \cdot (\frac{{}_N C_0}{1!} \cdot x^3 - \frac{{}_N C_1}{0!} \cdot \gamma)$$

$$\mathbf{_0}La_N(x)^{(N-2)} = (-1)^N \cdot N! \cdot (\frac{{}_N C_0}{2!} \cdot x^2 - \frac{{}_N C_1}{1!} \cdot \gamma \cdot x + \frac{{}_N C_2}{0!} \cdot \gamma^2)$$

$$\mathbf{_0}La_N(x)^{(N-3)} = (-1)^N \cdot N! \cdot (\frac{{}_N C_0}{3!} \cdot x^3 - \frac{{}_N C_1}{2!} \cdot \gamma \cdot x^2 + \frac{{}_N C_2}{1!} \cdot \gamma^2 \cdot x - \frac{{}_N C_3}{0!} \cdot \gamma^3)$$

$$\mathbf{_0}La_N(x)^{(N-4)} = (-1)^N \cdot N! \cdot (\frac{{}_N C_0}{4!} \cdot x^4 - \frac{{}_N C_1}{3!} \cdot \gamma \cdot x^3 + \frac{{}_N C_2}{2!} \cdot \gamma^2 \cdot x^2 - \frac{{}_N C_3}{1!} \cdot \gamma^3 \cdot x + \frac{{}_N C_4}{0!} \cdot \gamma^4)$$

$$\mathbf{_0}La_N(x)^{(N-5)} = (-1)^N \cdot N! \cdot (\frac{{}_N C_0}{5!} \cdot x^5 - \frac{{}_N C_1}{4!} \cdot \gamma \cdot x^4 + \frac{{}_N C_2}{3!} \cdot \gamma^2 \cdot x^3 - \frac{{}_N C_3}{2!} \cdot \gamma^3 \cdot x^2 + \frac{{}_N C_4}{1!} \cdot \gamma^4 \cdot x - \frac{{}_N C_5}{0!} \cdot \gamma^5)$$

$$\mathbf{_0}La_N(x)^{(N-6)} = (-1)^N \cdot N! \cdot (\frac{{}_N C_0}{6!} \cdot x^6 - \frac{{}_N C_1}{5!} \cdot \gamma \cdot x^5 + \frac{{}_N C_2}{4!} \cdot \gamma^2 \cdot x^4 - \frac{{}_N C_3}{3!} \cdot \gamma^3 \cdot x^3 + \frac{{}_N C_4}{2!} \cdot \gamma^4 \cdot x^2 - \frac{{}_N C_5}{1!} \cdot \gamma^5 \cdot x + \frac{{}_N C_6}{0!} \cdot \gamma^6)$$

$$ {}_{\mathbf{0}}La_N(x)^{(N-7)} = (-1)^N \cdot N! \cdot \Big(\frac{{}_NC_0}{7!} \cdot x^7 - \frac{{}_NC_1}{6!} \cdot \gamma \cdot x^6 + \frac{{}_NC_2}{5!} \cdot \gamma^2 \cdot x^5 - \frac{{}_NC_3}{4!} \cdot \gamma^3 \cdot x^4 + \frac{{}_NC_4}{3!} \cdot \gamma^4 \cdot x^3 - \frac{{}_NC_5}{2!} \cdot \gamma^5 \cdot x^2 + \frac{{}_NC_6}{1!} \cdot \gamma^6 \cdot x - \frac{{}_NC_7}{0!} \cdot \gamma^7\Big) $$

$$ {}_{\mathbf{0}}La_N(x)^{(N-8)} = (-1)^N \cdot N! \cdot \Big(\frac{{}_NC_0}{8!} \cdot x^8 - \frac{{}_NC_1}{7!} \cdot \gamma \cdot x^7 + \frac{{}_NC_2}{6!} \cdot \gamma^2 \cdot x^6 - \frac{{}_NC_3}{5!} \cdot \gamma^3 \cdot x^5 + \frac{{}_NC_4}{4!} \cdot \gamma^4 \cdot x^4 - \frac{{}_NC_5}{3!} \cdot \gamma^5 \cdot x^3 + \frac{{}_NC_6}{2!} \cdot \gamma^6 \cdot x^2 - \frac{{}_NC_7}{1!} \cdot \gamma^7 \cdot x + \frac{{}_NC_8}{0!} \cdot \gamma^8\Big) $$

$$ {}_{\mathbf{0}}La_N(x)^{(N-9)} = (-1)^N \cdot N! \cdot \Big(\frac{{}_NC_0}{9!} \cdot x^9 - \frac{{}_NC_1}{8!} \cdot \gamma \cdot x^8 + \frac{{}_NC_2}{7!} \cdot \gamma^2 \cdot x^7 - \frac{{}_NC_3}{6!} \cdot \gamma^3 \cdot x^6 + \frac{{}_NC_4}{5!} \cdot \gamma^4 \cdot x^5 - \frac{{}_NC_5}{4!} \cdot \gamma^5 \cdot x^4 + \frac{{}_NC_6}{3!} \cdot \gamma^6 \cdot x^3 - \frac{{}_NC_7}{2!} \cdot \gamma^7 \cdot x^2 + \frac{{}_NC_8}{1!} \cdot \gamma^8 \cdot x - \frac{{}_NC_9}{0!} \cdot \gamma^9\Big) $$

$$ {}_{\mathbf{0}}La_N(x)^{(N-10)} = (-1)^N \cdot N! \cdot \Big(\frac{{}_NC_0}{10!} \cdot x^{10} - \frac{{}_NC_1}{9!} \cdot \gamma \cdot x^9 + \frac{{}_NC_2}{8!} \cdot \gamma^2 \cdot x^8 - \frac{{}_NC_3}{7!} \cdot \gamma^3 \cdot x^7 + \frac{{}_NC_4}{6!} \cdot \gamma^4 \cdot x^6 - \frac{{}_NC_5}{5!} \cdot \gamma^5 \cdot x^5 + \frac{{}_NC_6}{4!} \cdot \gamma^6 \cdot x^4 - \frac{{}_NC_7}{3!} \cdot \gamma^7 \cdot x^3 + \frac{{}_NC_8}{2!} \cdot \gamma^8 \cdot x^2 - \frac{{}_NC_9}{1!} \cdot \gamma^9 \cdot x + \frac{{}_NC_{10}}{0!} \cdot \gamma^{10}\Big) $$

$$ {}_{\mathbf{0}}La_N(x)^{(N-11)} = (-1)^N \cdot N! \cdot \Big(\frac{{}_NC_0}{11!} \cdot x^{11} - \frac{{}_NC_1}{10!} \cdot \gamma \cdot x^{10} + \frac{{}_NC_2}{9!} \cdot \gamma^2 \cdot x^9 - \frac{{}_NC_3}{8!} \cdot \gamma^3 \cdot x^8 + \frac{{}_NC_4}{7!} \cdot \gamma^4 \cdot x^7 - \frac{{}_NC_5}{6!} \cdot \gamma^5 \cdot x^6 + \frac{{}_NC_6}{5!} \cdot \gamma^6 \cdot x^5 - \frac{{}_NC_7}{4!} \cdot \gamma^7 \cdot x^4 + \frac{{}_NC_8}{3!} \cdot \gamma^8 \cdot x^3 - \frac{{}_NC_9}{2!} \cdot \gamma^9 \cdot x^2 + \frac{{}_NC_{10}}{1!} \cdot \gamma^{10} \cdot x - \frac{{}_NC_{11}}{0!} \cdot \gamma^{11}\Big) $$

$$ {}_{\mathbf{0}}La_N(x)^{(N-12)} = (-1)^N \cdot N! \cdot \Big(\frac{{}_NC_0}{12!} \cdot x^{12} - \frac{{}_NC_1}{11!} \cdot \gamma \cdot x^{11} + \frac{{}_NC_2}{10!} \cdot \gamma^2 \cdot x^{10} - \frac{{}_NC_3}{9!} \cdot \gamma^3 \cdot x^9 + \frac{{}_NC_4}{8!} \cdot \gamma^4 \cdot x^8 - \frac{{}_NC_5}{7!} \cdot \gamma^5 \cdot x^7 + \frac{{}_NC_6}{6!} \cdot \gamma^6 \cdot x^6 - \frac{{}_NC_7}{5!} \cdot \gamma^7 \cdot x^5 + \frac{{}_NC_8}{4!} \cdot \gamma^8 \cdot x^4 - \frac{{}_NC_9}{3!} \cdot \gamma^9 \cdot x^3 + \frac{{}_NC_{10}}{2!} \cdot \gamma^{10} \cdot x^2 - \frac{{}_NC_{11}}{1!} \cdot \gamma^{11} \cdot x + \frac{{}_NC_{12}}{0!} \cdot \gamma^{12}\Big) $$

$$
{}_{\mathbf{0}}La_N(x)^{(N-13)} = (-1)^N \cdot N! \cdot (\frac{{}_NC_0}{13!}\cdot x^{13} - \frac{{}_NC_1}{12!}\cdot\gamma\cdot x^{12} + \frac{{}_NC_2}{11!}\cdot\gamma^2\cdot x^{11} - \frac{{}_NC_3}{10!}\cdot\gamma^3\cdot x^{10} + \frac{{}_NC_4}{9!}\cdot\gamma^4\cdot x^9
- \frac{{}_NC_5}{8!}\cdot\gamma^5\cdot x^8 + \frac{{}_NC_6}{7!}\cdot\gamma^6\cdot x^7 - \frac{{}_NC_7}{6!}\cdot\gamma^7\cdot x^6 + \frac{{}_NC_8}{5!}\cdot\gamma^8\cdot x^5
- \frac{{}_NC_9}{4!}\cdot\gamma^9\cdot x^4 + \frac{{}_NC_{10}}{3!}\cdot\gamma^{10}\cdot x^3 - \frac{{}_NC_{11}}{2!}\cdot\gamma^{11}\cdot x^2
+ \frac{{}_NC_{12}}{1!}\cdot\gamma^{12}\cdot x - \frac{{}_NC_{13}}{0!}\cdot\gamma^{13})
$$

$$
{}_{\mathbf{0}}La_N(x)^{(N-14)} = (-1)^N \cdot N! \cdot (\frac{{}_NC_0}{14!}\cdot x^{14} - \frac{{}_NC_1}{13!}\cdot\gamma\cdot x^{13} + \frac{{}_NC_2}{12!}\cdot\gamma^2\cdot x^{12} - \frac{{}_NC_3}{11!}\cdot\gamma^3\cdot x^{11} + \frac{{}_NC_4}{10!}\cdot\gamma^4\cdot x^{10}
- \frac{{}_NC_5}{9!}\cdot\gamma^5\cdot x^9 + \frac{{}_NC_6}{8!}\cdot\gamma^6\cdot x^8 - \frac{{}_NC_7}{7!}\cdot\gamma^7\cdot x^7 + \frac{{}_NC_8}{6!}\cdot\gamma^8\cdot x^6
- \frac{{}_NC_9}{5!}\cdot\gamma^9\cdot x^5 + \frac{{}_NC_{10}}{4!}\cdot\gamma^{10}\cdot x^4 - \frac{{}_NC_{11}}{3!}\cdot\gamma^{11}\cdot x^3
+ \frac{{}_NC_{12}}{2!}\cdot\gamma^{12}\cdot x^2 - \frac{{}_NC_{13}}{1!}\cdot\gamma^{13}\cdot x + \frac{{}_NC_{14}}{0!}\cdot\gamma^{14})
$$

3．9　ラゲール陪関数基本型

ラゲール陪関数基本型を　${}_0y = e^{-\frac{x}{2\gamma}}\cdot(\frac{x}{\gamma})^{\frac{k-1}{2}}\cdot{}_0v(x)$　と定義する。

この関数の　$x\cdot{}_0y'' + 2\cdot{}_0y'$　を計算する。${}_0y'$　は次式となり、

$$
{}_0y' = -\frac{1}{2\gamma}\cdot{}_0y + \frac{k-1}{2x}\cdot{}_0y + e^{-\frac{x}{2\gamma}}\cdot(\frac{x}{\gamma})^{\frac{k-1}{2}}\cdot{}_0v(x)' = \{-\frac{1}{2\gamma} + \frac{k-1}{2x} + \frac{{}_0v(x)'}{{}_0v(x)}\}\cdot{}_0y
$$

${}_0y''$　は次式となるので、

$$
{}_0y'' = [-\frac{k-1}{2x^2} + \frac{{}_0v(x)''\cdot{}_0v(x) - \{{}_0v(x)'\}^2}{\{{}_0v(x)\}^2}]\cdot{}_0y + \{-\frac{1}{2\gamma} + \frac{k-1}{2x} + \frac{{}_0v(x)'}{{}_0v(x)}\}\cdot{}_0y'
$$

$x\cdot{}_0y'' + 2\cdot{}_0y'$　は次式となる。

$$
\begin{aligned}
& x\cdot{}_0y'' + 2\cdot{}_0y' \\
&= [-\frac{k-1}{2x} + x\cdot\frac{{}_0v(x)''\cdot{}_0v(x) - \{{}_0v(x)'\}^2}{\{{}_0v(x)\}^2}]\cdot{}_0y + \{-\frac{x}{2\gamma} + \frac{k+3}{2} + x\cdot\frac{{}_0v(x)'}{{}_0v(x)}\}\cdot{}_0y' \\
&= (-\frac{k+1}{2\gamma} + \frac{x}{4\gamma^2} + \frac{k^2-1}{4x})\cdot{}_0y + \{(k+1-\frac{x}{\gamma})\cdot\frac{{}_0v(x)'}{{}_0v(x)} + x\cdot\frac{{}_0v(x)''}{{}_0v(x)}\}\cdot{}_0y
\end{aligned}
$$

この式の右辺の第一項を左辺に移項した後、両辺に $\frac{N-k}{\gamma}\cdot {}_0y$ を加えると次式が得られる。

$$x\cdot {}_0y'' +2\cdot {}_0y'+(\frac{N-k}{\gamma}+\frac{k+1}{2\gamma}-\frac{x}{4\gamma^2}-\frac{k^2-1}{4x})\cdot {}_0y$$
$$=x\cdot {}_0y'' +2\cdot {}_0y'+(\frac{N}{\gamma}-\frac{k-1}{2\gamma}-\frac{x}{4\gamma^2}-\frac{k^2-1}{4x})\cdot {}_0y$$
$$=\{x\cdot\frac{{}_0v(x)''}{{}_0v(x)}+(k+1-\frac{x}{\gamma})\cdot\frac{{}_0v(x)'}{{}_0v(x)}+\frac{N-k}{\gamma}\}\cdot {}_0y$$

この式の左辺をラゲール陪関数基本型の微分方程式とすると、すなわち次式が成立すると仮定すると、

$$x\cdot {}_0y'' +2\cdot {}_0y'+(\frac{N}{\gamma}-\frac{k-1}{2\gamma}-\frac{x}{4\gamma^2}-\frac{k^2-1}{4x})\cdot {}_0y=0$$

この式の右辺は $\{x\cdot\frac{{}_0v(x)''}{{}_0v(x)}+(k+1-\frac{x}{\gamma})\cdot\frac{{}_0v(x)'}{{}_0v(x)}+\frac{N-k}{\gamma}\}\cdot {}_0y=0$ となり、

ここから $x\cdot {}_0v(x)''+(k+1-\frac{x}{\gamma})\cdot {}_0v(x)'+\frac{N-k}{\gamma}\cdot {}_0v(x)=0$ が得られる。

すでに述べたように、この式は $N-k$ 次のラゲール陪多項式基本型の微分方程式なので、

解は ${}_0v(x)={}_{\mathbf{0}}La_N(x)^{(k)}$ となる。ここから次の微分方程式の解は

$$x\cdot {}_0y'' +2\cdot {}_0y'+(\frac{N}{\gamma}-\frac{k-1}{2\gamma}-\frac{x}{4\gamma^2}-\frac{k^2-1}{4x})\cdot {}_0y=0$$

$${}_0y=e^{-\frac{x}{2\gamma}}\cdot(\frac{x}{\gamma})^{\frac{k-1}{2}}\cdot {}_0v(x)=e^{-\frac{x}{2\gamma}}\cdot(\frac{x}{\gamma})^{\frac{k-1}{2}}\cdot {}_{\mathbf{0}}La_N(x)^{(k)}$$ となる。

$N=1$ から $N=14$ までの関数 ${}_{\mathbf{0}}La_N(x)$ と ${}_0y_N^m={}_{\mathbf{0}}La_N(x)^{(m)}$ を次表にまとめる。

${}_{\mathbf{0}}La_1(x)=-1!\cdot(\frac{{}_1C_0}{1!}\cdot x-\frac{{}_1C_1}{0!}\cdot\gamma)$　　${}_{\mathbf{0}}La_1(x)^{(1)}=-1!\cdot\frac{{}_1C_0}{0!}$

${}_{\mathbf{0}}La_2(x)=2!\cdot(\frac{{}_2C_0}{2!}\cdot x^2-\frac{{}_2C_1}{1!}\cdot\gamma\cdot x+\frac{{}_2C_2}{0!}\cdot\gamma^2)$

${}_{\mathbf{0}}La_2(x)^{(1)}=2!\cdot(\frac{{}_2C_0}{1!}\cdot x-\frac{{}_2C_1}{0!}\cdot\gamma)$　　${}_{\mathbf{0}}La_2(x)^{(2)}=2!\cdot\frac{{}_2C_0}{0!}$

${}_{\mathbf{0}}La_3(x)=-3!\cdot(\frac{{}_3C_0}{3!}\cdot x^3-\frac{{}_3C_1}{2!}\cdot\gamma\cdot x^2+\frac{{}_3C_2}{1!}\cdot\gamma^2\cdot x-\frac{{}_3C_3}{0!}\cdot\gamma^3)$

$$ {}_{0}La_3(x)^{(1)} = -3!\cdot\left(\frac{{}_3C_0}{2!}\cdot x^2 - \frac{{}_3C_1}{1!}\cdot\gamma\cdot x + \frac{{}_3C_2}{0!}\cdot\gamma^2\right) $$

$$ {}_{0}La_3(x)^{(2)} = -3!\cdot\left(\frac{{}_3C_0}{1!}\cdot x - \frac{{}_3C_1}{0!}\cdot\gamma\right) \qquad {}_{0}La_3(x)^{(3)} = -3!\cdot\frac{{}_3C_0}{0!} $$

$$ {}_{0}La_4(x) = 4!\cdot\left(\frac{{}_4C_0}{4!}\cdot x^4 - \frac{{}_4C_1}{3!}\cdot\gamma\cdot x^3 + \frac{{}_4C_2}{2!}\cdot\gamma^2\cdot x^2 - \frac{{}_4C_3}{1!}\cdot\gamma^3\cdot x + \frac{{}_4C_4}{0!}\cdot\gamma^4\right) $$

$$ {}_{0}La_4(x)^{(1)} = 4!\cdot\left(\frac{{}_4C_0}{3!}\cdot x^3 - \frac{{}_4C_1}{2!}\cdot\gamma\cdot x^2 + \frac{{}_4C_2}{1!}\cdot\gamma^2\cdot x - \frac{{}_4C_3}{0!}\cdot\gamma^3\right) $$

$$ {}_{0}La_4(x)^{(2)} = 4!\cdot\left(\frac{{}_4C_0}{2!}\cdot x^2 - \frac{{}_4C_1}{1!}\cdot\gamma\cdot x + \frac{{}_4C_2}{0!}\cdot\gamma^2\right) $$

$$ {}_{0}La_4(x)^{(3)} = 4!\cdot\left(\frac{{}_4C_0}{1!}\cdot x - \frac{{}_4C_1}{0!}\cdot\gamma\right) \qquad {}_{0}La_4(x)^{(3)} = 4!\cdot\frac{{}_4C_0}{0!} $$

$$ {}_{0}La_5(x) = -5!\cdot\left(\frac{{}_5C_0}{5!}\cdot x^5 - \frac{{}_5C_1}{4!}\cdot\gamma\cdot x^4 + \frac{{}_5C_2}{3!}\cdot\gamma^2\cdot x^3 - \frac{{}_5C_3}{2!}\cdot\gamma^3\cdot x^2 + \frac{{}_5C_4}{1!}\cdot\gamma^4\cdot x - \frac{{}_5C_5}{0!}\cdot\gamma^5\right) $$

$$ {}_{0}La_5(x)^{(1)} = -5!\cdot\left(\frac{{}_5C_0}{4!}\cdot x^4 - \frac{{}_5C_1}{3!}\cdot\gamma\cdot x^3 + \frac{{}_5C_2}{2!}\cdot\gamma^2\cdot x^2 - \frac{{}_5C_3}{1!}\cdot\gamma^3\cdot x + \frac{{}_5C_4}{0!}\cdot\gamma^4\right) $$

$$ {}_{0}La_5(x)^{(2)} = -5!\cdot\left(\frac{{}_5C_0}{3!}\cdot x^3 - \frac{{}_5C_1}{2!}\cdot\gamma\cdot x^2 + \frac{{}_5C_2}{1!}\cdot\gamma^2\cdot x - \frac{{}_5C_3}{0!}\cdot\gamma^3\right) $$

$$ {}_{0}La_5(x)^{(3)} = -5!\cdot\left(\frac{{}_5C_0}{2!}\cdot x^2 - \frac{{}_5C_1}{1!}\cdot\gamma\cdot x + \frac{{}_5C_2}{0!}\cdot\gamma^2\right) $$

$$ {}_{0}La_5(x)^{(4)} = -5!\cdot\left(\frac{{}_5C_0}{1!}\cdot x - \frac{{}_5C_1}{0!}\cdot\gamma\right) \qquad {}_{0}La_5(x)^{(5)} = -5!\cdot\frac{{}_5C_0}{0!} $$

$$ {}_{0}La_6(x) = 6!\cdot\left(\frac{{}_6C_0}{6!}\cdot x^6 - \frac{{}_6C_1}{5!}\cdot\gamma\cdot x^5 + \frac{{}_6C_2}{4!}\cdot\gamma^2\cdot x^4 - \frac{{}_6C_3}{3!}\cdot\gamma^3\cdot x^3 + \frac{{}_6C_4}{2!}\cdot\gamma^4\cdot x^2 - \frac{{}_6C_5}{1!}\cdot\gamma^5\cdot x \right. $$
$$ \left. + \frac{{}_6C_6}{0!}\cdot\gamma^6\right) $$

$$ {}_{0}La_6(x)^{(1)} = 6!\cdot\left(\frac{{}_6C_0}{5!}\cdot x^5 - \frac{{}_6C_1}{4!}\cdot\gamma\cdot x^4 + \frac{{}_6C_2}{3!}\cdot\gamma^2\cdot x^3 - \frac{{}_6C_3}{2!}\cdot\gamma^3\cdot x^2 + \frac{{}_6C_4}{1!}\cdot\gamma^4\cdot x - \frac{{}_6C_5}{0!}\cdot\gamma^5\right) $$

$$ {}_{0}La_6(x)^{(2)} = 6!\cdot\left(\frac{{}_6C_0}{4!}\cdot x^4 - \frac{{}_6C_1}{3!}\cdot\gamma\cdot x^3 + \frac{{}_6C_2}{2!}\cdot\gamma^2\cdot x^2 - \frac{{}_6C_3}{1!}\cdot\gamma^3\cdot x + \frac{{}_6C_4}{0!}\cdot\gamma^4\right) $$

$$ {}_{0}La_6(x)^{(3)} = 6!\cdot\left(\frac{{}_6C_0}{3!}\cdot x^3 - \frac{{}_6C_1}{2!}\cdot\gamma\cdot x^2 + \frac{{}_6C_2}{1!}\cdot\gamma^2\cdot x - \frac{{}_6C_3}{0!}\cdot\gamma^3\right) $$

$$ {}_{0}La_6(x)^{(4)} = 6!\cdot\left(\frac{{}_6C_0}{2!}\cdot x^2 - \frac{{}_6C_1}{1!}\cdot\gamma\cdot x + \frac{{}_6C_2}{0!}\cdot\gamma^2\right) $$

$$ {}_{0}La_6(x)^{(5)} = 6!\cdot\left(\frac{{}_6C_0}{1!}\cdot x - \frac{{}_6C_1}{0!}\cdot\gamma\right) \qquad {}_{0}La_6(x)^{(6)} = 6!\cdot\frac{{}_6C_0}{0!} $$

$$ {}_{\mathbf{0}}La_7(x) \;=-7!\cdot(\frac{{}_7C_0}{7!}\cdot x^7-\frac{{}_7C_1}{6!}\cdot\gamma\cdot x^6+\frac{{}_7C_2}{5!}\cdot\gamma^2\cdot x^5-\frac{{}_7C_3}{4!}\cdot\gamma^3\cdot x^4+\frac{{}_7C_4}{3!}\cdot\gamma^4\cdot x^3-\frac{{}_7C_5}{2!}\cdot\gamma^5\cdot x^2 +\frac{{}_7C_6}{1!}\cdot\gamma^6\cdot x-\frac{{}_7C_7}{0!}\cdot\gamma^7) $$

$$ {}_{\mathbf{0}}La_7(x)^{(1)}=-7!\cdot(\frac{{}_7C_0}{6!}\cdot x^6-\frac{{}_7C_1}{5!}\cdot\gamma\cdot x^5+\frac{{}_7C_2}{4!}\cdot\gamma^2\cdot x^4-\frac{{}_7C_3}{3!}\cdot\gamma^3\cdot x^3+\frac{{}_7C_4}{2!}\cdot\gamma^4\cdot x^2-\frac{{}_7C_5}{1!}\cdot\gamma^5\cdot x +\frac{{}_7C_6}{0!}\cdot\gamma^6) $$

$$ {}_{\mathbf{0}}La_7(x)^{(2)}=-7!\cdot(\frac{{}_7C_0}{5!}\cdot x^5-\frac{{}_7C_1}{4!}\cdot\gamma\cdot x^4+\frac{{}_7C_2}{3!}\cdot\gamma^2\cdot x^3-\frac{{}_7C_3}{2!}\cdot\gamma^3\cdot x^2+\frac{{}_7C_4}{1!}\cdot\gamma^4\cdot x-\frac{{}_7C_5}{0!}\cdot\gamma^5) $$

$$ {}_{\mathbf{0}}La_7(x)^{(3)}=-7!\cdot(\frac{{}_7C_0}{4!}\cdot x^4-\frac{{}_7C_1}{3!}\cdot\gamma\cdot x^3+\frac{{}_7C_2}{2!}\cdot\gamma^2\cdot x^2-\frac{{}_7C_3}{1!}\cdot\gamma^3\cdot x+\frac{{}_7C_4}{0!}\cdot\gamma^4) $$

$$ {}_{\mathbf{0}}La_7(x)^{(4)}=-7!\cdot(\frac{{}_7C_0}{3!}\cdot x^3-\frac{{}_7C_1}{2!}\cdot\gamma\cdot x^2+\frac{{}_7C_2}{1!}\cdot\gamma^2\cdot x-\frac{{}_7C_3}{0!}\cdot\gamma^3) $$

$$ {}_{\mathbf{0}}La_7(x)^{(5)}=-7!\cdot(\frac{{}_7C_0}{2!}\cdot x^2-\frac{{}_7C_1}{1!}\cdot\gamma\cdot x+\frac{{}_7C_2}{0!}\cdot\gamma^2) $$

$$ {}_{\mathbf{0}}La_7(x)^{(6)}=-7!\cdot(\frac{{}_7C_0}{1!}\cdot x-\frac{{}_7C_1}{0!}\cdot\gamma) \qquad {}_{\mathbf{0}}La_7(x)^{(6)}=-7!\cdot\frac{{}_7C_0}{0!} $$

$$ {}_{\mathbf{0}}La_8(x) \;=\; 8!\cdot(\frac{{}_8C_0}{8!}\cdot x^8-\frac{{}_8C_1}{7!}\cdot\gamma\cdot x^7+\frac{{}_8C_2}{6!}\cdot\gamma^2\cdot x^6+\frac{{}_8C_3}{5!}\cdot\gamma^3\cdot x^5-\frac{{}_8C_4}{4!}\cdot\gamma^4\cdot x^4+\frac{{}_8C_5}{3!}\cdot\gamma^5\cdot x^3 -\frac{{}_8C_6}{2!}\cdot\gamma^6\cdot x^2+\frac{{}_8C_7}{1!}\cdot\gamma^7\ x-\frac{{}_8C_8}{0!}\cdot\gamma^8) $$

$$ {}_{\mathbf{0}}La_8(x)^{(1)} = 8!\cdot(\frac{{}_8C_0}{7!}\cdot x^7-\frac{{}_8C_1}{6!}\cdot\gamma\cdot x^6+\frac{{}_8C_2}{5!}\cdot\gamma^2\cdot x^5+\frac{{}_8C_3}{4!}\cdot\gamma^3\cdot x^4-\frac{{}_8C_4}{3!}\cdot\gamma^4\cdot x^3+\frac{{}_8C_5}{2!}\cdot\gamma^5\cdot x^2 -\frac{{}_8C_6}{1!}\cdot\gamma^6\cdot x+\frac{{}_8C_7}{0!}\cdot\gamma^7) $$

$$ {}_{\mathbf{0}}La_8(x)^{(2)} = 8!\cdot(\frac{{}_8C_0}{6!}\cdot x^6-\frac{{}_8C_1}{5!}\cdot\gamma\cdot x^5+\frac{{}_8C_2}{4!}\cdot\gamma^2\cdot x^4+\frac{{}_8C_3}{3!}\cdot\gamma^3\cdot x^3-\frac{{}_8C_4}{2!}\cdot\gamma^4\cdot x^2+\frac{{}_8C_5}{1!}\cdot\gamma^5\cdot x -\frac{{}_8C_6}{0!}\cdot\gamma^6) $$

$$ {}_{\mathbf{0}}La_8(x)^{(3)} = 8!\cdot(\frac{{}_8C_0}{5!}\cdot x^5-\frac{{}_8C_1}{4!}\cdot\gamma\cdot x^4+\frac{{}_8C_2}{3!}\cdot\gamma^2\cdot x^3+\frac{{}_8C_3}{2!}\cdot\gamma^3\cdot x^2-\frac{{}_8C_4}{1!}\cdot\gamma^4\cdot x+\frac{{}_8C_5}{0!}\cdot\gamma^5) $$

$$ {}_{\mathbf{0}}La_8(x)^{(4)} = 8!\cdot(\frac{{}_8C_0}{4!}\cdot x^4-\frac{{}_8C_1}{3!}\cdot\gamma\cdot x^3+\frac{{}_8C_2}{2!}\cdot\gamma^2\cdot x^2+\frac{{}_8C_3}{1!}\cdot\gamma^3\cdot x-\frac{{}_8C_4}{0!}\cdot\gamma^4) $$

$$ {}_{\mathbf{0}}La_8(x)^{(5)} = 8!\cdot(\frac{{}_8C_0}{3!}\cdot x^3-\frac{{}_8C_1}{2!}\cdot\gamma\cdot x^2+\frac{{}_8C_2}{1!}\cdot\gamma^2\cdot x+\frac{{}_8C_3}{0!}\cdot\gamma^3) $$

$$_{\mathbf{0}}La_8(x)^{(6)} = 8!\cdot(\frac{_8C_0}{2!}\cdot x^2 - \frac{_8C_1}{1!}\cdot\gamma\cdot x + \frac{_8C_2}{0!}\cdot\gamma^2)$$

$$_{\mathbf{0}}La_8(x)^{(7)} = 8!\cdot(\frac{_8C_0}{1!}\cdot x - \frac{_8C_1}{0!}\cdot\gamma) \qquad _{\mathbf{0}}La_8(x)^{(8)} = 8!\cdot\frac{_8C_0}{0!}$$

$$_{\mathbf{0}}La_9(x) = -9!\cdot(\frac{_9C_0}{9!}\cdot x^9 - \frac{_9C_1}{8!}\cdot\gamma\cdot x^8 + \frac{_9C_2}{7!}\cdot\gamma^2\cdot x^7 - \frac{_9C_3}{6!}\cdot\gamma^3\cdot x^6 + \frac{_9C_4}{5!}\cdot\gamma^4\cdot x^5 - \frac{_9C_5}{4!}\cdot\gamma^5\cdot x^4 + \frac{_9C_6}{3!}\cdot\gamma^6\cdot x^3 - \frac{_9C_7}{2!}\cdot\gamma^7\cdot x^2 + \frac{_9C_8}{1!}\cdot\gamma^8\cdot x - \frac{_9C_9}{0!}\cdot\gamma^9)$$

$$_{\mathbf{0}}La_9(x)^{(1)} = -9!\cdot(\frac{_9C_0}{8!}\cdot x^8 - \frac{_9C_1}{7!}\cdot\gamma\cdot x^7 + \frac{_9C_2}{6!}\cdot\gamma^2\cdot x^6 - \frac{_9C_3}{5!}\cdot\gamma^3\cdot x^5 + \frac{_9C_4}{4!}\cdot\gamma^4\cdot x^4 - \frac{_9C_5}{3!}\cdot\gamma^5\cdot x^3 + \frac{_9C_6}{2!}\cdot\gamma^6\cdot x^2 - \frac{_9C_7}{1!}\cdot\gamma^7\cdot x + \frac{_9C_8}{0!}\cdot\gamma^8)$$

$$_{\mathbf{0}}La_9(x)^{(2)} = -9!\cdot(\frac{_9C_0}{7!}\cdot x^7 - \frac{_9C_1}{6!}\cdot\gamma\cdot x^6 + \frac{_9C_2}{5!}\cdot\gamma^2\cdot x^5 - \frac{_9C_3}{4!}\cdot\gamma^3\cdot x^4 + \frac{_9C_4}{3!}\cdot\gamma^4\cdot x^3 - \frac{_9C_5}{2!}\cdot\gamma^5\cdot x^2 + \frac{_9C_6}{1!}\cdot\gamma^6\cdot x^1 - \frac{_9C_7}{0!}\cdot\gamma^7)$$

$$_{\mathbf{0}}La_9(x)^{(3)} = -9!\cdot(\frac{_9C_0}{6!}\cdot x^6 - \frac{_9C_1}{5!}\cdot\gamma\cdot x^5 + \frac{_9C_2}{4!}\cdot\gamma^2\cdot x^4 - \frac{_9C_3}{3!}\cdot\gamma^3\cdot x^3 + \frac{_9C_4}{2!}\cdot\gamma^4\cdot x^2 - \frac{_9C_5}{1!}\cdot\gamma^5\cdot x + \frac{_9C_6}{0!}\cdot\gamma^6)$$

$$_{\mathbf{0}}La_9(x)^{(4)} = -9!\cdot(\frac{_9C_0}{5!}\cdot x^5 - \frac{_9C_1}{4!}\cdot\gamma\cdot x^4 + \frac{_9C_2}{3!}\cdot\gamma^2\cdot x^3 - \frac{_9C_3}{2!}\cdot\gamma^3\cdot x^2 + \frac{_9C_4}{1!}\cdot\gamma^4\cdot x - \frac{_9C_5}{0!}\cdot\gamma^5)$$

$$_{\mathbf{0}}La_9(x)^{(5)} = -9!\cdot(\frac{_9C_0}{4!}\cdot x^4 - \frac{_9C_1}{3!}\cdot\gamma\cdot x^3 + \frac{_9C_2}{2!}\cdot\gamma^2\cdot x^2 - \frac{_9C_3}{1!}\cdot\gamma^3\cdot x + \frac{_9C_4}{0!}\cdot\gamma^4)$$

$$_{\mathbf{0}}La_9(x)^{(6)} = -9!\cdot(\frac{_9C_0}{3!}\cdot x^3 - \frac{_9C_1}{2!}\cdot\gamma\cdot x^2 + \frac{_9C_2}{1!}\cdot\gamma^2\cdot x - \frac{_9C_3}{0!}\cdot\gamma^3)$$

$$_{\mathbf{0}}La_9(x)^{(7)} = -9!\cdot(\frac{_9C_0}{2!}\cdot x^2 - \frac{_9C_1}{1!}\cdot\gamma\cdot x + \frac{_9C_2}{0!}\cdot\gamma^2)$$

$$_{\mathbf{0}}La_9(x)^{(8)} = -9!\cdot(\frac{_9C_0}{1!}\cdot x - \frac{_9C_1}{0!}\cdot\gamma) \qquad _{\mathbf{0}}La_9(x)^{(9)} = -9!\cdot\frac{_9C_0}{0!}$$

$$_{\mathbf{0}}La_{10}(x) = 10!\cdot(\frac{_{10}C_0}{10!}\cdot x^{10} - \frac{_{10}C_1}{9!}\cdot\gamma\cdot x^9 + \frac{_{10}C_2}{8!}\cdot\gamma^2\cdot x^8 - \frac{_{10}C_3}{7!}\cdot\gamma^3\cdot x^7 + \frac{_{10}C_4}{6!}\cdot\gamma^4\cdot x^6 - \frac{_{10}C_5}{5!}\cdot\gamma^5\cdot x^5 + \frac{_{10}C_6}{4!}\cdot\gamma^6\cdot x^4 - \frac{_{10}C_7}{3!}\cdot\gamma^7\cdot x^3 + \frac{_{10}C_8}{2!}\cdot\gamma^8\cdot x^2 - \frac{_{10}C_9}{1!}\cdot\gamma^9\cdot x + \frac{_{10}C_{10}}{0!}\cdot\gamma^{10})$$

$$ {}_0La_{10}(x)^{(1)} = 10!\cdot(\frac{{}_{10}C_0}{9!}\cdot x^9 - \frac{{}_{10}C_1}{8!}\cdot\gamma\cdot x^8 + \frac{{}_{10}C_2}{7!}\cdot\gamma^2\cdot x^7 - \frac{{}_{10}C_3}{6!}\cdot\gamma^3\cdot x^6 + \frac{{}_{10}C_4}{5!}\cdot\gamma^4\cdot x^5 - \frac{{}_{10}C_5}{4!}\cdot\gamma^5\cdot x^4 + \frac{{}_{10}C_6}{3!}\cdot\gamma^6\cdot x^3 - \frac{{}_{10}C_7}{2!}\cdot\gamma^7\cdot x^2 + \frac{{}_{10}C_8}{1!}\cdot\gamma^8\cdot x - \frac{{}_{10}C_9}{0!}\cdot\gamma^9) $$

$$ {}_0La_{10}(x)^{(2)} = 10!\cdot(\frac{{}_{10}C_0}{8!}\cdot x^8 - \frac{{}_{10}C_1}{7!}\cdot\gamma\cdot x^7 + \frac{{}_{10}C_2}{6!}\cdot\gamma^2\cdot x^6 - \frac{{}_{10}C_3}{5!}\cdot\gamma^3\cdot x^5 + \frac{{}_{10}C_4}{4!}\cdot\gamma^4\cdot x^4 - \frac{{}_{10}C_5}{3!}\cdot\gamma^5\cdot x^3 + \frac{{}_{10}C_6}{2!}\cdot\gamma^6\cdot x^2 - \frac{{}_{10}C_7}{1!}\cdot\gamma^7\cdot x + \frac{{}_{10}C_8}{0!}\cdot\gamma^8) $$

$$ {}_0La_{10}(x)^{(4)} = 10!\cdot(\frac{{}_{10}C_0}{6!}\cdot x^6 - \frac{{}_{10}C_1}{5!}\cdot\gamma\cdot x^5 + \frac{{}_{10}C_2}{4!}\cdot\gamma^2\cdot x^4 - \frac{{}_{10}C_3}{3!}\cdot\gamma^3\cdot x^3 + \frac{{}_{10}C_4}{2!}\cdot\gamma^4\cdot x^2 - \frac{{}_{10}C_5}{1!}\cdot\gamma^5\cdot x + \frac{{}_{10}C_6}{0!}\cdot\gamma^6) $$

$$ {}_0La_{10}(x)^{(5)} = 10!\cdot(\frac{{}_{10}C_0}{5!}\cdot x^5 - \frac{{}_{10}C_1}{4!}\cdot\gamma\cdot x^4 + \frac{{}_{10}C_2}{3!}\cdot\gamma^2\cdot x^3 - \frac{{}_{10}C_3}{2!}\cdot\gamma^3\cdot x^2 + \frac{{}_{10}C_4}{1!}\cdot\gamma^4\cdot x - \frac{{}_{10}C_5}{0!}\cdot\gamma^5) $$

$$ {}_0La_{10}(x)^{(6)} = 10!\cdot(\frac{{}_{10}C_0}{4!}\cdot x^4 - \frac{{}_{10}C_1}{3!}\cdot\gamma\cdot x^3 + \frac{{}_{10}C_2}{2!}\cdot\gamma^2\cdot x^2 - \frac{{}_{10}C_3}{1!}\cdot\gamma^3\cdot x + \frac{{}_{10}C_4}{0!}\cdot\gamma^4) $$

$$ {}_0La_{10}(x)^{(7)} = 10!\cdot(\frac{{}_{10}C_0}{3!}\cdot x^3 - \frac{{}_{10}C_1}{2!}\cdot\gamma\cdot x^2 + \frac{{}_{10}C_2}{1!}\cdot\gamma^2\cdot x - \frac{{}_{10}C_3}{0!}\cdot\gamma^3) $$

$$ {}_0La_{10}(x)^{(8)} = 10!\cdot(\frac{{}_{10}C_0}{2!}\cdot x^2 - \frac{{}_{10}C_1}{1!}\cdot\gamma\cdot x + \frac{{}_{10}C_2}{0!}\cdot\gamma^2) $$

$$ {}_0La_{10}(x)^{(9)} = 10!\cdot(\frac{{}_{10}C_0}{1!}\cdot x - \frac{{}_{10}C_1}{0!}\cdot\gamma) \qquad {}_0La_{10}(x)^{(10)} = 10!\cdot\frac{{}_{10}C_0}{0!} $$

$$ {}_0La_{11}(x) = -11!\cdot(\frac{{}_{11}C_0}{11!}\cdot x^{11} - \frac{{}_{11}C_1}{10!}\cdot\gamma\cdot x^{10} + \frac{{}_{11}C_2}{9!}\cdot\gamma^2\cdot x^9 - \frac{{}_{11}C_3}{8!}\cdot\gamma^3\cdot x^8 + \frac{{}_{11}C_4}{7!}\cdot\gamma^4\cdot x^7 - \frac{{}_{11}C_5}{6!}\cdot\gamma^5\cdot x^6 + \frac{{}_{11}C_6}{5!}\cdot\gamma^6\cdot x^5 - \frac{{}_{11}C_7}{4!}\cdot\gamma^7\cdot x^4 + \frac{{}_{11}C_8}{3!}\cdot\gamma^8\cdot x^3 - \frac{{}_{11}C_9}{2!}\cdot\gamma^9\cdot x^2 + \frac{{}_{11}C_{10}}{1!}\cdot\gamma^{10}\cdot x - \frac{{}_{11}C_{11}}{0!}\cdot\gamma^{11}) $$

$$ {}_0La_{11}(x)^{(1)} = -11!\cdot(\frac{{}_{11}C_0}{10!}\cdot x^{10} - \frac{{}_{11}C_1}{9!}\cdot\gamma\cdot x^9 + \frac{{}_{11}C_2}{8!}\cdot\gamma^2\cdot x^8 - \frac{{}_{11}C_3}{7!}\cdot\gamma^3\cdot x^7 + \frac{{}_{11}C_4}{6!}\cdot\gamma^4\cdot x^6 - \frac{{}_{11}C_5}{5!}\cdot\gamma^5\cdot x^5 + \frac{{}_{11}C_6}{4!}\cdot\gamma^6\cdot x^4 - \frac{{}_{11}C_7}{3!}\cdot\gamma^7\cdot x^3 + \frac{{}_{11}C_8}{2!}\cdot\gamma^8\cdot x^2 - \frac{{}_{11}C_9}{1!}\cdot\gamma^9\cdot x + \frac{{}_{11}C_{10}}{0!}\cdot\gamma^{10}) $$

$$ {}_{0}La_{11}(x)^{(2)} = -11!\cdot(\frac{{}_{11}C_0}{9!}\cdot x^9 - \frac{{}_{11}C_1}{8!}\cdot\gamma\cdot x^8 + \frac{{}_{11}C_2}{7!}\cdot\gamma^2\cdot x^7 - \frac{{}_{11}C_3}{6!}\cdot\gamma^3\cdot x^6 + \frac{{}_{11}C_4}{5!}\cdot\gamma^4\cdot x^5 - \frac{{}_{11}C_5}{4!}\cdot\gamma^5\cdot x^4 + \frac{{}_{11}C_6}{3!}\cdot\gamma^6\cdot x^3 - \frac{{}_{11}C_7}{2!}\cdot\gamma^7\cdot x^2 + \frac{{}_{11}C_8}{1!}\cdot\gamma^8\cdot x - \frac{{}_{11}C_9}{0!}\cdot\gamma^9) $$

$$ {}_{0}La_{11}(x)^{(3)} = -11!\cdot(\frac{{}_{11}C_0}{8!}\cdot x^8 - \frac{{}_{11}C_1}{7!}\cdot\gamma\cdot x^7 + \frac{{}_{11}C_2}{6!}\cdot\gamma^2\cdot x^6 - \frac{{}_{11}C_3}{5!}\cdot\gamma^3\cdot x^5 + \frac{{}_{11}C_4}{4!}\cdot\gamma^4\cdot x^4 - \frac{{}_{11}C_5}{3!}\cdot\gamma^5\cdot x^3 + \frac{{}_{11}C_6}{2!}\cdot\gamma^6\cdot x^2 - \frac{{}_{11}C_7}{1!}\cdot\gamma^7\cdot x + \frac{{}_{11}C_8}{0!}\cdot\gamma^8) $$

$$ {}_{0}La_{11}(x)^{(4)} = -11!\cdot(\frac{{}_{11}C_0}{7!}\cdot x^7 - \frac{{}_{11}C_1}{6!}\cdot\gamma\cdot x^6 + \frac{{}_{11}C_2}{5!}\cdot\gamma^2\cdot x^5 - \frac{{}_{11}C_3}{4!}\cdot\gamma^3\cdot x^4 + \frac{{}_{11}C_4}{3!}\cdot\gamma^4\cdot x^3 - \frac{{}_{11}C_5}{2!}\cdot\gamma^5\cdot x^2 + \frac{{}_{11}C_6}{1!}\cdot\gamma^6\cdot x - \frac{{}_{11}C_7}{0!}\cdot\gamma^7) $$

$$ {}_{0}La_{11}(x)^{(5)} = -11!\cdot(\frac{{}_{11}C_0}{6!}\cdot x^6 - \frac{{}_{11}C_1}{5!}\cdot\gamma\cdot x^5 + \frac{{}_{11}C_2}{4!}\cdot\gamma^2\cdot x^4 - \frac{{}_{11}C_3}{3!}\cdot\gamma^3\cdot x^3 + \frac{{}_{11}C_4}{2!}\cdot\gamma^4\cdot x^2 - \frac{{}_{11}C_5}{1!}\cdot\gamma^5\cdot x + \frac{{}_{11}C_6}{0!}\cdot\gamma^6) $$

$$ {}_{0}La_{11}(x)^{(6)} = -11!\cdot(\frac{{}_{11}C_0}{5!}\cdot x^5 - \frac{{}_{11}C_1}{4!}\cdot\gamma\cdot x^4 + \frac{{}_{11}C_2}{3!}\cdot\gamma^2\cdot x^3 - \frac{{}_{11}C_3}{2!}\cdot\gamma^3\cdot x^2 + \frac{{}_{11}C_4}{1!}\cdot\gamma^4\cdot x - \frac{{}_{11}C_5}{0!}\cdot\gamma^5) $$

$$ {}_{0}La_{11}(x)^{(7)} = -11!\cdot(\frac{{}_{11}C_0}{4!}\cdot x^4 - \frac{{}_{11}C_1}{3!}\cdot\gamma\cdot x^3 + \frac{{}_{11}C_2}{2!}\cdot\gamma^2\cdot x^2 - \frac{{}_{11}C_3}{1!}\cdot\gamma^3\cdot x + \frac{{}_{11}C_4}{0!}\cdot\gamma^4) $$

$$ {}_{0}La_{11}(x)^{(8)} = -11!\cdot(\frac{{}_{11}C_0}{3!}\cdot x^3 - \frac{{}_{11}C_1}{2!}\cdot\gamma\cdot x^2 + \frac{{}_{11}C_2}{1!}\cdot\gamma^2\cdot x - \frac{{}_{11}C_3}{0!}\cdot\gamma^3) $$

$$ {}_{0}La_{11}(x)^{(9)} = -11!\cdot(\frac{{}_{11}C_0}{2!}\cdot x^2 - \frac{{}_{11}C_1}{1!}\cdot\gamma\cdot x + \frac{{}_{11}C_2}{0!}\cdot\gamma^2) $$

$$ {}_{0}La_{11}(x)^{(10)} = -11!\cdot(\frac{{}_{11}C_0}{1!}\cdot x - \frac{{}_{11}C_1}{0!}\cdot\gamma) \qquad {}_{0}La_{11}(x)^{(11)} = -11!\cdot\frac{{}_{11}C_0}{0!} $$

$$ {}_{0}La_{12}(x) = 12!\cdot(\frac{{}_{12}C_0}{12!}\cdot x^{12} - \frac{{}_{12}C_1}{11!}\cdot\gamma\cdot x^{11} + \frac{{}_{12}C_2}{10!}\cdot\gamma^2\cdot x^{10} - \frac{{}_{12}C_3}{9!}\cdot\gamma^3\cdot x^9 + \frac{{}_{12}C_4}{8!}\cdot\gamma^4\cdot x^8 - \frac{{}_{12}C_5}{7!}\cdot\gamma^5\cdot x^7 + \frac{{}_{12}C_6}{6!}\cdot\gamma^6\cdot x^6 - \frac{{}_{12}C_7}{5!}\cdot\gamma^7\cdot x^5 + \frac{{}_{12}C_8}{4!}\cdot\gamma^8\cdot x^4 - \frac{{}_{12}C_9}{3!}\cdot\gamma^9\cdot x^3 + \frac{{}_{12}C_{10}}{2!}\cdot\gamma^{10}\cdot x^2 - \frac{{}_{12}C_{11}}{1!}\cdot\gamma^{11}\cdot x + \frac{{}_{12}C_{12}}{0!}\cdot\gamma^{12}) $$

$$ {}_{0}La_{12}(x)^{(1)} = 12!\cdot(\frac{{}_{12}C_0}{11!}\cdot x^{11} - \frac{{}_{12}C_1}{10!}\cdot\gamma\cdot x^{10} + \frac{{}_{12}C_2}{9!}\cdot\gamma^2\cdot x^9 - \frac{{}_{12}C_3}{8!}\cdot\gamma^3\cdot x^8 + \frac{{}_{12}C_4}{7!}\cdot\gamma^4\cdot x^7 - \frac{{}_{12}C_5}{6!}\cdot\gamma^5\cdot x^6 + \frac{{}_{12}C_6}{5!}\cdot\gamma^6\cdot x^5 - \frac{{}_{12}C_7}{4!}\cdot\gamma^7\cdot x^4 + \frac{{}_{12}C_8}{3!}\cdot\gamma^8\cdot x^3 - \frac{{}_{12}C_9}{2!}\cdot\gamma^9\cdot x^2 + \frac{{}_{12}C_{10}}{1!}\cdot\gamma^{10}\cdot x - \frac{{}_{12}C_{11}}{0!}\cdot\gamma^{11}) $$

$$
\begin{aligned}
{}_{\mathbf{0}}La_{12}(x)^{(2)} = 12!\cdot(&\frac{{}_{12}C_0}{10!}\cdot x^{10} - \frac{{}_{12}C_1}{9!}\cdot\gamma\cdot x^9 + \frac{{}_{12}C_2}{8!}\cdot\gamma^2\cdot x^8 - \frac{{}_{12}C_3}{7!}\cdot\gamma^3\cdot x^7 + \frac{{}_{12}C_4}{6!}\cdot\gamma^4\cdot x^6 \\
&- \frac{{}_{12}C_5}{5!}\cdot\gamma^5\cdot x^5 + \frac{{}_{12}C_6}{4!}\cdot\gamma^6\cdot x^4 - \frac{{}_{12}C_7}{3!}\cdot\gamma^7\cdot x^3 + \frac{{}_{12}C_8}{2!}\cdot\gamma^8\cdot x^2 \\
&- \frac{{}_{12}C_9}{1!}\cdot\gamma^9\cdot x + \frac{{}_{12}C_{10}}{0!}\cdot\gamma^{10})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_{\mathbf{0}}La_{12}(x)^{(3)} = 12!\cdot(&\frac{{}_{12}C_0}{9!}\cdot x^9 - \frac{{}_{12}C_1}{8!}\cdot\gamma\cdot x^8 + \frac{{}_{12}C_2}{7!}\cdot\gamma^2\cdot x^7 - \frac{{}_{12}C_3}{6!}\cdot\gamma^3\cdot x^6 + \frac{{}_{12}C_4}{5!}\cdot\gamma^4\cdot x^5 \\
&- \frac{{}_{12}C_5}{4!}\cdot\gamma^5\cdot x^4 + \frac{{}_{12}C_6}{3!}\cdot\gamma^6\cdot x^3 - \frac{{}_{12}C_7}{2!}\cdot\gamma^7\cdot x^2 + \frac{{}_{12}C_8}{1!}\cdot\gamma^8\cdot x - \frac{{}_{12}C_9}{0!}\cdot\gamma
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_{\mathbf{0}}La_{12}(x)^{(4)} = 12!\cdot(&\frac{{}_{12}C_0}{8!}\cdot x^8 - \frac{{}_{12}C_1}{7!}\cdot\gamma\cdot x^7 + \frac{{}_{12}C_2}{6!}\cdot\gamma^2\cdot x^6 - \frac{{}_{12}C_3}{5!}\cdot\gamma^3\cdot x^5 + \frac{{}_{12}C_4}{4!}\cdot\gamma^4\cdot x^4 \\
&- \frac{{}_{12}C_5}{3!}\cdot\gamma^5\cdot x^3 + \frac{{}_{12}C_6}{2!}\cdot\gamma^6\cdot x^2 - \frac{{}_{12}C_7}{1!}\cdot\gamma^7\cdot x + \frac{{}_{12}C_8}{0!}\cdot\gamma^8)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_{\mathbf{0}}La_{12}(x)^{(5)} = 12!\cdot(&\frac{{}_{12}C_0}{7!}\cdot x^7 - \frac{{}_{12}C_1}{6!}\cdot\gamma\cdot x^6 + \frac{{}_{12}C_2}{5!}\cdot\gamma^2\cdot x^5 - \frac{{}_{12}C_3}{4!}\cdot\gamma^3\cdot x^4 + \frac{{}_{12}C_4}{3!}\cdot\gamma^4\cdot x^3 \\
&- \frac{{}_{12}C_5}{2!}\cdot\gamma^5\cdot x^2 + \frac{{}_{12}C_6}{1!}\cdot\gamma^6\cdot x - \frac{{}_{12}C_7}{0!}\cdot\gamma^7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_{\mathbf{0}}La_{12}(x)^{(6)} = 12!\cdot(&\frac{{}_{12}C_0}{6!}\cdot x^6 - \frac{{}_{12}C_1}{5!}\cdot\gamma\cdot x^5 + \frac{{}_{12}C_2}{4!}\cdot\gamma^2\cdot x^4 - \frac{{}_{12}C_3}{3!}\cdot\gamma^3\cdot x^3 + \frac{{}_{12}C_4}{2!}\cdot\gamma^4\cdot x^2 \\
&- \frac{{}_{12}C_5}{1!}\cdot\gamma^5\cdot x + \frac{{}_{12}C_6}{0!}\cdot\gamma^6)
\end{aligned}
$$

$$
{}_{\mathbf{0}}La_{12}(x)^{(7)} = 12!\cdot(\frac{{}_{12}C_0}{5!}\cdot x^5 - \frac{{}_{12}C_1}{4!}\cdot\gamma\cdot x^4 + \frac{{}_{12}C_2}{3!}\cdot\gamma^2\cdot x^3 - \frac{{}_{12}C_3}{2!}\cdot\gamma^3\cdot x^2 + \frac{{}_{12}C_4}{1!}\cdot\gamma^4\cdot x - \frac{{}_{12}C_5}{0!}\cdot\gamma^5
$$

$$
{}_{\mathbf{0}}La_{12}(x)^{(8)} = 12!\cdot(\frac{{}_{12}C_0}{4!}\cdot x^4 - \frac{{}_{12}C_1}{3!}\cdot\gamma\cdot x^3 + \frac{{}_{12}C_2}{2!}\cdot\gamma^2\cdot x^2 - \frac{{}_{12}C_3}{1!}\cdot\gamma^3\cdot x + \frac{{}_{12}C_4}{0!}\cdot\gamma^4)
$$

$$
{}_{\mathbf{0}}La_{12}(x)^{(9)} = 12!\cdot(\frac{{}_{12}C_0}{3!}\cdot x^3 - \frac{{}_{12}C_1}{2!}\cdot\gamma\cdot x^2 + \frac{{}_{12}C_2}{1!}\cdot\gamma^2\cdot x - \frac{{}_{12}C_3}{0!}\cdot\gamma^3)
$$

$$
{}_{\mathbf{0}}La_{12}(x)^{(10)} = 12!\cdot(\frac{{}_{12}C_0}{2!}\cdot x^2 - \frac{{}_{12}C_1}{1!}\cdot\gamma\cdot x + \frac{{}_{12}C_2}{0!}\cdot\gamma^2)
$$

$$
{}_{\mathbf{0}}La_{12}(x)^{(11)} = 12!\cdot(\frac{{}_{12}C_0}{1!}\cdot x - \frac{{}_{12}C_1}{0!}\cdot\gamma) \qquad {}_{\mathbf{0}}La_{12}(x)^{(12)} = 12!\cdot\frac{{}_{12}C_0}{0!}
$$

$$\mathbf{_0}La_{13}(x) = -13!\cdot(\frac{{}_{13}C_0}{13!}\cdot x^{13} - \frac{{}_{13}C_1}{12!}\cdot\gamma\cdot x^{12} + \frac{{}_{13}C_2}{11!}\cdot\gamma^2\cdot x^{11} - \frac{{}_{13}C_3}{10!}\cdot\gamma^3\cdot x^{10} + \frac{{}_{13}C_4}{9!}\cdot\gamma^4\cdot x^9$$
$$-\frac{{}_{13}C_5}{8!}\cdot\gamma^5\cdot x^8 + \frac{{}_{13}C_6}{7!}\cdot\gamma^6\cdot x^7 - \frac{{}_{13}C_7}{6!}\cdot\gamma^7\cdot x^6 + \frac{{}_{13}C_8}{5!}\cdot\gamma^8\cdot x^5$$
$$-\frac{{}_{13}C_9}{4!}\cdot\gamma^9\cdot x^4 + \frac{{}_{13}C_{10}}{3!}\cdot\gamma^{10}\cdot x^3 - \frac{{}_{13}C_{11}}{2!}\cdot\gamma^{11}\cdot x^2 + \frac{{}_{13}C_{12}}{1!}\cdot\gamma^{12}\cdot x$$
$$-\frac{{}_{13}C_0}{0!}\cdot\gamma^{13})$$

$$\mathbf{_0}La_{13}(x)^{(1)} = -13!\cdot(\frac{{}_{13}C_0}{12!}\cdot x^{12} - \frac{{}_{13}C_1}{11!}\cdot\gamma\cdot x^{11} + \frac{{}_{13}C_2}{10!}\cdot\gamma^2\cdot x^{10} - \frac{{}_{13}C_3}{9!}\cdot\gamma^3\cdot x^9 + \frac{{}_{13}C_4}{8!}\cdot\gamma^4\cdot x^8$$
$$-\frac{{}_{13}C_5}{7!}\cdot\gamma^5\cdot x^7 + \frac{{}_{13}C_6}{6!}\cdot\gamma^6\cdot x^6 - \frac{{}_{13}C_7}{5!}\cdot\gamma^7\cdot x^5 + \frac{{}_{13}C_8}{4!}\cdot\gamma^8\cdot x^4$$
$$-\frac{{}_{13}C_9}{3!}\cdot\gamma^9\cdot x^3 + \frac{{}_{13}C_{10}}{2!}\cdot\gamma^{10}\cdot x^2 - \frac{{}_{13}C_{11}}{1!}\cdot\gamma^{11}\cdot x + \frac{{}_{13}C_{12}}{0!}\cdot\gamma^{12})$$

$$\mathbf{_0}La_{13}(x)^{(2)} = -13!\cdot(\frac{{}_{13}C_0}{11!}\cdot x^{11} - \frac{{}_{13}C_1}{10!}\cdot\gamma\cdot x^{10} + \frac{{}_{13}C_2}{9!}\cdot\gamma^2\cdot x^9 - \frac{{}_{13}C_3}{8!}\cdot\gamma^3\cdot x^8 + \frac{{}_{13}C_4}{7!}\cdot\gamma^4\cdot x^7$$
$$-\frac{{}_{13}C_5}{6!}\cdot\gamma^5\cdot x^6 + \frac{{}_{13}C_6}{5!}\cdot\gamma^6\cdot x^5 - \frac{{}_{13}C_7}{4!}\cdot\gamma^7\cdot x^4 + \frac{{}_{13}C_8}{3!}\cdot\gamma^8\cdot x^3$$
$$-\frac{{}_{13}C_9}{2!}\cdot\gamma^9\cdot x^2 + \frac{{}_{13}C_{10}}{1!}\cdot\gamma^{10}\cdot x - \frac{{}_{13}C_{11}}{0!}\cdot\gamma^{11})$$

$$\mathbf{_0}La_{13}(x)^{(3)} = -13!\cdot(\frac{{}_{13}C_0}{10!}\cdot x^{10} - \frac{{}_{13}C_1}{9!}\cdot\gamma\cdot x^9 + \frac{{}_{13}C_2}{8!}\cdot\gamma^2\cdot x^8 - \frac{{}_{13}C_3}{7!}\cdot\gamma^3\cdot x^7 + \frac{{}_{13}C_4}{6!}\cdot\gamma^4\cdot x^6$$
$$-\frac{{}_{13}C_5}{5!}\cdot\gamma^5\cdot x^5 + \frac{{}_{13}C_6}{4!}\cdot\gamma^6\cdot x^4 - \frac{{}_{13}C_7}{3!}\cdot\gamma^7\cdot x^3 + \frac{{}_{13}C_8}{2!}\cdot\gamma^8\cdot x^2$$
$$-\frac{{}_{13}C_9}{1!}\cdot\gamma^9\cdot x + \frac{{}_{13}C_{10}}{0!}\cdot\gamma^{10})$$

$$\mathbf{_0}La_{13}(x)^{(4)} = -13!\cdot(\frac{{}_{13}C_0}{9!}\cdot x^9 - \frac{{}_{13}C_1}{8!}\cdot\gamma\cdot x^8 + \frac{{}_{13}C_2}{7!}\cdot\gamma^2\cdot x^7 - \frac{{}_{13}C_3}{6!}\cdot\gamma^3\cdot x^6 + \frac{{}_{13}C_4}{5!}\cdot\gamma^4\cdot x^5$$
$$-\frac{{}_{13}C_5}{4!}\cdot\gamma^5\cdot x^4 + \frac{{}_{13}C_6}{3!}\cdot\gamma^6\cdot x^3 - \frac{{}_{13}C_7}{2!}\cdot\gamma^7\cdot x^2 + \frac{{}_{13}C_8}{1!}\cdot\gamma^8\cdot x$$
$$-\frac{{}_{13}C_9}{0!}\cdot\gamma^9)$$

$$\mathbf{_0}La_{13}(x)^{(5)} = -13!\cdot(\frac{{}_{13}C_0}{8!}\cdot x^8 - \frac{{}_{13}C_1}{7!}\cdot\gamma\cdot x^7 + \frac{{}_{13}C_2}{6!}\cdot\gamma^2\cdot x^6 - \frac{{}_{13}C_3}{5!}\cdot\gamma^3\cdot x^5 + \frac{{}_{13}C_4}{4!}\cdot\gamma^4\cdot x^4$$
$$-\frac{{}_{13}C_5}{3!}\cdot\gamma^5\cdot x^3 + \frac{{}_{13}C_6}{2!}\cdot\gamma^6\cdot x^2 - \frac{{}_{13}C_7}{1!}\cdot\gamma^7\cdot x + \frac{{}_{13}C_8}{0!}\cdot\gamma^8)$$

$$ {}_{\mathbf{0}}La_{13}(x)^{(6)} = -13!\cdot(\frac{{}_{13}C_0}{7!}\cdot x^7 - \frac{{}_{13}C_1}{6!}\cdot\gamma\cdot x^6 + \frac{{}_{13}C_2}{5!}\cdot\gamma^2\cdot x^5 - \frac{{}_{13}C_3}{4!}\cdot\gamma^3\cdot x^4 + \frac{{}_{13}C_4}{3!}\cdot\gamma^4\cdot x^3 - \frac{{}_{13}C_5}{2!}\cdot\gamma^5\cdot x^2 + \frac{{}_{13}C_6}{1!}\cdot\gamma^6\cdot x - \frac{{}_{13}C_7}{0!}\cdot\gamma^7) $$

$$ {}_{\mathbf{0}}La_{13}(x)^{(7)} = -13!\cdot(\frac{{}_{13}C_0}{6!}\cdot x^6 - \frac{{}_{13}C_1}{5!}\cdot\gamma\cdot x^5 + \frac{{}_{13}C_2}{4!}\cdot\gamma^2\cdot x^4 - \frac{{}_{13}C_3}{3!}\cdot\gamma^3\cdot x^3 + \frac{{}_{13}C_4}{2!}\cdot\gamma^4\cdot x^2 - \frac{{}_{13}C_5}{1!}\cdot\gamma^5\cdot x + \frac{{}_{13}C_6}{0!}\cdot\gamma^6) $$

$$ {}_{\mathbf{0}}La_{13}(x)^{(8)} = -13!\cdot(\frac{{}_{13}C_0}{5!}\cdot x^5 - \frac{{}_{13}C_1}{4!}\cdot\gamma\cdot x^4 + \frac{{}_{13}C_2}{3!}\cdot\gamma^2\cdot x^3 - \frac{{}_{13}C_3}{2!}\cdot\gamma^3\cdot x^2 + \frac{{}_{13}C_4}{1!}\cdot\gamma^4\cdot x - \frac{{}_{13}C_5}{0!}\cdot\gamma^5) $$

$$ {}_{\mathbf{0}}La_{13}(x)^{(9)} = -13!\cdot(\frac{{}_{13}C_0}{4!}\cdot x^4 - \frac{{}_{13}C_1}{3!}\cdot\gamma\cdot x^3 + \frac{{}_{13}C_2}{2!}\cdot\gamma^2\cdot x^2 - \frac{{}_{13}C_3}{1!}\cdot\gamma^3\cdot x + \frac{{}_{13}C_4}{0!}\cdot\gamma^4) $$

$$ {}_{\mathbf{0}}La_{13}(x)^{(10)} = -13!\cdot(\frac{{}_{13}C_0}{3!}\cdot x^3 - \frac{{}_{13}C_1}{2!}\cdot\gamma\cdot x^2 + \frac{{}_{13}C_2}{1!}\cdot\gamma^2\cdot x - \frac{{}_{13}C_3}{0!}\cdot\gamma^3) $$

$$ {}_{\mathbf{0}}La_{13}(x)^{(11)} = -13!\cdot(\frac{{}_{13}C_0}{2!}\cdot x^2 - \frac{{}_{13}C_1}{1!}\cdot\gamma\cdot x + \frac{{}_{13}C_2}{0!}\cdot\gamma^2) $$

$$ {}_{\mathbf{0}}La_{13}(x)^{(12)} = -13!\cdot(\frac{{}_{13}C_0}{1!}\cdot x - \frac{{}_{13}C_1}{0!}\cdot\gamma) \qquad {}_{\mathbf{0}}La_{13}(x)^{(12)} = -13!\cdot\frac{{}_{13}C_0}{0!} $$

$$ {}_{\mathbf{0}}La_{14}(x) = 14!\cdot(\frac{{}_{14}C_0}{14!}\cdot x^{14} - \frac{{}_{14}C_1}{13!}\cdot\gamma\cdot x^{13} + \frac{{}_{14}C_2}{12!}\cdot\gamma^2\cdot x^{12} - \frac{{}_{14}C_3}{11!}\cdot\gamma^3\cdot x^{11} + \frac{{}_{14}C_4}{10!}\cdot\gamma^4\cdot x^{10} - \frac{{}_{14}C_5}{9!}\cdot\gamma^5\cdot x^9 + \frac{{}_{14}C_6}{8!}\cdot\gamma^6\cdot x^8 - \frac{{}_{14}C_7}{7!}\cdot\gamma^7\cdot x^7 + \frac{{}_{14}C_8}{6!}\cdot\gamma^8\cdot x^6 - \frac{{}_{14}C_9}{5!}\cdot\gamma^9\cdot x^5 + \frac{{}_{14}C_{10}}{4!}\cdot\gamma^{10}\cdot x^4 - \frac{{}_{14}C_{11}}{3!}\cdot\gamma^{11}\cdot x^3 + \frac{{}_{14}C_{12}}{2!}\cdot\gamma^{12}\cdot x^2 - \frac{{}_{14}C_{13}}{1!}\cdot\gamma^{13}\cdot x + \frac{{}_{14}C_{14}}{0!}\cdot\gamma^{14}) $$

$$ {}_{\mathbf{0}}La_{14}(x)^{(1)} = 14!\cdot(\frac{{}_{14}C_0}{13!}\cdot x^{13} - \frac{{}_{14}C_1}{12!}\cdot\gamma\cdot x^{12} + \frac{{}_{14}C_2}{11!}\cdot\gamma^2\cdot x^{11} - \frac{{}_{14}C_3}{10!}\cdot\gamma^3\cdot x^{10} + \frac{{}_{14}C_4}{9!}\cdot\gamma^4\cdot x^9 - \frac{{}_{14}C_5}{8!}\cdot\gamma^5\cdot x^8 + \frac{{}_{14}C_6}{7!}\cdot\gamma^6\cdot x^7 - \frac{{}_{14}C_7}{6!}\cdot\gamma^7\cdot x^6 + \frac{{}_{14}C_8}{5!}\cdot\gamma^8\cdot x^5 - \frac{{}_{14}C_9}{4!}\cdot\gamma^9\cdot x^4 + \frac{{}_{14}C_{10}}{3!}\cdot\gamma^{10}\cdot x^3 - \frac{{}_{14}C_{11}}{2!}\cdot\gamma^{11}\cdot x^2 + \frac{{}_{14}C_{12}}{1!}\cdot\gamma^{12}\cdot x - \frac{{}_{14}C_{13}}{0!}\cdot\gamma^{13}) $$

$$\mathbf{_0}La_{14}(x)^{(2)} = 14!\cdot(\frac{_{14}C_0}{12!}\cdot x^{12} - \frac{_{14}C_1}{11!}\cdot \gamma\cdot x^{11} + \frac{_{14}C_2}{10!}\cdot \gamma^2\cdot x^{10} - \frac{_{14}C_3}{9!}\cdot \gamma^3\cdot x^9 + \frac{_{14}C_4}{8!}\cdot \gamma^4\cdot x^8$$
$$- \frac{_{14}C_5}{7!}\cdot \gamma^5\cdot x^7 + \frac{_{14}C_6}{6!}\cdot \gamma^6\cdot x^6 - \frac{_{14}C_7}{5!}\cdot \gamma^7\cdot x^5 + \frac{_{14}C_8}{4!}\cdot \gamma^8\cdot x^4$$
$$- \frac{_{14}C_9}{3!}\cdot \gamma^9\cdot x^3 + \frac{_{14}C_{10}}{2!}\cdot \gamma^{10}\cdot x^2 - \frac{_{14}C_{11}}{1!}\cdot \gamma^{11}\cdot x + \frac{_{14}C_{12}}{0!}\cdot \gamma^{12})$$

$$\mathbf{_0}La_{14}(x)^{(3)} = 14!\cdot(\frac{_{14}C_0}{11!}\cdot x^{11} - \frac{_{14}C_1}{10!}\cdot \gamma\cdot x^{10} + \frac{_{14}C_2}{9!}\cdot \gamma^2\cdot x^9 - \frac{_{14}C_3}{8!}\cdot \gamma^3\cdot x^8 + \frac{_{14}C_4}{7!}\cdot \gamma^4\cdot x^7$$
$$- \frac{_{14}C_5}{6!}\cdot \gamma^5\cdot x^6 + \frac{_{14}C_6}{5!}\cdot \gamma^6\cdot x^5 - \frac{_{14}C_7}{4!}\cdot \gamma^7\cdot x^4 + \frac{_{14}C_8}{3!}\cdot \gamma^8\cdot x^3$$
$$- \frac{_{14}C_9}{2!}\cdot \gamma^9\cdot x^2 + \frac{_{14}C_{10}}{1!}\cdot \gamma^{10}\cdot x - \frac{_{14}C_{11}}{0!}\cdot \gamma^{11})$$

$$\mathbf{_0}La_{14}(x)^{(4)} = 14!\cdot(\frac{_{14}C_0}{10!}\cdot x^{10} - \frac{_{14}C_1}{9!}\cdot \gamma\cdot x^9 + \frac{_{14}C_2}{8!}\cdot \gamma^2\cdot x^8 - \frac{_{14}C_3}{7!}\cdot \gamma^3\cdot x^7 + \frac{_{14}C_4}{6!}\cdot \gamma^4\cdot x^6$$
$$- \frac{_{14}C_5}{5!}\cdot \gamma^5\cdot x^5 + \frac{_{14}C_6}{4!}\cdot \gamma^6\cdot x^4 - \frac{_{14}C_7}{3!}\cdot \gamma^7\cdot x^3 + \frac{_{14}C_8}{2!}\cdot \gamma^8\cdot x^2$$
$$- \frac{_{14}C_9}{1!}\cdot \gamma^9\cdot x + \frac{_{14}C_{10}}{0!}\cdot \gamma^{10})$$

$$\mathbf{_0}La_{14}(x)^{(5)} = 14!\cdot(\frac{_{14}C_0}{9!}\cdot x^9 - \frac{_{14}C_1}{8!}\cdot \gamma\cdot x^8 + \frac{_{14}C_2}{7!}\cdot \gamma^2\cdot x^7 - \frac{_{14}C_3}{6!}\cdot \gamma^3\cdot x^6 + \frac{_{14}C_4}{5!}\cdot \gamma^4\cdot x^5$$
$$- \frac{_{14}C_5}{4!}\cdot \gamma^5\cdot x^4 + \frac{_{14}C_6}{3!}\cdot \gamma^6\cdot x^3 - \frac{_{14}C_7}{2!}\cdot \gamma^7\cdot x^2 + \frac{_{14}C_8}{1!}\cdot \gamma^8\cdot x - \frac{_{14}C_9}{0!}\cdot \gamma^9)$$

$$\mathbf{_0}La_{14}(x)^{(6)} = 14!\cdot(\frac{_{14}C_0}{8!}\cdot x^8 - \frac{_{14}C_1}{7!}\cdot \gamma\cdot x^7 + \frac{_{14}C_2}{6!}\cdot \gamma^2\cdot x^6 - \frac{_{14}C_3}{5!}\cdot \gamma^3\cdot x^5 + \frac{_{14}C_4}{4!}\cdot \gamma^4\cdot x^4$$
$$- \frac{_{14}C_5}{3!}\cdot \gamma^5\cdot x^3 + \frac{_{14}C_6}{2!}\cdot \gamma^6\cdot x^2 - \frac{_{14}C_7}{1!}\cdot \gamma^7\cdot x + \frac{_{14}C_8}{0!}\cdot \gamma^8)$$

$$\mathbf{_0}La_{14}(x)^{(7)} = 14!\cdot(\frac{_{14}C_0}{7!}\cdot x^7 - \frac{_{14}C_1}{6!}\cdot \gamma\cdot x^6 + \frac{_{14}C_2}{5!}\cdot \gamma^2\cdot x^5 - \frac{_{14}C_3}{4!}\cdot \gamma^3\cdot x^4 + \frac{_{14}C_4}{3!}\cdot \gamma^4\cdot x^3$$
$$- \frac{_{14}C_5}{2!}\cdot \gamma^5\cdot x^2 + \frac{_{14}C_6}{1!}\cdot \gamma^6\cdot x - \frac{_{14}C_7}{0!}\cdot \gamma^7)$$

$$\mathbf{_0}La_{14}(x)^{(8)} = 14!\cdot(\frac{_{14}C_0}{6!}\cdot x^6 - \frac{_{14}C_1}{5!}\cdot \gamma\cdot x^5 + \frac{_{14}C_2}{4!}\cdot \gamma^2\cdot x^4 - \frac{_{14}C_3}{3!}\cdot \gamma^3\cdot x^3 + \frac{_{14}C_4}{2!}\cdot \gamma^4\cdot x^2$$
$$- \frac{_{14}C_5}{1!}\cdot \gamma^5\cdot x + \frac{_{14}C_6}{0!}\cdot \gamma^6)$$

$$\mathbf{_0}La_{14}(x)^{(9)} = 14!\cdot(\frac{_{14}C_0}{5!}\cdot x^5 - \frac{_{14}C_1}{4!}\cdot \gamma\cdot x^4 + \frac{_{14}C_2}{3!}\cdot \gamma^2\cdot x^3 - \frac{_{14}C_3}{2!}\cdot \gamma^3\cdot x^2 + \frac{_{14}C_4}{1!}\cdot \gamma^4\cdot x - \frac{_{14}C_5}{0!}\cdot \gamma^5)$$

$$_{\mathbf{0}}La_{14}(x)^{(10)} = 14!\cdot(\frac{_{14}C_0}{4!}\cdot x^4 - \frac{_{14}C_1}{3!}\cdot\gamma\cdot x^3 + \frac{_{14}C_2}{2!}\cdot\gamma^2\cdot x^2 - \frac{_{14}C_3}{1!}\cdot\gamma^3\cdot x + \frac{_{14}C_4}{0!}\cdot\gamma^4)$$

$$_{\mathbf{0}}La_{14}(x)^{(11)} = 14!\cdot(\frac{_{14}C_0}{3!}\cdot x^3 - \frac{_{14}C_1}{2!}\cdot\gamma\cdot x^2 + \frac{_{14}C_2}{1!}\cdot\gamma^2\cdot x - \frac{_{14}C_3}{0!}\cdot\gamma^3)$$

$$_{\mathbf{0}}La_{14}(x)^{(12)} = 14!\cdot(\frac{_{14}C_0}{2!}\cdot x^2 - \frac{_{14}C_1}{1!}\cdot\gamma\cdot x + \frac{_{14}C_2}{0!}\cdot\gamma^2)$$

$$_{\mathbf{0}}La_{14}(x)^{(13)} = 14!\cdot(\frac{_{14}C_0}{1!}\cdot x - \frac{_{14}C_1}{0!}\cdot\gamma) \qquad _{\mathbf{0}}La_{14}(x)^{(14)} = 14!\cdot\frac{_{14}C_0}{0!}$$

以上、ラゲール多項式基本型について述べた。

4. 総括

第一種のチェビシェフ多項式基本型 $_{\mathbf{0}}T_{\boldsymbol{N}}(x)$ の微分方程式：

$$(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {_{\mathbf{0}}T_{\boldsymbol{N}}}(x)'' - \frac{x}{\gamma^2}\cdot {_{\mathbf{0}}T_{\boldsymbol{N}}}(x)' + \frac{N^2}{\gamma^2}\cdot {_0T_{\boldsymbol{N}}}(x) = 0$$

第二種のチェビシェフ多項式基本型 $_{\mathbf{0}}U_{\boldsymbol{N}}(x)$ の微分方程式：

$$(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {_{\mathbf{0}}U_{\boldsymbol{N}}}(x)'' - \frac{3x}{\gamma^2}\cdot {_{\mathbf{0}}U_{\boldsymbol{N}}}(x)' + \frac{N(N+2)}{\gamma^2}\cdot {_{\mathbf{0}}U_{\boldsymbol{N}}}(x) = 0$$

第一種のチェビシェフ多項式基本型 $_{\mathbf{0}}T_{\boldsymbol{N}}(x)$:

$$_{\mathbf{0}}T_{\boldsymbol{N}}(x) = 2^{N-1}\cdot x^N + 2^{N-1}\cdot\sum_{k=1}\{(-1)^k\cdot\frac{_NC_{2k}}{2^k}\cdot\prod_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{N-j})\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-2k}\}$$

第二種のチェビシェフ多項式基本型 $_{\mathbf{0}}U_{\boldsymbol{N}}(x)$ ：

$$_{\mathbf{0}}U_{\boldsymbol{N}}(x) = 2^N\cdot x^N + 2^N\cdot\sum_{k=1}\{(-1)^k\cdot\frac{_NC_{2k}}{2^k}\cdot\prod_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{N-j+1})\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-2k}\}$$

ラゲール多項式基本型 $_{\mathbf{0}}La_N(x)$ の微分方程式:

$$x\cdot {_{\mathbf{0}}La_N}(x)'' + (1-\frac{x}{\gamma})\cdot {_{\mathbf{0}}La_N}(x)' + \frac{N}{\gamma}\cdot {_{\mathbf{0}}La_N}(x) = 0$$

ラゲール多項式基本型 $_{\mathbf{0}}La_N(x)$ の一般式 ：

$$
\begin{aligned}
{}_{\mathbf{0}}La_{\boldsymbol{N}}(x) &= (-1)^N \cdot x^N + \sum_{k=1}^{N}\left[(-1)^{N+k} \cdot {}_N C_k \cdot \prod_{j=1}^{k}(N-j+1) \cdot \gamma^k \cdot x^{N-k} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{N}\{ (-1)^{N+k} \cdot k! \cdot ({}_N C_k)^2 \cdot \gamma^k \cdot x^{N-k} \} \\
&= N! \cdot \sum_{k=0}^{N}\{ (-1)^{N+k} \cdot \frac{{}_N C_k}{(N-k)!} \cdot \gamma^k \cdot x^{N-k} \} \\
&= \sum_{k=0}^{N}\{ (-1)^{N+k} \cdot {}_N P_k \cdot {}_N C_k \cdot \gamma^k \cdot x^{N-k} \}
\end{aligned}
$$

ラゲール多項式基本型の漸化式 ：

$$
{}_{\mathbf{0}}La_{\boldsymbol{N}+1}(x) + \{ x - (2N+1) \cdot \gamma \} \cdot {}_{\mathbf{0}}La_{\boldsymbol{N}}(x) + N^2 \cdot \gamma^2 \cdot {}_{\mathbf{0}}La_{\boldsymbol{N}-1}(x) = 0
$$

$N-m$ 次のラゲール陪多項式基本型 $_{\mathbf{0}}La_N(x)^{(m)}$ の一般式 ：

$$
\begin{aligned}
{}_{\mathbf{0}}La_{\boldsymbol{N}}(x)^{(m)} &= N! \cdot \sum_{k=0}^{N} \{ (-1)^{N+k} \cdot \frac{{}_N C_k}{(N-k-m)!} \cdot \gamma^k \cdot x^{N-k-m} \} \\
&= \sum_{k=0}^{N} \{ (-1)^{N+k} \cdot {}_N P_{k+m} \cdot {}_N C_k \cdot \gamma^k \cdot x^{N-k-m} \}
\end{aligned}
$$

$N-m$ 次のラゲール陪多項式基本型 ${}_0y_N^m = {}_{\mathbf{0}}La_N(x)^{(m)}$ の微分方程式 ：

$$
x \cdot {}_0y_N^m{}'' + \left(m+1-\frac{x}{\gamma} \right) \cdot {}_0y_N^m{}' + \frac{N-m}{\gamma} \cdot {}_0y_N^m = 0
$$

ラゲール陪多項式基本型　${}_{\mathbf{0}}La_N(x)^{(m)}$　の漸化式　：

$$\frac{N+1-m}{N+1}\cdot{}_{\mathbf{0}}La_{\boldsymbol{N}+1}(x)^{(m)}+\{x-(2N+1-m)\cdot\gamma\}\cdot{}_{\mathbf{0}}La_{\boldsymbol{N}}(x)^{(m)}+N^2\cdot\gamma^2\cdot{}_{\mathbf{0}}La_{\boldsymbol{N}-1}(x)^{(m)}=0$$

$$(N+1-m)\cdot{}_{\mathbf{0}}La_{\boldsymbol{N}}(x)^{(m-1)}-x\cdot{}_{\mathbf{0}}La_{\boldsymbol{N}}(x)^{(m)}-N^2\cdot\gamma\cdot{}_{\mathbf{0}}La_{\boldsymbol{N}-1}(x)^{(m-1)}=0$$

$${}_{\mathbf{0}}La_{\boldsymbol{N}+1}(x)^{(m)}=(N+1)\{\gamma\cdot{}_{\mathbf{0}}La_{\boldsymbol{N}}(x)^{(m)}-{}_{\mathbf{0}}La_{\boldsymbol{N}}(x)^{(m-1)}\}$$

$N-k$　次のラゲール陪多項式基本型　${}_0v(x)={}_{\mathbf{0}}La_N(x)^{(k)}$　の微分方程式　：

$$x\cdot{}_0v(x)''+(k+1-\frac{x}{\gamma})\cdot{}_0v(x)'+\frac{N-k}{\gamma}\cdot{}_0v(x)=0$$

ラゲール陪関数基本型　${}_0y$　の定義　：

$${}_0y=e^{-\frac{x}{2\gamma}}\cdot(\frac{x}{\gamma})^{\frac{k-1}{2}}\cdot{}_0v(x)$$

ラゲール陪関数基本型　${}_0y$　の微分方程式　：

$$x\cdot{}_0y''+2\cdot{}_0y'+(\frac{N}{\gamma}-\frac{k-1}{2\gamma}-\frac{x}{4\gamma^2}-\frac{k^2-1}{4x})\cdot{}_0y=0$$

参考文献

手代木　琢磨、 勝間　豊：チェビシェフ多項式基本型とルジャンドル多項式基本型との関係、産業能率大学紀要、40 (1), 2019, pp 57-87