［研究ノート］

Sanno University Bulletin Vol. 40 No. 1 September 2019

チェビシェフ多項式基本型とルジャンドル多項式基本型との関係

The Relationship Between the Fundamental Style of Chebyshev Polynomials and That of the Legendre Polynomial

手代木　琢磨

Takuma Teshirogi

勝間　豊

Yutaka Katsuma

Abstract

In our previous paper, we defined the fundamental styles of Chebyshev polynomials. In this paper, we discuss the relationship between the fundamental style of Chebyshev polynomials and that of the Legendre polynomial.

1.　序論

手代木と勝間［2017］において、第一種および第二種のチェビシェフ多項式基本型を定義し、その関数の性質を議論した。本稿では、ルジャンドル多項式基本型を定義し、この関数とチェビシェフ多項式基本型との関係を議論する。

2.　チェビシェフ多項式基本型

2. 1　第一種のチェビシェフ多項式基本型

手代木と勝間[2017] で述べたように、第一種のチェビシェフ多項式基本型、${}_0T_N(x)$ は

$$ {}_0T_N(x) = \frac{N}{2}\cdot\sum_{k=0}\left\{\frac{{}_{N-k}C_k}{N-k}\cdot(-\gamma^2)^k\cdot(2x)^{N-2k}\right\} = 2^{N-1}\cdot\prod_{k=1}^{N}\left(x-\gamma\cos\frac{2k-1}{2N}\pi\right)\quad(N\geq 2) $$

のように表される。ただし ${}_0T_0(x)=1$, ${}_0T_1(x)=x$ である。しかしまた次式のようにも表される。

2018年10月17日　受理

$$ {}_0T_N(x) = 2^{N-1} \cdot [\, x^N + \sum_{k=1} \{(-1)^k \cdot {}_N C_{2k} \cdot \prod_{j=1}^{k} (\frac{2j-1}{2N-2j}) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k} \}] $$

2. 2　第一種のチェビシェフ多項式基本型の微分方程式

第一種のチェビシェフ多項式基本型の微分方程式は次式で表され、$\gamma^2 = -1$　でも成立する。

$$ (1 - \frac{x^2}{\gamma^2}) \cdot {}_0T_N(x)'' - \frac{x}{\gamma^2} \cdot {}_0T_N(x)' + \frac{N^2}{\gamma^2} \cdot {}_0T_N(x) = 0 $$

2. 3　第二種のチェビシェフ多項式基本型

手代木と勝間[2017] で述べたように、第二種のチェビシェフ多項式基本型、${}_0U_N(x)$ は

$$ {}_0U_N(x) = \sum_{k=0} \{ {}_{N-k}C_k \cdot (-\gamma^2)^k \cdot (2x)^{N-2k} \} = 2^N \cdot \prod_{k=1}^{N} \left(x - \gamma \cos \frac{k}{N+1} \pi \right) \qquad (N \geq 2) $$

のように表される。ただし ${}_0U_0(x) = 1$, ${}_0U_1(x) = 2x$ である。しかしまた次式のようにも表される。

$$ {}_0U_N(x) = 2^N \cdot [\, x^N + \sum_{k=1} \{ (-1)^k \cdot {}_N C_{2k} \prod_{j=1}^{k} (\frac{2j-1}{2N-2j+2}) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k} \} \,] $$

2. 4　第二種のチェビシェフ多項式基本型の微分方程式

第二種のチェビシェフ多項式基本型の微分方程式は次式で表され、$\gamma^2 = -1$　でも成立する。

$$ (1 - \frac{x^2}{\gamma^2}) \cdot {}_0U_N(x)'' - \frac{3x}{\gamma^2} \cdot {}_0U_N(x)' + \frac{N(N+2)}{\gamma^2} \cdot {}_0U_N(x) = 0 $$

3.　ルジャンドルの微分方程式とルジャンドル多項式

3. 1　ルジャンドルの微分方程式

ルジャンドルの微分方程式は次式で表される。

$$ (1 - x^2) \cdot Le_N(x)'' - 2x \cdot Le_N(x)' + N(N+1) \cdot Le_N(x) = 0 $$

3．2　ルジャンドル多項式

上の微分方程式の解の一般形であるルジャンドル多項式、$Le_N(x)$ は普通次式で表される。

$$Le_N(x)=\frac{(2N)\,!}{2^N\cdot(N!)^2}\cdot\left[x^N-\frac{N(N-1)}{2(2N-1)}\cdot x^{N-2}+\frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{2\cdot 4\cdot(2N-1)(2N-3)}\cdot x^{N-4}-\cdots\right]$$

ただし　$Le_0(x)=1$ ，$Le_1(x)=x$　である。

4．ルジャンドル多項式基本型

4．1　第一種のジャンドル多項式基本型の微分方程式とその解

ルジャンドルの微分方程式は、第一種のチェビシェフ多項式 $T_N(x)$ の微分方程式に非常によく似ているので、第一種のルジャンドル多項式基本型 ${}_0P_N(x)$ を第一種のチェビシェフ多項式基本型 ${}_0T_N(x)$ の類似関数として誘導する。

まず第一種のルジャンドル多項式基本型、${}_0P_N(x)$ の微分方程式は次式で表されるとする。

$$\left(1-\frac{x^2}{\gamma^2}\right)\cdot{}_0P_N(x)''-\frac{2x}{\gamma^2}\cdot{}_0P_N(x)'+\frac{N(N+1)}{\gamma^2}\cdot{}_0P_N(x)=0$$

さらに ${}_0P_N(x)$ が ${}_0T_N(x)$ と ${}_0p_N(k)$ とを用いて次式で表されると仮定する。

$${}_0P_N(x)=2^{N-1}\cdot x^N+2^{N-1}\cdot\sum_{k=1}\left[(-1)^k\cdot{}_NC_{2k}\cdot\left\{\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{2j-1}{2N-2j}\right)\cdot{}_0p_N(k)\right\}\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-2k}\right]$$

この ${}_0P_N(x)$ を微分方程式に代入して ${}_0p_N(k)$ を求める。ただし微分方程式に代入するときには、係数を省いて検討する。まず ${}_0P_N(x)$ の一階微分、二階微分を次に示す。

$$\begin{cases}{}_0P_N(x)'=N\cdot x^{N-1}+\displaystyle\sum_{k=1}\left[(-1)^k(N-2k)\cdot{}_NC_{2k}\cdot\left\{\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{2j-1}{2N-2j}\right)\cdot{}_0p_N(k)\right\}\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-2k-1}\right]\\ {}_0P_N(x)''=N(N-1)\cdot x^{N-2}\\ \qquad+\displaystyle\sum_{k=1}\left[(-1)^k(N-2k)(N-2k-1)\cdot{}_NC_{2k}\cdot\left\{\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{2j-1}{2N-2j}\right)\cdot{}_0p_N(k)\right\}\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-2k-2}\right]\end{cases}$$

この結果を ${}_0P_N(x)$ の微分方程式に代入して整理する。

まず $\dfrac{x^N}{\gamma^2}$ の項は 0 となる。また x^{N-2} の項は

$$N(N-1)+\left\{(N-2)(N-3)+2(N-2)-N(N+1)\right\}\cdot {}_{N}C_{2}\cdot\frac{1}{2N-2}\cdot {}_{0}p_{N}(1)=0$$

となるので、整理して、${}_{0}p_{N}(1)=\dfrac{2N-2}{2N-1}$ が得られる。さらに $\gamma^{2}\cdot x^{N-4}$ の項は

$$\left\{N(N+1)-2(N-4)-(N-4)(N-5)\right\}\cdot {}_{N}C_{4}\cdot\frac{1}{2N-2}\cdot\frac{3}{2N-4}\cdot {}_{0}p_{N}(2)$$
$$=(N-2)(N-3)\cdot {}_{N}C_{2}\cdot\frac{1}{2N-2}\cdot {}_{0}p_{N}(1)=0$$

となるので、整理して、${}_{0}p_{N}(2)=\dfrac{2N-4}{2N-3}\cdot {}_{0}p_{N}(1)=\dfrac{2N-2}{2N-1}\cdot\dfrac{2N-4}{2N-3}$ が得られる。

一般に $\gamma^{2k-2}\cdot x^{N-2k}$ の項は次式となり、整理して、${}_{0}p_{N}(k)$ の漸化式が得られる。

$$\begin{aligned}{}_{0}p_{N}(k)&=\frac{(N-2k+2)\,(N-2k+1)}{2k(2N-2k+1)}\cdot\frac{{}_{N}C_{2k-2}}{{}_{N}C_{2k}}\cdot\frac{2N-2k}{2k-1}\cdot {}_{0}p_{N}(k-1)\\&=\frac{2N-2k}{2N-2k+1}\cdot {}_{0}p_{N}(k-1)\end{aligned}$$

結局 ${}_{0}p_{N}(k)$ の一般式 ${}_{0}p_{N}(k)=\displaystyle\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{2N-2j}{2N-2j+1}\right)$ を ${}_{0}P_{N}(x)$ に代入し次式を得る。

$$\begin{aligned}{}_{0}P_{N}(x)&=2^{N-1}\cdot\left[\,x^{N}+\sum_{k=1}\{(-1)^{k}\cdot {}_{N}C_{2k}\cdot\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{2j-1}{2N-2j}\right)\left(\frac{2N-2j}{2N-2j+1}\right)\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-2k}\}\right]\\&=2^{N-1}\cdot\left[\,x^{N}+\sum_{k=1}\{(-1)^{k}\cdot {}_{N}C_{2k}\cdot\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{2j-1}{2N-2j+1}\right)\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-2k}\}\right]\end{aligned}$$

この ${}_{0}P_{N}(x)$ が第一種のルジャンドル多項式基本型の微分方程式の解である。

$N=2$ から $N=13$ までの関数 ${}_{0}P_{N}(x)$ を下にまとめた。

$${}_{0}P_{2}(x)=2\cdot\left(x^{2}-\frac{{}_{2}C_{2}}{3}\cdot\gamma^{2}\right)$$

$${}_{0}P_{3}(x)=2^{2}\cdot\left(x^{3}-\frac{{}_{3}C_{2}}{5}\cdot\gamma^{2}\cdot x\right)$$

$${}_{0}P_{4}(x)=2^{3}\cdot\left(x^{4}-\frac{{}_{4}C_{2}}{7}\cdot\gamma^{2}\cdot x^{2}+\frac{3\cdot {}_{4}C_{4}}{5\cdot 7}\cdot\gamma^{4}\right)$$

$${}_{0}P_{5}(x)=2^{4}\cdot\left(x^{5}-\frac{{}_{5}C_{2}}{9}\cdot\gamma^{2}\cdot x^{3}+\frac{{}_{5}C_{4}}{3.7}\cdot\gamma^{4}\cdot x\right)$$

$$ {}_0P_6(x) = 2^5 \cdot (x^6 - \frac{{}_6C_2}{11} \cdot \gamma^2 \cdot x^4 + \frac{{}_6C_4}{3 \cdot 11} \cdot \gamma^4 \cdot x^2 - \frac{5 \cdot {}_6C_6}{3 \cdot 7 \cdot 11} \cdot \gamma^6) $$

$$ {}_0P_7(x) = 2^6 \cdot (x^7 - \frac{{}_7C_2}{13} \cdot \gamma^2 \cdot x^5 + \frac{3 \cdot {}_7C_4}{11 \cdot 13} \cdot \gamma^4 \cdot x^3 - \frac{5 \cdot {}_7C_6}{3 \cdot 11 \cdot 13} \cdot \gamma^6 \cdot x) $$

$$ {}_0P_8(x) = 2^7 \cdot (x^8 - \frac{{}_8C_2}{15} \cdot \gamma^2 \cdot x^6 + \frac{{}_8C_4}{5 \cdot 13} \cdot \gamma^4 \cdot x^4 - \frac{{}_8C_6}{11 \cdot 13} \cdot \gamma^6 \cdot x^2 + \frac{7 \cdot {}_8C_8}{9 \cdot 11 \cdot 13} \cdot \gamma^8) $$

$$ {}_0P_9(x) = 2^8 \cdot (x^9 - \frac{{}_9C_2}{17} \cdot \gamma^2 \cdot x^7 + \frac{{}_9C_4}{5 \cdot 17} \cdot \gamma^4 \cdot x^5 - \frac{{}_9C_6}{13 \cdot 17} \cdot \gamma^6 \cdot x^3 + \frac{7 \cdot {}_9C_8}{11 \cdot 13 \cdot 17} \cdot \gamma^8 \cdot x) $$

$$ {}_0P_{10}(x) = 2^9 \cdot (x^{10} - \frac{{}_{10}C_2}{19} \cdot \gamma^2 \cdot x^8 + \frac{3 \cdot {}_{10}C_4}{17 \cdot 19} \cdot \gamma^4 \cdot x^6 - \frac{{}_{10}C_6}{17 \cdot 19} \cdot \gamma^6 \cdot x^4 + \frac{7 \cdot {}_{10}C_8}{13 \cdot 17 \cdot 19} \cdot \gamma^8 \cdot x^2 - \frac{7 \cdot 9 \cdot {}_{10}C_{10}}{11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19} \cdot \gamma^{10}) $$

$$ {}_0P_{11}(x) = 2^{10} \cdot (x^{11} - \frac{{}_{11}C_2}{21} \cdot \gamma^2 \cdot x^9 + \frac{{}_{11}C_4}{7 \cdot 19} \cdot \gamma^4 \cdot x^7 - \frac{5 \cdot {}_{11}C_6}{7 \cdot 17 \cdot 19} \cdot \gamma^6 \cdot x^5 + \frac{{}_{11}C_8}{3 \cdot 17 \cdot 19} \cdot \gamma^8 \cdot x^3 - \frac{3 \cdot {}_{11}C_{10}}{13 \cdot 17 \cdot 19} \cdot \gamma^{10} \cdot x) $$

$$ {}_0P_{12}(x) = 2^{11} \cdot (x^{12} - \frac{{}_{12}C_2}{23} \cdot \gamma^2 \cdot x^{10} + \frac{{}_{12}C_4}{7 \cdot 23} \cdot \gamma^4 \cdot x^8 - \frac{5 \cdot {}_{12}C_6}{7 \cdot 19 \cdot 23} \cdot \gamma^6 \cdot x^6 + \frac{5 \cdot {}_{12}C_8}{17 \cdot 19 \cdot 23} \cdot \gamma^8 \cdot x^4 - \frac{3 \cdot {}_{12}C_{10}}{17 \cdot 19 \cdot \cdot 23} \cdot \gamma^{10} \cdot x^2 + \frac{3 \cdot 11 \cdot {}_{12}C_{12}}{13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23} \cdot \gamma^{12}) $$

$$ {}_0P_{13}(x) = 2^{12} \cdot (x^{13} - \frac{{}_{13}C_2}{25} \cdot \gamma^2 \cdot x^{11} + \frac{3 \cdot {}_{13}C_4}{23 \cdot 25} \cdot \gamma^4 \cdot x^9 - \frac{{}_{13}C_6}{5 \cdot 7 \cdot 23} \cdot \gamma^6 \cdot x^7 + \frac{{}_{13}C_8}{5 \cdot 19 \cdot 23} \cdot \gamma^8 \cdot x^5 - \frac{9 \cdot {}_{13}C_{10}}{5 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23} \cdot \gamma^{10} \cdot x^3 + \frac{3 \cdot 11 \cdot {}_{13}C_{12}}{17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 25} \cdot \gamma^{12} \cdot x) $$

４．２　第二種のルジャンドル多項式基本型の微分方程式とその解

ルジャンドル多項式の微分方程式は、第二種のチェビシェフ多項式 $U_N(x)$ の微分方程式に非常によく似ているので、第二種のルジャンドル多項式基本型、${}_0Q_N(x)$ を第二種のチェビシェフ多項式基本型 ${}_0U_N(x)$ の類似関数として誘導する。

第二種のルジャンドル多項式基本型、${}_0Q_N(x)$ の微分方程式は次式で表されるとする。

$$ (1 - \frac{x^2}{\gamma^2}) \cdot {}_0Q_N(x)'' - \frac{2x}{\gamma^2} \cdot {}_0Q_N(x)' + \frac{N(N+1)}{\gamma^2} \cdot {}_0Q_N(x) = 0 $$

さらに ${}_0Q_N(x)$ が ${}_0U_N(x)$ と ${}_0q_N(k)$ とを用いて次式で表されると仮定する。

$$ {}_0Q_N(x) = 2^N \cdot x^N + 2^N \cdot \sum_{k=1}[(-1)^k \cdot {}_NC_{2k} \cdot \{\prod_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{2N-2j+2}) \cdot {}_0q_N(k)\} \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k}\ ] $$

この ${}_0\boldsymbol{Q_N}(x)$ を微分方程式に代入して ${}_0q_N(k)$ を求める。ただし微分方程式に代入するときには、係数を省いて検討する。まず ${}_0\boldsymbol{Q_N}(x)$ の一階微分、二階微分を次に示す。

$$ \begin{cases} {}_0Q_N(x)' = N \cdot x^{N-1} + \sum\limits_{k=1}[(-1)^k (N-2k) \cdot {}_NC_{2k} \cdot \{\prod\limits_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{2N-2j+2}) \cdot {}_0q_N(k)\} \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k-1}] \\ {}_0Q_N(x)'' = N(N-1) \cdot x^{N-2} \\ \qquad + \sum\limits_{k=1}[(-1)^k (N-2k)(N-2k-1) \cdot {}_NC_{2k} \cdot \{\prod\limits_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{2N-2j+2}) \cdot {}_0q_N(k)\} \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k-2}\ ] \end{cases} $$

この結果を ${}_0Q_N(x)$ の微分方程式に代入して整理する。

まず $\dfrac{x^N}{\gamma^2}$ の項は 0 となる。また x^{N-2} の項は

$$ N(N-1) + \left\{ (N-2)(N-3) + 2(N-2) - N(N+1) \right\} \cdot {}_NC_2 \cdot \frac{1}{2N} \cdot {}_0q_N(1) = 0 $$

となるので、整理して、${}_0q_N(1) = \dfrac{2N}{2N-1}$ が得られる。さらに $\gamma^2 \cdot x^{N-4}$ の項は

$$ \left\{ N(N+1) - 2(N-4) - (N-4)(N-5) \right\} \cdot {}_NC_4 \cdot \frac{1}{2N} \cdot \frac{3}{2N-2} \cdot {}_0q_N(2) $$
$$ = (N-2)(N-3) \cdot {}_NC_2 \cdot \frac{1}{2N} \cdot {}_0q_N(1) = 0 $$

となるので、整理して、${}_0q_N(2) = \dfrac{2N-2}{2N-3} \cdot {}_0q_N(1) = \dfrac{2N}{2N-1} \cdot \dfrac{2N-2}{2N-3}$ が得られる。

一般に $\gamma^{2k-2} \cdot x^{N-2k}$ の項は次式となり、整理して、${}_0q_N(k)$ の漸化式が得られる。

$$ {}_0q_N(k) = \frac{(N-2k+2)\,(N-2k+1)}{2k(2N-2k+1)} \cdot \frac{{}_NC_{2k-2}}{{}_NC_{2k}} \cdot \frac{2N-2k+2}{2k-1} \cdot {}_0q_N(k-1) $$
$$ = \frac{2N-2k+2}{2N-2k+1} \cdot {}_0q_N(k-1) $$

結局 ${}_0q_N(k)$ の一般式 ${}_0q_N(x) = \prod\limits_{j=1}^{k}(\dfrac{2N-2j+2}{2N-2j+1})$ を ${}_0Q_N(x)$ に代入して次式を得る。

$$
\begin{aligned}
{}_0Q_N(x) &= 2^N \cdot [\, x^N + \sum_{k=1} \{(-1)^k \cdot {}_NC_{2k} \cdot \prod_{j=1}^{k} (\frac{2j-1}{2N-2j+2})(\frac{2N-2j+2}{2N-2j+1}) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k} \}] \\
&= 2^N \cdot [\, x^N + \sum_{k=1} \{(-1)^k \cdot {}_NC_{2k} \cdot \prod_{j=1}^{k} (\frac{2j-1}{2N-2j+1}) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k} \}]
\end{aligned}
$$

以上の結果から第一種のルジャンドル多項式基本型 ${}_0P_N(x)$ と、第二種のルジャンドル多項式基本型 ${}_0Q_N(x)$ を比較すると ${}_0Q_N(x) = 2 \cdot {}_0P_N(x)$ となっている。

5. ルジャンドル多項式基本型の微分方程式の別解法

5. 1　チェビシェフ多項式基本型の漸化式

ルジャンドル多項式基本型の微分方程式の別の解法を検討する場合、チェビシェフ多項式基本型の漸化式が必要となるので、ここにまとめておく。

まずチェビシェフ多項式基本型間の重要な漸化式は次の三式である。

$$
{}_0T_N(x) = \frac{{}_0U_N(x) - \gamma^2 \cdot {}_0U_{N-2}(x)}{2}
$$

$$
x \cdot {}_0T_{N-1}(x) = \frac{{}_0T_N(x) + \gamma^2 \cdot {}_0T_{N-2}(x)}{2}
$$

$$
x \cdot {}_0U_{N-1}(x) = \frac{{}_0U_N(x) + \gamma^2 \cdot {}_0U_{N-2}(x)}{2}
$$

第一の式の微分によって ${}_0T_N(x)' = \dfrac{{}_0U_N(x)' - \gamma^2 \cdot {}_0U_{N-2}(x)'}{2}$ が得られる。

また、手代木と勝間[2017] で報告した ${}_0T_N(x)' = N \cdot {}_0U_{N-1}(x)$ から、

$$
2N \cdot {}_0U_{N-1}(x) = {}_0U_N(x)' - \gamma^2 \cdot {}_0U_{N-2}(x)'
$$ が得られる。

第三の式 $x \cdot {}_0U_{N-1}(x) = \dfrac{{}_0U_N(x) + \gamma^2 \cdot {}_0U_{N-2}(x)}{2}$ から、第一の式

${}_0T_N(x) = \dfrac{{}_0U_N(x) - \gamma^2 \cdot {}_0U_{N-2}(x)}{2}$ を引くと、$x \cdot {}_0U_{N-1}(x) = {}_0T_N(x) + \gamma^2 \cdot {}_0U_{N-2}(x)$

が得られ、和をとると、$x \cdot {}_0U_{N-1}(x) + {}_0T_N(x) = {}_0U_N(x)$ が得られる。

また $x\cdot {}_0U_{N-1}(x)={}_0T_N(x)+\gamma^2\cdot {}_0U_{N-2}(x)$ と ${}_0T_N(x)'=N\cdot {}_0U_{N-1}(x)$ とから、

$x\cdot {}_0T_N(x)'=N\cdot {}_0T_N(x)+N\,\gamma^2\cdot {}_0U_{N-2}(x)$ が得られる。

さらに $x\cdot {}_0U_{N-1}(x)={}_0T_N(x)+\gamma^2\cdot {}_0U_{N-2}(x)$ を $x\cdot {}_0U_N(x)={}_0T_{N+1}(x)+\gamma^2\cdot {}_0U_{N-1}(x)$ に

変え、この式を一回微分して整理し、$x\cdot {}_0U_N(x)'=N\cdot {}_0U_N(x)+\gamma^2\cdot {}_0U_{N-1}(x)'$ が得られる。

以上の漸化式を念頭に置いて次に進む。

5．2　第一種のルジャンドル多項式基本型の微分方程式の別解法

まず ${}_0P_N(x)={}_0T_N(x)+{}_0R_N(x)$ となる第一種の基本型補助項 ${}_0R_N(x)$ を定義する。

$${}_0R_N(x)=2^{N-1}\cdot\sum_{k=1}[\,(-1)^k\cdot {}_NC_{2k}\cdot\{\prod_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{2N-2j+1})-\prod_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{2N-2j})\}\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-2k}\ ]$$

$N=2$ から $N=13$ までの関数 ${}_0R_N(x)$ を下にまとめる。

$$R_2(x)=\frac{2\cdot {}_2C_2}{2\cdot 3}\cdot\gamma^2$$

$$R_3(x)=\frac{2^2\cdot {}_3C_2}{4\cdot 5}\cdot\gamma^2\cdot x$$

$$R_4(x)=\frac{2^3\cdot {}_4C_2}{6\cdot 7}\cdot\gamma^2\cdot x^2-\frac{11\cdot {}_4C_4}{5\cdot 7}\cdot\gamma^4$$

$$R_5(x)=\frac{2^4\cdot {}_5C_2}{8\cdot 9}\cdot\gamma^2\cdot x^3-\frac{5\cdot {}_5C_4}{3\cdot 7}\cdot\gamma^4\cdot x$$

$$R_6(x)=\frac{2^5\cdot {}_6C_2}{10\cdot 11}\cdot\gamma^2\cdot x^4-\frac{2\cdot 19\cdot {}_6C_4}{3\cdot 5\cdot 11}\cdot\gamma^4\cdot x^2+\frac{71\cdot {}_6C_6}{3\cdot 7\cdot 11}\cdot\gamma^6$$

$$R_7(x)=\frac{2^6\cdot {}_7C_2}{12\cdot 13}\cdot\gamma^2\cdot x^5-\frac{2^3\cdot 23\cdot {}_7C_4}{5\cdot 11\cdot 13}\cdot\gamma^4\cdot x^3+\frac{109\cdot {}_7C_6}{3\cdot 11\cdot 13}\cdot\gamma^6\cdot x$$

$$R_8(x)=\frac{2^7\cdot {}_8C_2}{14\cdot 15}\cdot\gamma^2\cdot x^6-\frac{2^4\cdot 9\cdot {}_8C_4}{5\cdot 7\cdot 13}\cdot\gamma^4\cdot x^4+\frac{2^3\cdot 31\cdot {}_8C_6}{7\cdot 11\cdot 13}\cdot\gamma^6\cdot x^2-\frac{17\cdot 23\cdot {}_8C_8}{9\cdot 11\cdot 13}\cdot\gamma^8$$

$$R_9(x)=\frac{2^8\cdot {}_9C_2}{16\cdot 17}\cdot\gamma^2\cdot x^7-\frac{2^3\cdot 31\cdot {}_9C_4}{5\cdot 7\cdot 17}\cdot\gamma^4\cdot x^5+\frac{2\cdot 209\cdot {}_9C_6}{7\cdot 13\cdot 17}\cdot\gamma^6\cdot x^3-\frac{9\cdot 71\cdot {}_9C_8}{11\cdot 13\cdot 17}\cdot\gamma^8\cdot x$$

$$R_{10}(x)=\frac{2^9\cdot {}_{10}C_2}{18\cdot 19}\cdot\gamma^2\cdot x^8-\frac{2^4\cdot 35\cdot {}_{10}C_4}{3\cdot 17\cdot 19}\cdot\gamma^4\cdot x^6+\frac{2^3\cdot 271\cdot {}_{10}C_6}{3\cdot 7\cdot 17\cdot 19}\cdot\gamma^6\cdot x^4$$
$$-\frac{2\cdot 31\cdot 157\cdot {}_{10}C_8}{9\cdot 13\cdot 17\cdot 19}\cdot\gamma^8\cdot x^2+\frac{13933\cdot {}_{10}C_{10}}{11\cdot 13\cdot 17\cdot 19}\cdot\gamma^{10}$$

$$R_{11}(x)=\frac{2^{10}\cdot {}_{11}C_2}{20\cdot 21}\cdot\gamma^2\cdot x^9-\frac{2^7\cdot 13\cdot {}_{11}C_4}{5\cdot 19\cdot 21}\cdot\gamma^4\cdot x^7+\frac{2^3\cdot 11\cdot 31\cdot {}_{11}C_6}{17\cdot 19\cdot 21}\cdot\gamma^6\cdot x^5$$
$$-\frac{2^2\cdot 67\cdot {}_{11}C_8}{3\cdot 17\cdot 19}\cdot\gamma^8\cdot x^3+\frac{23\cdot 49\cdot {}_{11}C_{10}}{13\cdot 17\cdot 19}\cdot\gamma^{10}\cdot x$$

$$R_{12}(x)=\frac{2^{11}\cdot {}_{12}C_2}{22\cdot 23}\cdot\gamma^2\cdot x^{10}-\frac{2^8\cdot 43\cdot {}_{12}C_4}{5\cdot 7\cdot 11\cdot 23}\cdot\gamma^4\cdot x^8+\frac{2^7\cdot 419\cdot {}_{12}C_6}{3\cdot 7\cdot 11\cdot 19\cdot 23}\cdot\gamma^6\cdot x^6$$
$$-\frac{2^3\cdot 13\cdot 751\cdot {}_{12}C_8}{3\cdot 11\cdot 17\cdot 19\cdot 23}\cdot\gamma^8\cdot x^4+\frac{2^2\cdot 9\cdot 599\cdot {}_{12}C_{10}}{11\cdot 17\cdot 19\cdot 23}\cdot\gamma^{10}\cdot x^2-\frac{79\cdot 367\cdot {}_{12}C_{12}}{13\cdot 17\cdot 19\cdot 23}\cdot\gamma^{12}$$

$$R_{13}(x)=\frac{2^{12}\cdot {}_{13}C_2}{24\cdot 25}\cdot\gamma^2\cdot x^{11}-\frac{2^8\cdot 47\cdot {}_{13}C_4}{11\cdot 23\cdot 25}\cdot\gamma^4\cdot x^9+\frac{2^6\cdot 101\cdot {}_{13}C_6}{5\cdot 7\cdot 11\cdot 23}\cdot\gamma^6\cdot x^7$$
$$-\frac{2^5\cdot 43\cdot 61\cdot {}_{13}C_8}{5\cdot 9\cdot 11\cdot 19\cdot 23}\cdot\gamma^8\cdot x^5+\frac{2\cdot 57263\cdot {}_{13}C_{10}}{5\cdot 11\cdot 17\cdot 19\cdot 23}\cdot\gamma^{10}\cdot x^3-\frac{13\cdot 3889\cdot {}_{13}C_{12}}{17\cdot 19\cdot 23\cdot 25}\cdot\gamma^{12}\cdot x$$

${}_0P_N(x)$ の微分方程式を利用して、${}_0R_N(x)$ とチェビシェフ多項式基本型との関係を求める。

$$(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_0P_N(x)''-\frac{2x}{\gamma^2}\cdot {}_0P_N(x)'+\frac{N(N+1)}{\gamma^2}\cdot {}_0P_N(x)$$
$$=-\frac{x}{\gamma^2}\cdot {}_0T_N(x)'+\frac{N}{\gamma^2}\cdot {}_0T_N(x)+(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_0R_N(x)''-\frac{2x}{\gamma^2}\cdot {}_0R_N(x)'+\frac{N(N+1)}{\gamma^2}\cdot {}_0R_N(x)=0$$

上の式の最初の部分 $-\frac{x}{\gamma^2}\cdot {}_0T_N(x)'+\frac{N}{\gamma^2}\cdot {}_0T_N(x)$ はすでに述べたように $-N\cdot {}_0U_{N-2}(x)$ と

なり、結局 $(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_0R_N(x)''-\frac{2x}{\gamma^2}\cdot {}_0R_N(x)'+\frac{N(N+1)}{\gamma^2}\cdot {}_0R_N(x)=N\cdot {}_0U_{N-2}(x)$ が得られる。

5．3　第二種のルジャンドル多項式基本型の微分方程式の別解法

まず ${}_0Q_N(x)={}_0U_N(x)+{}_0S_N(x)$ となる第二種の基本型補助項 ${}_0S_N(x)$ を定義する。

$${}_0S_N(x)=2^N\cdot\sum_{k=1}[(-1)^k\cdot {}_NC_{2k}\cdot\{\prod_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{2N-2j+1})-\prod_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{2N-2j+2})\}\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-2k}]$$

$N=2$ から $N=13$ までの関数 ${}_0S_N(x)$ を下にまとめる。

$$S_2(x)=-\frac{2^2\cdot{}_2C_2}{3\cdot4}\cdot\gamma^2$$

$$S_3(x)=-\frac{2^3\cdot{}_3C_2}{5\cdot6}\cdot\gamma^2\cdot x$$

$$S_4(x)=-\frac{2^4\cdot{}_4C_2}{7\cdot8}\cdot\gamma^2\cdot x^2+\frac{13\cdot{}_4C_4}{5\cdot7}\cdot\gamma^4$$

$$S_5(x)=-\frac{2^5\cdot{}_5C_2}{9\cdot10}\cdot\gamma^2\cdot x^3+\frac{2\cdot17\cdot{}_5C_4}{3\cdot5\cdot7}\cdot\gamma^4\cdot x$$

$$S_6(x)=-\frac{2^6\cdot{}_6C_2}{11\cdot12}\cdot\gamma^2\cdot x^4+\frac{2^3\cdot7\cdot{}_6C_4}{3\cdot5\cdot11}\cdot\gamma^4\cdot x^2-\frac{89\cdot{}_6C_6}{3\cdot7\cdot11}\cdot\gamma^6$$

$$S_7(x)=-\frac{2^7\cdot{}_7C_2}{13\cdot14}\cdot\gamma^2\cdot x^5+\frac{2^4\cdot25\cdot{}_7C_4}{7\cdot11\cdot13}\cdot\gamma^4\cdot x^3-\frac{2^3\cdot131\cdot{}_7C_6}{3\cdot7\cdot11\cdot13}\cdot\gamma^6\cdot x$$

$$S_8(x)=-\frac{2^8\cdot{}_8C_2}{15\cdot16}\cdot\gamma^2\cdot x^6+\frac{2^3\cdot29\cdot{}_8C_4}{5\cdot7\cdot13}\cdot\gamma^4\cdot x^4-\frac{2\cdot181\cdot{}_8C_6}{7\cdot11\cdot13}\cdot\gamma^6\cdot x^2+\frac{5\cdot101\cdot{}_8C_8}{9\cdot11\cdot13}\cdot\gamma^8$$

$$S_9(x)=-\frac{2^9\cdot{}_9C_2}{17\cdot18}\cdot\gamma^2\cdot x^7+\frac{2^4\cdot11\cdot{}_9C_4}{3\cdot5\cdot17}\cdot\gamma^4\cdot x^5-\frac{2^3\cdot239\cdot{}_9C_6}{3\cdot7\cdot13\cdot17}\cdot\gamma^6\cdot x^3+\frac{2\cdot29\cdot137\cdot{}_9C_8}{9\cdot11\cdot13\cdot17}\cdot\gamma^8\cdot x$$

$$S_{10}(x)=-\frac{2^{10}\cdot{}_{10}C_2}{19\cdot20}\cdot\gamma^2\cdot x^8+\frac{2^7\cdot37\cdot{}_{10}C_4}{3\cdot5\cdot17\cdot19}\cdot\gamma^4\cdot x^6-\frac{2^3\cdot61\cdot{}_{10}C_6}{3\cdot17\cdot19}\cdot\gamma^6\cdot x^4$$
$$+\frac{2^2\cdot11\cdot107\cdot{}_{10}C_8}{3\cdot13\cdot17\cdot19}\cdot\gamma^8\cdot x^2-\frac{18323\cdot{}_{10}C_{10}}{11\cdot13\cdot17\cdot19}\cdot\gamma^{10}$$

$$S_{11}(x)=-\frac{2^{11}\cdot{}_{11}C_2}{21\cdot22}\cdot\gamma^2\cdot x^9+\frac{2^8\cdot41\cdot{}_{11}C_4}{5\cdot7\cdot11\cdot19}\cdot\gamma^4\cdot x^7-\frac{2^7\cdot379\cdot{}_{11}C_6}{11\cdot17\cdot19\cdot21}\cdot\gamma^6\cdot x^5$$
$$+\frac{2^3\cdot5\cdot37\cdot{}_{11}C_8}{11\cdot17\cdot19}\cdot\gamma^8\cdot x^3-\frac{2^2\cdot3\cdot1433\cdot{}_{11}C_{10}}{11\cdot13\cdot17\cdot19}\cdot\gamma^{10}\cdot x$$

$$S_{12}(x)=-\frac{2^{12}\cdot{}_{12}C_2}{23\cdot24}\cdot\gamma^2\cdot x^{10}+\frac{2^8\cdot15\cdot{}_{12}C_4}{7\cdot11\cdot23}\cdot\gamma^4\cdot x^8-\frac{2^6\cdot461\cdot{}_{12}C_6}{7\cdot11\cdot19\cdot23}\cdot\gamma^6\cdot x^6$$
$$+\frac{2^5\cdot41\cdot277\cdot{}_{12}C_8}{9\cdot11\cdot17\cdot19\cdot23}\cdot\gamma^8\cdot x^4-\frac{2\cdot15581\cdot{}_{12}C_{10}}{11\cdot17\cdot19\cdot\cdot23}\cdot\gamma^{10}\cdot x^2+\frac{7\cdot5513\cdot{}_{12}C_{12}}{13\cdot17\cdot19\cdot23}\cdot\gamma^{12}$$

$$S_{13}(x)=-\frac{2^{13}\cdot{}_{13}C_2}{25\cdot26}\cdot\gamma^2\cdot x^{11}+\frac{2^9\cdot49\cdot{}_{13}C_4}{13\cdot23\cdot25}\cdot\gamma^4\cdot x^9-\frac{2^8\cdot19\cdot29\cdot{}_{13}C_6}{5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot23}\cdot\gamma^6\cdot x^7$$
$$+\frac{2^6\cdot3\cdot17\cdot59\cdot{}_{13}C_8}{5\cdot11\cdot13\cdot19\cdot23}\cdot\gamma^8\cdot x^5-\frac{2^5\cdot69457\cdot{}_{13}C_{10}}{5\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\cdot23}\cdot\gamma^{10}\cdot x^3+\frac{2\cdot41\cdot11149\cdot{}_{13}C_{12}}{13\cdot17\cdot19\cdot23\cdot25}\cdot\gamma^{12}\cdot x$$

${}_0Q_N(x)$ の微分方程式を利用して、${}_0S_N(x)$ とチェビシェフ多項式基本型との関係を求める。

$$(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_0Q_N(x)'' -\frac{2x}{\gamma^2}\cdot {}_0Q_N(x)' +\frac{N(N+1)}{\gamma^2}\cdot {}_0Q_N(x)$$

$$=\frac{x}{\gamma^2}\cdot {}_0U_N(x)'-\frac{N}{\gamma^2}\cdot {}_0U_N(x)+(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_0S_N(x)'' -\frac{2x}{\gamma^2}\cdot {}_0S_N(x)'+\frac{N(N+1)}{\gamma^2}\cdot {}_0S_N(x)=0$$

上の式の最初の部分 $\frac{x}{\gamma^2}\cdot {}_0U_N(x)'-\frac{N}{\gamma^2}\cdot {}_0U_N(x)$ はすでに述べたように ${}_0U_{N-1}(x)'$ となり、

結局 $(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_0S_N(x)'' -\frac{2x}{\gamma^2}\cdot {}_0S_N(x)'+\frac{N(N+1)}{\gamma^2}\cdot {}_0S_N(x)=-{}_0U_{N-1}(x)'$ が得られる。

6. ルジャンドル多項式基本型とチェビシェフ多項式基本型との関係

6. 1 第一種および第二種の基本型補助項間の関係

第一種のチェビシェフ多項式基本型 ${}_0T_N(x)$ から誘導される、第一種のルジャンドル多項式基本型の微分方程式の解 ${}_0P_N(x)$ と、第二のチェビシェフ多項式基本型 ${}_0U_N(x)$ から誘導される第二種のルジャンドル多項式基本型の微分方程式の解 ${}_0Q_N(x)$ とは、$2\cdot {}_0P_N(x)={}_0Q_N(x)$ の関係があることが判明した。また第一種の基本型補助項 ${}_0R_N(x)$ を ${}_0P_N(x)={}_0T_N(x)+{}_0R_N(x)$、第二種の基本型補助項 ${}_0S_N(x)$ を ${}_0Q_N(x)={}_0U_N(x)+{}_0S_N(x)$ と定義して、これらの関数をルジャンドル多項式基本型の微分方程式に代入したときの関係式も検討した。ここでは ${}_0R_N(x)$ と ${}_0S_N(x)$ との関係を求める。まず次式が得られる。

$$2\cdot {}_0R_N(x)-{}_0S_N(x)={}_0U_N(x)-2\cdot {}_0T_N(x)=\gamma^2\cdot {}_0U_{N-2}(x)$$

すでに ${}_0R_N(x)$ と ${}_0S_N(x)$ は誘導されているので、それらの関数を利用して次式が得られる。

$$2\cdot {}_0R_N(x)-{}_0S_N(x)$$
$$=2^N\cdot\sum_{k=1}[(-1)^k\cdot {}_NC_{2k}\cdot\{\prod_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{2N-2j+2})-\prod_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{2N-2j})\}\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-2k}]$$

この式が $\gamma^2\cdot {}_0U_{N-2}(x)$ に等しくなることを、直接検討する。まず $k=1$ のとき、

$$2\cdot {}_0R_N(x)-{}_0S_N(x)=2^N\cdot(-1)\cdot {}_NC_2\cdot(\frac{1}{2N}-\frac{1}{2N-2})\cdot\gamma^2\cdot x^{N-2}$$

$$= 2^N \cdot \frac{N(N-1)}{2} \cdot \frac{2}{2N(2N-2)} \cdot \gamma^2 \cdot x^{N-2} = 2^{N-2} \cdot \gamma^2 \cdot x^{N-2}$$

$k = 2$ 以上のときの [ ] の中を計算する。

$$2 \cdot {}_0R_N(x) - {}_0S_N(x)$$

$$= 2^N \cdot \sum_{k=2} [(-1)^k \cdot \frac{N(N-1)(N-2)\cdot\cdot(N-2k+1)}{(2k)!} \cdot \frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdot(2k-1)(-2k)}{2N(2N-2)(2N-4)\cdot\cdot(2N-2k)} \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k}]$$

$$= 2^N \cdot \sum_{k=2} [(-1)^{k-1} \cdot \frac{N(N-1)(N-2)\cdot\cdot(N-2k+1)}{(2k-2)!\cdot(2k-1)(2k)} \cdot \frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdot(2k-1)(2k)}{2^2 N(N-1)(2N-4)\cdot\cdot(2N-2k)} \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k}]$$

$$= 2^{N-2} \cdot \sum_{k=2} [(-1)^{k-1} \cdot \frac{(N-2)\cdot\cdot\{N-2-2(k-1)+1)\}}{(2k-2)!} \cdot \frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdot\{2(k-1)-1)\}}{(2N-2-2)\cdot\cdot\{2N-2(k-1)-2\}} \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k}]$$

$$= 2^{N-2} \cdot \gamma^2 \cdot \sum_{k=2} \{(-1)^{k-1} \cdot {}_{N-2}C_{2(k-1)} \cdot \prod_{j=1}^{k-1} (\frac{2j-1}{2N-2j-2}) \cdot \gamma^{2(k-1)} \cdot x^{N-2-2(k-1)}\}$$

$$= 2^{N-2} \cdot \gamma^2 \cdot \sum_{l=1} \{(-1)^l \cdot {}_{N-2}C_{2l} \cdot \prod_{j=1}^{l} (\frac{2j-1}{2N-2j-2}) \cdot \gamma^{2l} \cdot x^{N-2-2l}\}$$

ただし最後の式の導入のために $l = k-1$ とおいた。結局 $2 \cdot {}_0R_N(x) - {}_0S_N(x)$ は

$$2 \cdot {}_0R_N(x) - {}_0S_N(x)$$

$$= \gamma^2 \cdot 2^{N-2} \cdot x^{N-2} + \gamma^2 \cdot 2^{N-2} \cdot \sum_{l=1} \{(-1)^l \cdot {}_{N-2}C_{2l} \cdot \prod_{j=1}^{l} (\frac{2j-1}{2N-2j-2}) \cdot \gamma^{2l} \cdot x^{N-2-2l}\}$$

$$= \gamma^2 \cdot 2^{N-2} \cdot [x^{N-2} + \sum_{l=1} \{(-1)^l \cdot {}_{N-2}C_{2l} \cdot \prod_{j=1}^{l} (\frac{2j-1}{2N-2j-2}) \cdot \gamma^{2l} \cdot x^{N-2-2l}\}]$$

となり、 $2 \cdot {}_0R_N(x) - {}_0S_N(x)$ は、次の ${}_0U_N(x)$

$${}_0U_N(x) = 2^N \cdot [x^N + \sum_{k=1} \{(-1)^k \cdot {}_NC_{2k} \cdot \prod_{j=1}^{k} (\frac{2j-1}{2N-2j+2}) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k}\}]$$

の N に $N-2$ を代入した次式と γ^2 との積となる。

$${}_0U_{N-2}(x) = 2^{N-2} \cdot [x^{N-2} + \sum_{k=1} \{(-1)^k \cdot {}_{N-2}C_{2k} \cdot \prod_{j=1}^{k} (\frac{2j-1}{2N-2j-2}) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2-2k}\}]$$

6．2　基本型補助項を利用するチェビシェフ多項式基本型の漸化式

チェビシェフ多項式基本型間の漸化式はすでに述べたが、ここでは $2\cdot {}_0R_N(x)-{}_0S_N(x)$ を利用して別のチェビシェフ多項式基本型間の漸化式を求める。まず次の二式から出発する。

$$\begin{cases} (1-\dfrac{x^2}{\gamma^2})\cdot 2\cdot {}_0R_N(x)'' -\dfrac{2x}{\gamma^2}\cdot 2\cdot {}_0R_N(x)' + \dfrac{N(N+1)}{\gamma^2}\cdot 2\cdot {}_0R_N(x) = 2\cdot N\cdot {}_0U_{N-2}(x) \\ (1-\dfrac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_0S_N(x)'' -\dfrac{2x}{\gamma^2}\cdot {}_0S_N(x)' + \dfrac{N(N+1)}{\gamma^2}\cdot {}_0S_N(x) = -{}_0U_{N-1}(x)' \end{cases}$$

上の式から下の式を引いて次式が得られる。

$$(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot\{\gamma^2\cdot {}_0U_{N-2}(x)''\} - \frac{2x}{\gamma^2}\cdot\{\gamma^2\cdot {}_0U_{N-2}(x)'\} + \frac{N(N+1)}{\gamma^2}\cdot\{\gamma^2\cdot {}_0U_{N-2}(x)\}$$
$$= 2\cdot N\cdot {}_0U_{N-2}(x) + {}_0U_{N-1}(x)'$$

この結果を利用して次式が得られる。

$$(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot\{\gamma^2\cdot {}_0U_{N-2}(x)''\} - \frac{3x}{\gamma^2}\cdot\{\gamma^2\cdot {}_0U_{N-2}(x)'\} + \frac{(N-2)N}{\gamma^2}\cdot\{\gamma^2\cdot {}_0U_{N-2}(x)\}$$
$$= 2\cdot N\cdot {}_0U_{N-2}(x) + {}_0U_{N-1}(x)' - \frac{x}{\gamma^2}\cdot\{\gamma^2\cdot {}_0U_{N-2}(x)'\} - \frac{3N}{\gamma^2}\cdot\{\gamma^2\cdot {}_0U_{N-2}(x)\}$$
$$= -N\cdot {}_0U_{N-2}(x) + {}_0U_{N-1}(x)' - x\cdot {}_0U_{N-2}(x)' = 0$$

ここから　${}_0U_{N-1}(x)' = N\cdot {}_0U_{N-2}(x) + x\cdot {}_0U_{N-2}(x)'$　が得られる。

すでに　${}_0U_{N-1}(x)' = \dfrac{x}{\gamma^2}\cdot {}_0U_N(x)' - \dfrac{N}{\gamma^2}\cdot {}_0U_N(x)$　が得られているので、

$\dfrac{x}{\gamma^2}\cdot {}_0U_N(x)' - \dfrac{N}{\gamma^2}\cdot {}_0U_N(x) = N\cdot {}_0U_{N-2}(x) + x\cdot {}_0U_{N-2}(x)'$ となり、整理して次式が得られる。

$$x\cdot {}_0U_N(x)' - N\cdot {}_0U_N(x) = \gamma^2\cdot\{x\cdot {}_0U_{N-2}(x)' + N\cdot {}_0U_{N-2}(x)\}$$

6．3　第一種および第二種の基本型補助項の微分式の関係

第一種の基本型補助項 ${}_0R_N(x)$ は第二種のチェビシェフ多項式基本型 ${}_0U_{N-2}(x)$ との間に

$(1-\dfrac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_0R_N(x)'' - \dfrac{2x}{\gamma^2}\cdot {}_0R_N(x)' + \dfrac{N(N+1)}{\gamma^2}\cdot {}_0R_N(x) = N\cdot {}_0U_{N-2}(x)$ なる関係が成立する

ことはすでに述べた。ところが $2\cdot {}_0R_N(x) - {}_0S_N(x) = \gamma^2\cdot {}_0U_{N-2}(x)$ なので、この式を上の式に

代入し、整理して次式が得られる。

$$(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_0R_N(x)'' -\frac{2x}{\gamma^2}\cdot {}_0R_N(x)'+\frac{N(N-1)}{\gamma^2}\cdot {}_0R_N(x)=-\frac{N}{\gamma^2}\cdot {}_0S_N(x)$$

また第二種の基本型補助項 ${}_0S_N(x)$ は第二種のチェビシェフ多項式基本型の一回微分 ${}_0U_{N-1}(x)'$

との間に、 $(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_0S_N(x)'' -\frac{2x}{\gamma^2}\cdot {}_0S_N(x)' +\frac{N(N+1)}{\gamma^2}\cdot {}_0S_N(x)=-\ {}_0U_{N-1}(x)'$

なる関係が成立することはすでに述べた。ところが ${}_0U_{N-1}(x)'=N\cdot {}_0U_{N-2}(x)+x\cdot {}_0U_{N-2}(x)'$ から

${}_0U_{N-1}(x)'=N\cdot\frac{2\cdot {}_0R_N(x)-{}_0S_N(x)}{\gamma^2}+x\cdot\frac{2\cdot {}_0R_N(x)'-{}_0S_N(x)'}{\gamma^2}$ が得られ、ここから

$$(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_0S_N(x)'' -\frac{3x}{\gamma^2}\cdot {}_0S_N(x)' +\frac{N^2}{\gamma^2}\cdot {}_0S_N(x)=-\frac{2}{\gamma^2}\cdot\{\,x\cdot {}_0R_N(x)'+N\cdot {}_0R_N(x)\,\}$$

が得られる。この ${}_0R_N(x)$ の微分式と ${}_0S_N(x)$ の微分式の差をとって整理すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned}&(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_0R_N(x)'' -\frac{4x}{\gamma^2}\cdot {}_0R_N(x)'+\frac{N(N-3)}{\gamma^2}\cdot {}_0R_N(x)\\ =\ &(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_0S_N(x)'' -\frac{3x}{\gamma^2}\cdot {}_0S_N(x)'+\frac{N(N-1)}{\gamma^2}\cdot {}_0S_N(x)\end{aligned}$$

7. ルジャンドル多項式基本型の性質

7. 1　第一種および第二種のルジャンドル多項式基本型の統合

第一種のルジャンドル多項式基本型 ${}_0P_N(x)$ と第二種のルジャンドル多項式基本型 ${}_0Q_N(x)$ は、

$2\cdot {}_0P_N(x)={}_0Q_N(x)$ となっているので、統一してルジャンドル多項式基本型 ${}_0Le_N(x)$ とする。

$${}_0Le_N(x)=\frac{(2N)\,!}{2^N\cdot(N!)^2}\cdot[\,x^N+\sum_{k=1}\{(-1)^k\cdot {}_NC_{2k}\cdot\prod_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{2N-2j+1})\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-2k}\}]$$

ルジャンドル多項式基本型 ${}_0Le_N(x)$ の係数を $\mathit{\Gamma}(N)=\frac{(2N)\,!}{2^N\cdot(N!)^2}$ とおくと、

$\mathit{\Gamma}(N)=\frac{2N-1}{N}\cdot\mathit{\Gamma}(N-1)$ で $\mathit{\Gamma}(1)\ =1$ から、$\mathit{\Gamma}(N)=\prod_{j=1}^{N}(\frac{2j-1}{j})$ となり，${}_0Le_N(x)$ は

$${}_0Le_N(x)=\prod_{j=1}^{N}(\frac{2j-1}{j})\cdot[\,x^N+\sum_{k=1}\{(-1)^k\cdot{}_NC_{2k}\cdot\prod_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{2N-2j+1})\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-2k}\}]$$ で表される。

ただし後に述べる、ルジャンドル陪多項式基本型 ${}_0Le_N(x)^{(m)}$ と同じ形式にするために次のように書く。

$${}_0Le_N(x)=\frac{{}_{2N}P_N}{2^N}\cdot\frac{1}{N!}\cdot[\,x^N+\sum_{k=1}\{(-1)^k\cdot{}_NC_{2k}\cdot\prod_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{2N-2j+1})\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-2k}\}]$$

ここに ${}_{2N}P_N$ は順列の記号で ${}_{2N}P_N=\dfrac{(2N)\,!}{(2N-N)\,!}=\dfrac{(2N)\,!}{(N)\,!}$ となり、${}_{2N}P_0=1$ である。

第一種のルジャンドル多項式基本型 ${}_0P_N(x)$ 、第二種のルジャンドル多項式基本型 ${}_0Q_N(x)$、

およびこれらの関数を統一したルジャンドル多項式基本型 ${}_0Le_N(x)$ との間の関係は次式となる。

$$\begin{aligned}{}_0Le_N(x)&=\frac{(2N)\,!}{2^N\cdot(N\,!)^2}\cdot\frac{{}_0P_N(x)}{2^{N-1}}=\frac{(2N)\,!}{2^N\cdot(N\,!)^2}\cdot\frac{{}_0Q_N(x)}{2^N}\\&=\prod_{j=1}^{N}(\frac{2j-1}{j})\cdot\frac{{}_0P_N(x)}{2^{N-1}}=\prod_{j=1}^{N}(\frac{2j-1}{j})\cdot\frac{{}_0Q_N(x)}{2^N}\end{aligned}$$

この微分方程式 $(1-\dfrac{x^2}{\gamma^2})\cdot{}_0Le_N(x)''-\dfrac{2x}{\gamma^2}\cdot{}_0Le_N(x)'+\dfrac{N(N+1)}{\gamma^2}\cdot{}_0Le_N(x)=0$ と

その解 ${}_0Le_N(x)$ は $\gamma^2=-1$ でも成立する。

7．2　ルジャンドル多項式基本型の漸化式

ルジャンドル多項式基本型、例えば ${}_0Le_{N-1}(x)$, ${}_0Le_N(x)$, ${}_0Le_{N+1}(x)$ の間の漸化式を求める。

$$\begin{cases}{}_0Le_{N-1}(x)=\Gamma(N-1)\cdot[\,x^{N-1}+\sum_{k=1}\{(-1)^k\cdot{}_{N-1}C_{2k}\cdot\prod_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{2N-2j-1})\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-1-2k}\}\,]\\{}_0Le_N(x)=\Gamma(N)\cdot[\,x^N+\sum_{k=1}\{(-1)^k\cdot{}_NC_{2k}\cdot\prod_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{2N-2j+1})\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-2k}\}\,]\\{}_0Le_{N+1}(x)=\Gamma(N+1)\cdot[\,x^{N+1}+\sum_{k=1}\{(-1)^k\cdot{}_{N+1}C_{2k}\cdot\prod_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{2N-2j+3})\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N+1-2k}\}\,]\end{cases}$$

まず上の ${}_0Le_{N-1}(x)$, ${}_0Le_N(x)$, ${}_0Le_{N+1}(x)$ の間に、

${}_0Le_{N+1}(x)-\alpha(N)\cdot x\cdot {}_0Le_N(x)+\beta(N)\cdot {}_0Le_{N-1}(x)=0$ なる関係があると仮定する。

最初に ${}_0Le_{N+1}(x)-\alpha(N)\cdot x\cdot {}_0Le_N(x)$ の x^{N+1} の項が 0 となることから、

$\dfrac{2N+1}{N+1}-\alpha(N)=0$ となり、$\alpha(N)=\dfrac{2N+1}{N+1}$ となる。次に x^{N-1} の項を考慮して、

$-\dfrac{1}{2}\cdot\gamma^2+\dfrac{(2N+1)(N-1)}{2(N+1)(2N-1)}\cdot\gamma^2+\dfrac{\beta(N)}{2N-1}=0$ から $\beta(N)=\dfrac{N}{N+1}\cdot\gamma^2$ となり、結局漸化式は

$$(N+1)\cdot {}_0Le_{N+1}(x)-(2N+1)\,x\cdot {}_0Le_N(x)+N\cdot\gamma^2\cdot {}_0Le_{N-1}(x)=0$$ となる。

この結果を確認するために、漸化式の $\gamma^{2l}\cdot x^{N+1-2l}$ の項を計算する。

まず $(N+1)\cdot {}_0Le_{N+1}(x)-(2N+1)\,x\cdot {}_0Le_N(x)$ の $\gamma^{2l}\cdot x^{N+1-2l}$ の項は次のようになり、

$$\begin{aligned}
&(-1)^l\cdot(N+1)\cdot\Gamma(N+1)\cdot{}_{N+1}C_{2l}\cdot\prod_{j=1}^{l}\left(\frac{2j-1}{2N-2j+3}\right)\cdot\gamma^{2l}\cdot x^{N+1-2l}\\
&-(-1)^l\cdot(2N+1)\,x\cdot\Gamma(N)\cdot{}_{N}C_{2l}\cdot\prod_{j=1}^{l}\left(\frac{2j-1}{2N-2j+1}\right)\cdot\gamma^{2l}\cdot x^{N-2l}\\
&=(-1)^l\cdot\left(\frac{2\,l\,N}{N+1-2l}\right)\cdot\Gamma(N)\cdot{}_{N}C_{2l}\cdot\prod_{j=1}^{l}\left(\frac{2j-1}{2N-2j+1}\right)\cdot\gamma^{2l}\cdot x^{N+1-2l}
\end{aligned}$$

$N\cdot\gamma^2\cdot {}_0Le_{N-1}(x)$ の $\gamma^{2l}\cdot x^{N+1-2l}$ の項は次のようになるので、漸化式は成立している。

$$(-1)^{l-1}\cdot N\cdot\gamma^2\cdot\Gamma(N-1)\cdot{}_{N-1}C_{2l-2}\cdot\prod_{j=1}^{l-1}\left(\frac{2j-1}{2N-2j-1}\right)\cdot\gamma^{2l-2}\cdot x^{N+1-2l}$$

7．3　ルジャンドル陪多項式基本型

ルジャンドル多項式基本型 ${}_0Le_N(x)$ を m 回微分した関数 ${}_0Le_N(x)^{(m)}$ を $N-m$ 次の

ルジャンドル陪多項式基本型とよぶ。一般に ${}_0Le_N(x)^{(m)}$ は次式で表される。

$${}_0Le_N(x)^{(m)}=\frac{{}_{2N}P_N}{2^N}\cdot\frac{1}{(N-m)!}\cdot\left[\,x^{N-m}+\sum_{k=1}\left\{(-1)^k\cdot{}_{N-m}C_{2k}\cdot\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{2j-1}{2N-2j+1}\right)\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-2k-m}\right\}\right]$$

この ${}_0Le_N(x)^{(m)}$ を利用して様々な m の値のときの関数を容易に求めることができる。

例えば　$k=1$，$m=N-1$　を代入すると、${}_0Le_N(x)^{(N-1)}=\dfrac{{}_{2N}P_N}{2^N}\cdot\dfrac{1}{1!}\cdot x$　が得られ,

さらに　$k=1$，$m=N-2$　を代入すると、${}_0Le_N(x)^{(N-2)}=\dfrac{{}_{2N}P_N}{2^N}\cdot\dfrac{1}{2!}\cdot(x^2-\dfrac{{}_2C_2}{2N-1}\cdot\gamma^2)$

が得られる。 同様に順次得られるルジャンドル陪多項式基本型をまとめて下に示す。

$${}_0Le_N(x)^{(N-1)}=\frac{{}_{2N}P_N}{2^N}\cdot\frac{1}{1!}\cdot x$$

$${}_0Le_N(x)^{(N-2)}=\frac{{}_{2N}P_N}{2^N}\cdot\frac{1}{2!}\cdot(x^2-\frac{{}_2C_2}{2N-1}\cdot\gamma^2)$$

$${}_0Le_N(x)^{(N-3)}=\frac{{}_{2N}P_N}{2^N}\cdot\frac{1}{3!}\cdot(x^3-\frac{{}_3C_2}{2N-1}\cdot\gamma^2\cdot x)$$

$${}_0Le_N(x)^{(N-4)}=\frac{{}_{2N}P_N}{2^N}\cdot\frac{1}{4!}\cdot\{x^4-\frac{{}_4C_2}{2N-1}\cdot\gamma^2\cdot x^2+\frac{3\cdot{}_4C_4}{(2N-1)(2N-3)}\cdot\gamma^4\}$$

$${}_0Le_N(x)^{(N-5)}=\frac{{}_{2N}P_N}{2^N}\cdot\frac{1}{5!}\cdot\{x^5-\frac{{}_5C_2}{2N-1}\cdot\gamma^2\cdot x^3+\frac{3\cdot{}_5C_4}{(2N-1)(2N-3)}\cdot\gamma^4\cdot x\}$$

$$\begin{aligned}{}_0Le_N(x)^{(N-6)}=\frac{{}_{2N}P_N}{2^N}\cdot\frac{1}{6!}\cdot\{&x^6-\frac{{}_6C_2}{2N-1}\cdot\gamma^2\cdot x^4+\frac{3\cdot{}_6C_4}{(2N-1)(2N-3)}\cdot\gamma^4\cdot x^2\\&-\frac{3\cdot5\cdot{}_6C_6}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)}\cdot\gamma^6\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}{}_0Le_N(x)^{(N-7)}=\frac{{}_{2N}P_N}{2^N}\cdot\frac{1}{7!}\cdot\{&x^7-\frac{{}_7C_2}{2N-1}\cdot\gamma^2\cdot x^5+\frac{3\cdot{}_7C_4}{(2N-1)(2N-3)}\cdot\gamma^4\cdot x^3\\&-\frac{3\cdot5\cdot{}_7C_6}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)}\cdot\gamma^6\cdot x\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}{}_0Le_N(x)^{(N-8)}=\frac{{}_{2N}P_N}{2^N}\cdot\frac{1}{8!}\cdot\{&x^8-\frac{{}_8C_2}{2N-1}\cdot\gamma^2\cdot x^6+\frac{3\cdot{}_8C_4}{(2N-1)(2N-3)}\cdot\gamma^4\cdot x^4\\&-\frac{3\cdot5\cdot{}_8C_6}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)}\cdot\gamma^6\cdot x^2+\frac{3\cdot5\cdot7\cdot{}_8C_8}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)(2N-7)}\cdot\gamma^8\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}{}_0Le_N(x)^{(N-9)}=\frac{{}_{2N}P_N}{2^N}\cdot\frac{1}{9!}\cdot\{&x^9-\frac{{}_9C_2}{2N-1}\cdot\gamma^2\cdot x^7+\frac{3\cdot{}_9C_4}{(2N-1)(2N-3)}\cdot\gamma^4\cdot x^5\\&-\frac{3\cdot5\cdot{}_9C_6}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)}\cdot\gamma^6\cdot x^3+\frac{3\cdot5\cdot7\cdot{}_9C_8}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)(2N-7)}\cdot\gamma^8\cdot x\}\end{aligned}$$

$${}_0Le_N(x)^{(N-10)}=\frac{{}_{2N}P_N}{2^N}\cdot\frac{1}{10!}\cdot\{x^{10}-\frac{{}_{10}C_2}{2N-1}\cdot\gamma^2\cdot x^8+\frac{3\cdot{}_{10}C_4}{(2N-1)(2N-3)}\cdot\gamma^4\cdot x^6$$

$$-\frac{3\cdot 5\cdot {}_{10}C_6}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)}\cdot\gamma^6\cdot x^4+\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot {}_{10}C_8}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)(2N-7)}\cdot\gamma^8\cdot x^2$$

$$-\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot {}_{10}C_{10}}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)(2N-7)(2N-9)}\cdot\gamma^{10}\}$$

$${}_0Le_N(x)^{(N-11)}=\frac{{}_{2N}P_N}{2^N}\cdot\frac{1}{11!}\cdot\{x^{11}-\frac{{}_{11}C_2}{2N-1}\cdot\gamma^2\cdot x^9+\frac{3\cdot {}_{11}C_4}{(2N-1)(2N-3)}\cdot\gamma^4\cdot x^7$$

$$-\frac{3\cdot 5\cdot {}_{11}C_6}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)}\cdot\gamma^6\cdot x^5+\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot {}_{11}C_8}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)(2N-7)}\cdot\gamma^8\cdot x^3$$

$$-\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot {}_{11}C_{10}}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)(2N-7)(2N-9)}\cdot\gamma^{10}\cdot x\}$$

$${}_0Le_N(x)^{(N-12)}=\frac{{}_{2N}P_N}{2^N}\cdot\frac{1}{12!}\cdot\{x^{12}-\frac{{}_{12}C_2}{2N-1}\cdot\gamma^2\cdot x^{10}+\frac{3\cdot {}_{12}C_4}{(2N-1)(2N-3)}\cdot\gamma^4\cdot x^8$$

$$-\frac{3\cdot 5\cdot {}_{12}C_6}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)}\cdot\gamma^6\cdot x^6+\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot {}_{12}C_8}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)(2N-7)}\cdot\gamma^8\cdot x^4$$

$$-\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot {}_{12}C_{10}}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)(2N-7)(2N-9)}\cdot\gamma^{10}\cdot x^2$$

$$+\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot {}_{12}C_{12}}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)(2N-7)(2N-9)(2N-11)}\cdot\gamma^{12}\}$$

$${}_0Le_N(x)^{(N-13)}=\frac{{}_{2N}P_N}{2^N}\cdot\frac{1}{13!}\cdot\{x^{13}-\frac{{}_{13}C_2}{2N-1}\cdot\gamma^2\cdot x^{11}+\frac{3\cdot {}_{13}C_4}{(2N-1)(2N-3)}\cdot\gamma^4\cdot x^9$$

$$-\frac{3\cdot 5\cdot {}_{13}C_6}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)}\cdot\gamma^6\cdot x^7+\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot {}_{13}C_8}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)(2N-7)}\cdot\gamma^8\cdot x^5$$

$$-\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot {}_{13}C_{10}}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)(2N-7)(2N-9)}\cdot\gamma^{10}\cdot x^3$$

$$+\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot {}_{13}C_{12}}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)(2N-7)(2N-9)(2N-11)}\cdot\gamma^{12}\cdot x\}$$

例えば ${}_0Le_N(x)^{(N-9)}$ の N に $N=9$ を代入すると、 ${}_0Le_9(x)$ が得られ、

$${}_0Le_9(x)=\frac{{}_{18}P_9}{2^9}\cdot\frac{1}{9!}\cdot(x^9-\frac{{}_9C_2}{17}\cdot\gamma^2\cdot x^7+\frac{{}_9C_4}{5\cdot 17}\cdot\gamma^4\cdot x^5-\frac{{}_9C_6}{13\cdot 17}\cdot\gamma^6\cdot x^3+\frac{7\cdot {}_9C_8}{11\cdot 13\cdot 17}\cdot\gamma^8\cdot x)$$

この式は ${}_0Le_N(x)$ の N に $N=9$ を代入した結果と同じである。

また ${}_0Le_N(x)^{(N-8)}$ の N に $N=9$ を代入すると、${}_0Le_9(x)^{(1)}$ が得られ、

$${}_0Le_9(x)^{(1)} = \frac{{}_{18}P_9}{2^9}\cdot\frac{1}{8!}\cdot(x^8 - \frac{{}_8C_2}{17}\cdot\gamma^2\cdot x^6 + \frac{{}_8C_4}{5\cdot 17}\cdot\gamma^4\cdot x^4 - \frac{{}_8C_6}{13\cdot 17}\cdot\gamma^6\cdot x^2 + \frac{7\cdot {}_8C_8}{11\cdot 13\cdot 17}\cdot\gamma^8)$$

この式は ${}_0Le_N(x)^{(m)}$ に $N=9$, $m=1$ を代入した結果と同じである。

さらにルジャンドル陪多項式基本型の漸化式を求める。

$$\begin{cases} {}_0Le_{N-1}(x)^{(m)} = \prod_{j=1}^{N-1}(2j-1)\cdot[\frac{x^{N-1-m}}{(N-1-m)!} + \sum_{k=1}\{\frac{(-1)^k}{2^k\cdot k!}\cdot\frac{1}{\prod_{j=1}^{k}(2N-2j-1)}\cdot\frac{\gamma^{2k}\cdot x^{N-1-2k-m}}{(N-1-2k-m)!}\}] \\ {}_0Le_N(x)^{(m)} = \prod_{j=1}^{N}(2j-1)\cdot[\frac{x^{N-m}}{(N-m)!} + \sum_{k=1}\{\frac{(-1)^k}{2^k\cdot k!}\cdot\frac{1}{\prod_{j=1}^{k}(2N-2j+1)}\cdot\frac{\gamma^{2k}\cdot x^{N-2k-m}}{(N-2k-m)!}\}] \\ {}_0Le_{N+1}(x)^{(m)} = \prod_{j=1}^{N+1}(2j-1)\cdot[\frac{x^{N+1-m}}{(N+1-m)!} + \sum_{k=1}\{\frac{(-1)^k}{2^k\cdot k!}\cdot\frac{1}{\prod_{j=1}^{k}(2N-2j+3)}\cdot\frac{\gamma^{2k}\cdot x^{N+1-2k-m}}{(N+1-2k-m)!}\}] \end{cases}$$

これらのルジャンドル陪多項式基本型の間に

${}_0Le_{N+1}(x)^{(m)} - \alpha(N)\cdot x\cdot {}_0Le_N(x)^{(m)} + \beta(N)\cdot {}_0Le_{N-1}(x)^{(m)} = 0$ なる関係があると仮定する。

まず ${}_0Le_{N+1}(x)^{(m)} - \alpha(N)\,x\cdot {}_0Le_N(x)^{(m)}$ の x^{N+1-m} の項が 0 となることから、

$\frac{2N+1}{(N+1-m)!} - \frac{\alpha(N)}{(N-m)!} = 0$ となり、$\alpha(N) = \frac{2N+1}{N+1-m}$ となる。

次に x^{N-1-m} の項を考慮して、$-\frac{2N-1}{2(N-1-m)}\cdot\gamma^2 + \frac{2N+1}{2(N+1-m)}\cdot\gamma^2 + \frac{\beta(N)}{N-1-m} = 0$ から

$\beta(N) = \frac{N+m}{N+1-m}\cdot\gamma^2$ となり、結局漸化式は次式となるはずである。

$$(N+1-m)\cdot {}_0Le_{N+1}(x)^{(m)} - (2N+1)\,x\cdot {}_0Le_N(x)^{(m)} + (N+m)\cdot\gamma^2\cdot {}_0Le_{N-1}(x)^{(m)} = 0$$

確認すると $(N+1-m)\cdot {}_0Le_{N+1}(x)^{(m)} - (2N+1)\,x\cdot {}_0Le_N(x)^{(m)}$ の $\gamma^{2l}\cdot x^{N+1-2l-m}$ の項は

$$(N+1-m)\cdot\prod_{j=1}^{N+1}(2j-1)\cdot\frac{(-1)^l}{2^l\cdot l!}\cdot\frac{1}{\prod_{j=1}^{l}(2N-2j+3)}\cdot\frac{\gamma^{2l}\cdot x^{N+1-2l-m}}{(N+1-2l-m)!}$$

$$-(2N+1)\,x\cdot\prod_{j=1}^{N}(2j-1)\cdot\frac{(-1)^l}{2^l\cdot l\,!}\cdot\ \frac{1}{\prod_{j=1}^{l}(2N-2j+1)}\ \cdot\ \frac{\gamma^{2l}\cdot x^{N-2l-m}}{(N-2l-m)\,!}$$

$$=\frac{(-1)^l}{2^l\cdot l\,!}\cdot\frac{2l\,(N+m)}{(N+1-2l-m)\,!}\cdot\prod_{j=1}^{N}(2j-1)\cdot\frac{1}{\prod_{j=1}^{l}(2N-2j+1)}\cdot\gamma^{2l}\cdot x^{N+1-2l-m}$$

となり、$(N+m)\cdot\gamma^2\cdot{}_0Le_{N-1}(x)^{(m)}$ の　$\gamma^{2l}\cdot x^{N+1-2l-m}$　の項は

$$(N+m)\cdot\gamma^2\cdot\prod_{j=1}^{N-1}(2j-1)\cdot\frac{(-1)^{l-1}}{2^{l-1}\cdot(l-1)\,!}\cdot\frac{1}{\prod_{j=1}^{l-1}(2N-2j-1)}\cdot\frac{\gamma^{2l-2}\cdot\ x^{N+1-2l-m}}{(N+1-2l-m)\,!}$$

$$=-\frac{(-1)^l}{2^l\cdot l\,!}\cdot\frac{2l\,(N+m)}{(N+1-2l-m)\,!}\cdot\prod_{j=1}^{N}(2j-1)\cdot\frac{1}{\prod_{j=1}^{l}(2N-2j+1)}\cdot\gamma^{2l}\cdot x^{N+1-2l-m}$$

となるので、漸化式が一般的に成立することが解る。

一方、既に述べた　$(N+1)\cdot{}_0Le_{N+1}(x)-(2N+1)\,x\cdot{}_0Le_N(x)+N\cdot\gamma^2\cdot{}_0Le_{N-1}(x)=0$

から、ルジャンドル陪多項式基本型の漸化式は $m=0$ でも成立する。この式を m 回微分し、

$$(N+1)\cdot{}_0Le_{N+1}(x)^{(m)}-(2N+1)\,\{x\cdot{}_0Le_N(x)^{(m)}+m\cdot{}_0Le_N(x)^{(m-1)}\}+N\cdot\gamma^2\cdot{}_0Le_{N-1}(x)^{(m)}=0$$

を得、この式とすでに求めた漸化式、

$$(N+1-m)\cdot{}_0Le_{N+1}(x)^{(m)}-(2N+1)\,x\cdot{}_0Le_N(x)^{(m)}+(N+m)\cdot\gamma^2\cdot{}_0Le_{N-1}(x)^{(m)}=0$$

から別の漸化式を誘導することができる。

まず連立して　$${}_0Le_{N+1}(x)^{(m)}-\gamma^2\cdot{}_0Le_{N-1}(x)^{(m)}=(2N+1)\cdot{}_0Le_N(x)^{(m-1)}$$

${}_0Le_{N-1}(x)^{(m)}$ を消去して、　$${}_0Le_{N+1}(x)^{(m)}-x\cdot{}_0Le_N(x)^{(m)}=(N+m)\cdot{}_0Le_N(x)^{(m-1)}$$

${}_0Le_{N+1}(x)^{(m)}$ を消去して、　$$x\cdot{}_0Le_N(x)^{(m)}-\gamma^2\cdot{}_0Le_{N-1}(x)^{(m)}=(N+1-m)\cdot{}_0Le_N(x)^{(m-1)}$$

これらの漸化式は　$m=1$　および　$\gamma^2=-1$　でも成立する。

7.４　ルジャンドル同伴関数基本型

ルジャンドル多項式基本型 ${}_0Le_N(x)$ の微分方程式、

$$(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_0Le_N(x)'' -\frac{2x}{\gamma^2}\cdot {}_0Le_N(x)' +\frac{N(N+1)}{\gamma^2}\cdot {}_0Le_N(x)=0$$

に γ^2 をかけると次式が得られる。

$$(\gamma^2-x^2)\cdot {}_0Le_N(x)'' -2x\cdot {}_0Le_N(x)' +N(N+1)\cdot {}_0Le_N(x)=0$$

この微分方程式を一回微分すると次式が得られ、

$$(\gamma^2-x^2)\cdot {}_0Le_N(x)^{(3)}-4x\cdot {}_0Le_N(x)^{(2)}+\{N(N+1)-2\}\cdot {}_0Le_N(x)^{(1)}=0$$

さらにもう一回微分すると次式が得られ、

$$(\gamma^2-x^2)\cdot {}_0Le_N(x)^{(4)}-6x\cdot {}_0Le_N(x)^{(3)}+\{N(N+1)-6\}\cdot {}_0Le_N(x)^{(2)}=0$$

結局 m 回微分すると次式が得られ、

$$\begin{aligned}(\gamma^2-x^2)\cdot {}_0Le_N(x)^{(m+2)}&-2(m+1)x\cdot {}_0Le_N(x)^{(m+1)}\\&+\{N(N+1)-m(m+1)\}\cdot {}_0Le_N(x)^{(m)}=0\end{aligned}$$

この式を γ^2 で割って次の ${}_0L_N(x)^{(m)}$ の微分方程式が得られる。

$$(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_0Le_N(x)^{(m+2)}-\frac{2(m+1)}{\gamma^2}\cdot x\cdot {}_0Le_N(x)^{(m+1)}+\frac{N(N+1)-m(m+1)}{\gamma^2}\cdot {}_0Le_N(x)^{(m)}=0$$

この ${}_0L_N(x)^{(m)}$ を ${}_0L_N(x)^{(m)}=(\gamma^2-x^2)^{-\frac{m}{2}}\cdot {}_0y_N^m(x)$ とおいて一階微分および二階微分をとる。

$$\begin{cases}{}_0Le_N(x)^{(m+1)}= & (\gamma^2-x^2)^{-\frac{m}{2}}\cdot {}_0y_N^m(x)' + mx\,(\gamma^2-x^2)^{-\frac{m}{2}-1}\cdot {}_0y_N^m(x)\\ {}_0Le_N(x)^{(m+2)}= & (\gamma^2-x^2)^{-\frac{m}{2}}\cdot {}_0y_N^m(x)''+2mx\,(\gamma^2-x^2)^{-\frac{m}{2}-1}\cdot {}_0y_N^m(x)'\\ & +m(\gamma^2-x^2)^{-\frac{m}{2}-2}\cdot\{\gamma^2+(m+1)x^2\}\cdot {}_0y_N^m(x)\end{cases}$$

これらの値を ${}_0L_N(x)^{(m)}$ の元の微分方程式に代入して次式が得られる。

$$(\gamma^2 - x^2)\cdot {}_0y_N^m(x)'' - 2x\cdot {}_0y_N^m(x)' + \{N(N+1) - \frac{m^2\gamma^2}{\gamma^2 - x^2}\}\cdot {}_0y_N^m(x) = 0$$

この式を γ^2 で割り、整理して次式を得る。

$$(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_0y_N^m(x)'' - \frac{2x}{\gamma^2}\cdot {}_0y_N^m(x)' + \{\frac{N(N+1)}{\gamma^2} - \frac{m^2}{\gamma^2 - x^2}\}\cdot {}_0y_N^m(x) = 0$$

上の式の γ^2 を 1 とおいた場合の解は、物理学で非常によく使用され、ルジャンドル同伴関数と呼ばれている。そこで上の微分方程式の解 ${}_0y_N^m(x)$ をルジャンドル同伴関数基本型と呼ぶ。

$${}_0y_N^m(x) = (\gamma^2 - x^2)^{\frac{m}{2}}\cdot {}_0Le_N(x)^{(m)}$$

7．5　ルジャンドル同伴関数基本型の漸化式

ルジャンドル同伴関数基本型 ${}_0y_N^m(x)$ の漸化式を求めるために、すでに述べた

$$(\gamma^2 - x^2)\cdot {}_0Le_N(x)^{(m+2)} - 2(m+1)\,x\cdot {}_0Le_N(x)^{(m+1)} + \{N(N+1) - m(m+1)\}\cdot {}_0Le_N(x)^{(m)} = 0$$

に、例えば ${}_0Le_{\boldsymbol{N}}(x)^{(m)}$ に $(\gamma^2 - x^2)^{\frac{m}{2}}$ をかけ整理すると、次式が得られる。

$${}_0y_N^{m+2}(x) - 2(m+1)\,x\cdot(\gamma^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot {}_0y_N^{m+1}(x) + \{N(N+1) - m(m+1)\}\cdot {}_0y_N^m(x) = 0$$

あるいはこの式の $m+1$ を m で書き直して次式を得る。

$${}_0y_N^{m+1}(x) - 2mx\cdot(\gamma^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot {}_0y_N^m(x) + \{N(N+1) - m(m-1)\}\cdot {}_0y_N^{m-1}(x) = 0$$

また m が同じ漸化式も、すでに述べた、

$$(N+1-m)\cdot {}_0Le_{N+1}(x)^{(m)} - (2N+1)\,x\cdot {}_0Le_N(x)^{(m)} + (N+m)\cdot\gamma^2\cdot {}_0Le_{N-1}(x)^{(m)} = 0$$

に $(\gamma^2 - x^2)^{\frac{m}{2}}$ かけて整理すると、次式が得られる。

$$(N+1-m)\cdot {}_0y_{N+1}^m-(2N+1)\,x\cdot {}_0y_N^m+(N+m)\cdot\gamma^2\cdot {}_0y_{N-1}^m=0$$

以上のようにルジャンドル多項式基本型の様々な関数の性質が明らかとなった。

$N=2$ から $N=13$ までの関数 ${}_0Le_N(x)$ と ${}_0Le_N(x)^{(m)}$ を下にまとめる。

ただし ${}_0Le_0(x)=1$, ${}_0Le_1(x)=x$ である。

$${}_0Le_2(x)=\frac{{}_4P_2}{2^2}\cdot\frac{1}{2!}\cdot\left(x^2-\frac{{}_2C_2}{3}\cdot\gamma^2\right),\quad {}_0Le_2(x)^{(1)}=\frac{{}_4P_2}{2^2}\cdot\frac{1}{1!}\cdot x,\quad {}_0Le_2(x)^{(2)}=\frac{{}_4P_2}{2^2}\cdot\frac{1}{0!}$$

$${}_0Le_3(x)=\frac{{}_6P_3}{2^3}\cdot\frac{1}{3!}\cdot\left(x^3-\frac{{}_3C_2}{5}\cdot\gamma^2\cdot x\right)$$

$${}_0Le_3(x)^{(1)}=\frac{{}_6P_3}{2^3}\cdot\frac{1}{2!}\cdot\left(x^2-\frac{{}_2C_2}{5}\cdot\gamma^2\right),\quad {}_0Le_3(x)^{(2)}=\frac{{}_6P_3}{2^3}\cdot\frac{1}{1!}\cdot x,\quad {}_0Le_3(x)^{(3)}=\frac{{}_6P_3}{2^3}\cdot\frac{1}{0!}$$

$${}_0Le_4(x)=\frac{{}_8P_4}{2^4}\cdot\frac{1}{4!}\cdot\left(x^4-\frac{{}_4C_2}{7}\cdot\gamma^2\cdot x^2+\frac{3\cdot{}_4C_4}{5\cdot 7}\cdot\gamma^4\right)$$

$${}_0Le_4(x)^{(1)}=\frac{{}_8P_4}{2^4}\cdot\frac{1}{3!}\cdot\left(x^3-\frac{{}_3C_2}{7}\cdot\gamma^2\cdot x\right)$$

$${}_0Le_4(x)^{(2)}=\frac{{}_8P_4}{2^4}\cdot\frac{1}{2!}\cdot\left(x^2-\frac{{}_2C_2}{7}\cdot\gamma^2\right),\quad {}_0Le_4(x)^{(3)}=\frac{{}_8P_4}{2^4}\cdot\frac{1}{1!}\cdot x,\quad {}_0Le_4(x)^{(4)}=\frac{{}_8P_4}{2^4}\cdot\frac{1}{0!}$$

$${}_0Le_5(x)=\frac{{}_{10}P_5}{2^5}\cdot\frac{1}{5!}\cdot\left(x^5-\frac{{}_5C_2}{9}\cdot\gamma^2\cdot x^3+\frac{{}_5C_4}{3.7}\cdot\gamma^4\cdot x\right)$$

$${}_0Le_5(x)^{(1)}=\frac{{}_{10}P_5}{2^5}\cdot\frac{1}{4!}\cdot\left(x^4-\frac{{}_4C_2}{9}\cdot\gamma^2\cdot x^2+\frac{{}_4C_4}{3.7}\cdot\gamma^4\right),\quad {}_0Le_5(x)^{(2)}=\frac{{}_{10}P_5}{2^5}\cdot\frac{1}{3!}\cdot\left(x^3-\frac{{}_3C_2}{9}\cdot\gamma^2\cdot x\right)$$

$${}_0Le_5(x)^{(3)}=\frac{{}_{10}P_5}{2^5}\cdot\frac{1}{2!}\cdot\left(x^2-\frac{{}_2C_2}{9}\cdot\gamma^2\right),\quad {}_0Le_5(x)^{(4)}=\frac{{}_{10}P_5}{2^5}\cdot\frac{1}{1!}\cdot x,\quad {}_0Le_5(x)^{(5)}=\frac{{}_{10}P_5}{2^5}\cdot\frac{1}{0!}$$

$${}_0Le_6(x)=\frac{{}_{12}P_6}{2^6}\cdot\frac{1}{6!}\cdot\left(x^6-\frac{{}_6C_2}{11}\cdot\gamma^2\cdot x^4+\frac{{}_6C_4}{3\cdot 11}\cdot\gamma^4\cdot x^2-\frac{5\cdot{}_6C_6}{3\cdot 7\cdot 11}\cdot\gamma^6\right)$$

$${}_0Le_6(x)^{(1)}=\frac{{}_{12}P_6}{2^6}\cdot\frac{1}{5!}\cdot\left(x^5-\frac{{}_5C_2}{11}\cdot\gamma^2\cdot x^3+\frac{{}_5C_4}{3\cdot 11}\cdot\gamma^4\cdot x\right)$$

$${}_0Le_6(x)^{(2)}=\frac{{}_{12}P_6}{2^6}\cdot\frac{1}{4!}\cdot\left(x^4-\frac{{}_4C_2}{11}\cdot\gamma^2\cdot x^2+\frac{{}_4C_4}{3\cdot 11}\cdot\gamma^4\right),\quad {}_0Le_6(x)^{(3)}=\frac{{}_{12}P_6}{2^6}\cdot\frac{1}{3!}\cdot\left(x^3-\frac{{}_3C_2}{11}\cdot\gamma^2\cdot x\right)$$

$${}_0Le_6(x)^{(4)}=\frac{{}_{12}P_6}{2^6}\cdot\frac{1}{2!}\cdot\left(x^2-\frac{{}_2C_2}{11}\cdot\gamma^2\right),\quad {}_0Le_6(x)^{(5)}=\frac{{}_{12}P_6}{2^6}\cdot\frac{1}{1!}\cdot x,\quad {}_0Le_6(x)^{(6)}=\frac{{}_{12}P_6}{2^6}\cdot\frac{1}{0!}$$

$${}_0Le_7(x) \quad = \frac{{}_{14}P_7}{2^7}\cdot\frac{1}{7!}\cdot(\,x^7 - \frac{{}_7C_2}{13}\cdot\gamma^2\cdot x^5 + \frac{3\cdot{}_7C_4}{11\cdot 13}\cdot\gamma^4\cdot x^3 - \frac{5\cdot{}_7C_6}{3\cdot 11\cdot 13}\cdot\gamma^6\cdot x)$$

$${}_0Le_7(x)^{(1)} = \frac{{}_{14}P_7}{2^7}\cdot\frac{1}{6!}\cdot(\,x^6 - \frac{{}_6C_2}{13}\cdot\gamma^2\cdot x^4 + \frac{3\cdot{}_6C_4}{11\cdot 13}\cdot\gamma^4\cdot x^2 - \frac{5\cdot{}_6C_6}{3\cdot 11\cdot 13}\cdot\gamma^6)$$

$${}_0Le_7(x)^{(2)} = \frac{{}_{14}P_7}{2^7}\cdot\frac{1}{5!}\cdot(\,x^5 - \frac{{}_5C_2}{13}\cdot\gamma^2\cdot x^3 + \frac{3\cdot{}_5C_4}{11\cdot 13}\cdot\gamma^4\cdot x)$$

$${}_0Le_7(x)^{(3)} = \frac{{}_{14}P_7}{2^7}\cdot\frac{1}{4!}\cdot(\,x^4 - \frac{{}_4C_2}{13}\cdot\gamma^2\cdot x^2 + \frac{3\cdot{}_4C_4}{11\cdot 13}\cdot\gamma^4)\ ,\quad {}_0Le_7(x)^{(4)} = \frac{{}_{14}P_7}{2^7}\cdot\frac{1}{3!}\cdot(\,x^3 - \frac{{}_3C_2}{13}\cdot\gamma^2\cdot x)$$

$${}_0Le_7(x)^{(5)} = \frac{{}_{14}P_7}{2^7}\cdot\frac{1}{2!}\cdot(\,x^2 - \frac{{}_2C_2}{13}\cdot\gamma^2)\ ,\quad {}_0Le_7(x)^{(6)} = \frac{{}_{14}P_7}{2^7}\cdot\frac{1}{1!}\cdot\ x\ ,\quad {}_0Le_7(x)^{(7)} = \frac{{}_{14}P_7}{2^7}\cdot\frac{1}{0!}$$

$${}_0Le_8(x) \quad = \frac{{}_{16}P_8}{2^8}\cdot\frac{1}{8!}\cdot(\,x^8 - \frac{{}_8C_2}{15}\cdot\gamma^2\cdot x^6 + \frac{{}_8C_4}{5\cdot 13}\cdot\gamma^4\cdot x^4 - \frac{{}_8C_6}{11\cdot 13}\cdot\gamma^6\cdot x^2 + \frac{7\cdot{}_8C_8}{9\cdot 11\cdot 13}\cdot\gamma^8)$$

$${}_0Le_8(x)^{(1)} = \frac{{}_{16}P_8}{2^8}\cdot\frac{1}{7!}\cdot(\,x^7 - \frac{{}_7C_2}{15}\cdot\gamma^2\cdot x^5 + \frac{{}_7C_4}{5\cdot 13}\cdot\gamma^4\cdot x^3 - \frac{{}_7C_6}{11\cdot 13}\cdot\gamma^6\cdot x)$$

$${}_0Le_8(x)^{(2)} = \frac{{}_{16}P_8}{2^8}\cdot\frac{1}{6!}\cdot(\,x^6 - \frac{{}_6C_2}{15}\cdot\gamma^2\cdot x^4 + \frac{{}_6C_4}{5\cdot 13}\cdot\gamma^4\cdot x^2 - \frac{{}_6C_6}{11\cdot 13}\cdot\gamma^6)$$

$${}_0Le_8(x)^{(3)} = \frac{{}_{16}P_8}{2^8}\cdot\frac{1}{5!}\cdot(\,x^5 - \frac{{}_5C_2}{15}\cdot\gamma^2\cdot x^3 + \frac{{}_5C_4}{5\cdot 13}\cdot\gamma^4\cdot x)$$

$${}_0Le_8(x)^{(4)} = \frac{{}_{16}P_8}{2^8}\cdot\frac{1}{4!}\cdot(\,x^4 - \frac{{}_4C_2}{15}\cdot\gamma^2\cdot x^2 + \frac{{}_4C_4}{5\cdot 13}\cdot\gamma^4)\ ,\quad {}_0Le_8(x)^{(5)} = \frac{{}_{16}P_8}{2^8}\cdot\frac{1}{3!}\cdot(\,x^3 - \frac{{}_3C_2}{15}\cdot\gamma^2\cdot x)$$

$${}_0Le_8(x)^{(6)} = \frac{{}_{16}P_8}{2^8}\cdot\frac{1}{2!}\cdot(\,x^2 - \frac{{}_2C_2}{15}\cdot\gamma^2)\ ,\quad {}_0Le_8(x)^{(7)} = \frac{{}_{16}P_8}{2^8}\cdot\frac{1}{1!}\cdot\ x\ ,\quad {}_0Le_8(x)^{(8)} = \frac{{}_{16}P_8}{2^8}\cdot\frac{1}{0!}$$

$${}_0Le_9(x) \quad = \frac{{}_{18}P_9}{2^9}\cdot\frac{1}{9!}\cdot(\,x^9 - \frac{{}_9C_2}{17}\cdot\gamma^2\cdot x^7 + \frac{{}_9C_4}{5\cdot 17}\cdot\gamma^4\cdot x^5 - \frac{{}_9C_6}{13\cdot 17}\cdot\gamma^6\cdot x^3 + \frac{7\cdot{}_9C_8}{11\cdot 13\cdot 17}\cdot\gamma^8\cdot x)$$

$${}_0Le_9(x)^{(1)} = \frac{{}_{18}P_9}{2^9}\cdot\frac{1}{8!}\cdot(\,x^8 - \frac{{}_8C_2}{17}\cdot\gamma^2\cdot x^6 + \frac{{}_8C_4}{5\cdot 17}\cdot\gamma^4\cdot x^4 - \frac{{}_8C_6}{13\cdot 17}\cdot\gamma^6\cdot x^2 + \frac{7\cdot{}_8C_8}{11\cdot 13\cdot 17}\cdot\gamma^8)$$

$${}_0Le_9(x)^{(2)} = \frac{{}_{18}P_9}{2^9}\cdot\frac{1}{7!}\cdot(\,x^7 - \frac{{}_7C_2}{17}\cdot\gamma^2\cdot x^5 + \frac{{}_7C_4}{5\cdot 17}\cdot\gamma^4\cdot x^3 - \frac{{}_7C_6}{13\cdot 17}\cdot\gamma^6\cdot x)$$

$${}_0Le_9(x)^{(3)} = \frac{{}_{18}P_9}{2^9}\cdot\frac{1}{6!}\cdot(\,x^6 - \frac{{}_6C_2}{17}\cdot\gamma^2\cdot x^4 + \frac{{}_6C_4}{5\cdot 17}\cdot\gamma^4\cdot x^2 - \frac{{}_6C_6}{13\cdot 17}\cdot\gamma^6)$$

$${}_0Le_9(x)^{(4)} = \frac{{}_{18}P_9}{2^9}\cdot\frac{1}{5!}\cdot(\,x^5 - \frac{{}_5C_2}{17}\cdot\gamma^2\cdot x^3 + \frac{{}_5C_4}{5\cdot 17}\cdot\gamma^4\cdot x)$$

$${}_0Le_9(x)^{(5)} = \frac{{}_{18}P_9}{2^9}\cdot\frac{1}{4!}\cdot(\,x^4 - \frac{{}_4C_2}{17}\cdot\gamma^2\cdot x^2 + \frac{{}_4C_4}{5\cdot 17}\cdot\gamma^4)\ ,\quad {}_0Le_9(x)^{(6)} = \frac{{}_{18}P_9}{2^9}\cdot\frac{1}{3!}\cdot(\,x^3 - \frac{{}_3C_2}{17}\cdot\gamma^2\cdot x)$$

$${}_0Le_9(x)^{(7)} = \frac{{}_{18}P_9}{2^9}\cdot\frac{1}{2!}\cdot(\,x^2 - \frac{{}_2C_2}{17}\cdot\gamma^2)\ ,\quad {}_0Le_9(x)^{(8)} = \frac{{}_{18}P_9}{2^9}\cdot\frac{1}{1!}\cdot\ x\ ,\quad {}_0Le_9(x)^{(9)} = \frac{{}_{18}P_9}{2^9}\cdot\frac{1}{0!}$$

$$ {}_0Le_{10}(x) = \frac{{}_{20}P_{10}}{2^{10}} \cdot \frac{1}{10!} \cdot \left(x^{10} - \frac{{}_{10}C_2}{19} \cdot \gamma^2 \cdot x^8 + \frac{3 \cdot {}_{10}C_4}{17 \cdot 19} \cdot \gamma^4 \cdot x^6 - \frac{{}_{10}C_6}{17 \cdot 19} \cdot \gamma^6 \cdot x^4 + \frac{7 \cdot {}_{10}C_8}{13 \cdot 17 \cdot 19} \cdot \gamma^8 \cdot x^2 - \frac{7 \cdot 9 \cdot {}_{10}C_{10}}{11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19} \cdot \gamma^{10}\right) $$

$$ {}_0Le_{10}(x)^{(1)} = \frac{{}_{20}P_{10}}{2^{10}} \cdot \frac{1}{9!} \cdot \left(x^9 - \frac{{}_9C_2}{19} \cdot \gamma^2 \cdot x^7 + \frac{3 \cdot {}_9C_4}{17 \cdot 19} \cdot \gamma^4 \cdot x^5 - \frac{{}_9C_6}{17 \cdot 19} \cdot \gamma^6 \cdot x^3 + \frac{7 \cdot {}_9C_8}{13 \cdot 17 \cdot 19} \cdot \gamma^8 \cdot x\right) $$

$$ {}_0Le_{10}(x)^{(2)} = \frac{{}_{20}P_{10}}{2^{10}} \cdot \frac{1}{8!} \cdot \left(x^8 - \frac{{}_8C_2}{19} \cdot \gamma^2 \cdot x^6 + \frac{3 \cdot {}_8C_4}{17 \cdot 19} \cdot \gamma^4 \cdot x^4 - \frac{{}_8C_6}{17 \cdot 19} \cdot \gamma^6 \cdot x^2 + \frac{7 \cdot {}_8C_8}{13 \cdot 17 \cdot 19} \cdot \gamma^8\right) $$

$$ {}_0Le_{10}(x)^{(3)} = \frac{{}_{20}P_{10}}{2^{10}} \cdot \frac{1}{7!} \cdot \left(x^7 - \frac{{}_7C_2}{19} \cdot \gamma^2 \cdot x^5 + \frac{3 \cdot {}_7C_4}{17 \cdot 19} \cdot \gamma^4 \cdot x^3 - \frac{{}_7C_6}{17 \cdot 19} \cdot \gamma^6 \cdot x\right) $$

$$ {}_0Le_{10}(x)^{(4)} = \frac{{}_{20}P_{10}}{2^{10}} \cdot \frac{1}{6!} \cdot \left(x^6 - \frac{{}_6C_2}{19} \cdot \gamma^2 \cdot x^4 + \frac{3 \cdot {}_6C_4}{17 \cdot 19} \cdot \gamma^4 \cdot x^2 - \frac{{}_6C_6}{17 \cdot 19} \cdot \gamma^6\right) $$

$$ {}_0Le_{10}(x)^{(5)} = \frac{{}_{20}P_{10}}{2^{10}} \cdot \frac{1}{5!} \cdot \left(x^5 - \frac{{}_5C_2}{19} \cdot \gamma^2 \cdot x^3 + \frac{3 \cdot {}_5C_4}{17 \cdot 19} \cdot \gamma^4 \cdot x\right) $$

$$ {}_0Le_{10}(x)^{(6)} = \frac{{}_{20}P_{10}}{2^{10}} \cdot \frac{1}{4!} \cdot \left(x^4 - \frac{{}_4C_2}{19} \cdot \gamma^2 \cdot x^2 + \frac{3 \cdot {}_4C_4}{17 \cdot 19} \cdot \gamma^4\right), \quad {}_0Le_{10}(x)^{(7)} = \frac{{}_{20}P_{10}}{2^{10}} \cdot \frac{1}{3!} \cdot \left(x^3 - \frac{{}_3C_2}{19} \cdot \gamma^2 \cdot x\right) $$

$$ {}_0Le_{10}(x)^{(8)} = \frac{{}_{20}P_{10}}{2^{10}} \cdot \frac{1}{2!} \cdot \left(x^2 - \frac{{}_2C_2}{19} \cdot \gamma^2\right), \quad {}_0Le_{10}(x)^{(9)} = \frac{{}_{20}P_{10}}{2^{10}} \cdot \frac{1}{1!} \cdot x, \quad {}_0Le_{10}(x)^{(10)} = \frac{{}_{20}P_{10}}{2^{10}} \cdot \frac{1}{0!} $$

$$ {}_0Le_{11}(x) = \frac{{}_{22}P_{11}}{2^{11}} \cdot \frac{1}{11!} \cdot \left(x^{11} - \frac{{}_{11}C_2}{21} \cdot \gamma^2 \cdot x^9 + \frac{{}_{11}C_4}{7 \cdot 19} \cdot \gamma^4 \cdot x^7 - \frac{5 \cdot {}_{11}C_6}{7 \cdot 17 \cdot 19} \cdot \gamma^6 \cdot x^5 + \frac{{}_{11}C_8}{3 \cdot 17 \cdot 19} \cdot \gamma^8 \cdot x^3 - \frac{3 \cdot {}_{11}C_{10}}{13 \cdot 17 \cdot 19} \cdot \gamma^{10} \cdot x\right) $$

$$ {}_0Le_{11}(x)^{(1)} = \frac{{}_{22}P_{11}}{2^{11}} \cdot \frac{1}{10!} \cdot \left(x^{10} - \frac{{}_{10}C_2}{21} \cdot \gamma^2 \cdot x^8 + \frac{{}_{10}C_4}{7 \cdot 19} \cdot \gamma^4 \cdot x^6 - \frac{5 \cdot {}_{10}C_6}{7 \cdot 17 \cdot 19} \cdot \gamma^6 \cdot x^4 + \frac{{}_{10}C_8}{3 \cdot 17 \cdot 19} \cdot \gamma^8 \cdot x^2 - \frac{3 \cdot {}_{10}C_{10}}{13 \cdot 17 \cdot 19} \cdot \gamma^{10}\right) $$

$$ {}_0Le_{11}(x)^{(2)} = \frac{{}_{22}P_{11}}{2^{11}} \cdot \frac{1}{9!} \cdot \left(x^9 - \frac{{}_9C_2}{21} \cdot \gamma^2 \cdot x^7 + \frac{{}_9C_4}{7 \cdot 19} \cdot \gamma^4 \cdot x^5 - \frac{5 \cdot {}_9C_6}{7 \cdot 17 \cdot 19} \cdot \gamma^6 \cdot x^3 + \frac{{}_9C_8}{3 \cdot 17 \cdot 19} \cdot \gamma^8 \cdot x\right) $$

$$ {}_0Le_{11}(x)^{(3)} = \frac{{}_{22}P_{11}}{2^{11}} \cdot \frac{1}{8!} \cdot \left(x^8 - \frac{{}_8C_2}{21} \cdot \gamma^2 \cdot x^6 + \frac{{}_8C_4}{7 \cdot 19} \cdot \gamma^4 \cdot x^4 - \frac{5 \cdot {}_8C_6}{7 \cdot 17 \cdot 19} \cdot \gamma^6 \cdot x^2 + \frac{{}_8C_8}{3 \cdot 17 \cdot 19} \cdot \gamma^8\right) $$

$$ {}_0Le_{11}(x)^{(4)} = \frac{{}_{22}P_{11}}{2^{11}} \cdot \frac{1}{7!} \cdot \left(x^7 - \frac{{}_7C_2}{21} \cdot \gamma^2 \cdot x^5 + \frac{{}_7C_4}{7 \cdot 19} \cdot \gamma^4 \cdot x^3 - \frac{5 \cdot {}_7C_6}{7 \cdot 17 \cdot 19} \cdot \gamma^6 \cdot x\right) $$

$$ {}_0Le_{11}(x)^{(5)} = \frac{{}_{22}P_{11}}{2^{11}} \cdot \frac{1}{6!} \cdot \left(x^6 - \frac{{}_6C_2}{21} \cdot \gamma^2 \cdot x^4 + \frac{{}_6C_4}{7 \cdot 19} \cdot \gamma^4 \cdot x^2 - \frac{5 \cdot {}_6C_6}{7 \cdot 17 \cdot 19} \cdot \gamma^6\right) $$

$$ {}_0Le_{11}(x)^{(6)} = \frac{{}_{22}P_{11}}{2^{11}} \cdot \frac{1}{5!} \cdot \left(x^5 - \frac{{}_5C_2}{21} \cdot \gamma^2 \cdot x^3 + \frac{{}_5C_4}{7 \cdot 19} \cdot \gamma^4 \cdot x\right) $$

$${}_0Le_{11}(x)^{(7)} = \frac{{}_{22}P_{11}}{2^{11}}\cdot\frac{1}{4!}\cdot(\,x^4 - \frac{{}_4C_2}{21}\cdot\gamma^2\cdot x^2 + \frac{{}_4C_4}{7\cdot 19}\cdot\gamma^4\,)\;,\; {}_0Le_{11}(x)^{(8)} = \frac{{}_{22}P_{11}}{2^{11}}\cdot\frac{1}{3!}\cdot(\,x^3 - \frac{{}_3C_2}{21}\cdot\gamma^2\cdot x)$$

$${}_0Le_{11}(x)^{(9)} = \frac{{}_{22}P_{11}}{2^{11}}\cdot\frac{1}{2!}\cdot(\,x^2 - \frac{{}_2C_2}{21}\cdot\gamma^2)\;,\; {}_0Le_{11}(x)^{(10)} = \frac{{}_{22}P_{11}}{2^{11}}\cdot\frac{1}{1!}\cdot\,x\;,\; {}_0Le_{11}(x)^{(11)} = \frac{{}_{22}P_{11}}{2^{11}}\cdot\frac{1}{0!}$$

$$\begin{aligned}{}_0Le_{12}(x) \;&= \frac{{}_{24}P_{12}}{2^{12}}\cdot\frac{1}{12!}\cdot(\,x^{12} - \frac{{}_{12}C_2}{23}\cdot\gamma^2\cdot x^{10} + \frac{{}_{12}C_4}{7\cdot 23}\cdot\gamma^4\cdot x^8 - \frac{5\cdot{}_{12}C_6}{7\cdot 19\cdot 23}\cdot\gamma^6\cdot x^6\\ &\quad + \frac{5\cdot{}_{12}C_8}{17\cdot 19\cdot 23}\cdot\gamma^8\cdot x^4 - \frac{3\cdot{}_{12}C_{10}}{17\cdot 19\cdot\cdot 23}\cdot\gamma^{10}\cdot x^2 + \frac{3\cdot 11\cdot{}_{12}C_{12}}{13\cdot 17\cdot 19\cdot 23}\cdot\gamma^{12})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}{}_0Le_{12}(x)^{(1)} &= \frac{{}_{24}P_{12}}{2^{12}}\cdot\frac{1}{11!}\cdot(\,x^{11} - \frac{{}_{11}C_2}{23}\cdot\gamma^2\cdot x^9 + \frac{{}_{11}C_4}{7\cdot 23}\cdot\gamma^4\cdot x^7 - \frac{5\cdot{}_{11}C_6}{7\cdot 19\cdot 23}\cdot\gamma^6\cdot x^5\\ &\quad + \frac{5\cdot{}_{11}C_8}{17\cdot 19\cdot 23}\cdot\gamma^8\cdot x^3 - \frac{3\cdot{}_{11}C_{10}}{17\cdot 19\cdot\cdot 23}\cdot\gamma^{10}\cdot x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}{}_0Le_{12}(x)^{(2)} &= \frac{{}_{24}P_{12}}{2^{12}}\cdot\frac{1}{10!}\cdot(\,x^{10} - \frac{{}_{10}C_2}{23}\cdot\gamma^2\cdot x^8 + \frac{{}_{10}C_4}{7\cdot 23}\cdot\gamma^4\cdot x^6 - \frac{5\cdot{}_{10}C_6}{7\cdot 19\cdot 23}\cdot\gamma^6\cdot x^4\\ &\quad + \frac{5\cdot{}_{10}C_8}{17\cdot 19\cdot 23}\cdot\gamma^8\cdot x^2 - \frac{3\cdot{}_{10}C_{10}}{17\cdot 19\cdot\cdot 23}\cdot\gamma^{10})\end{aligned}$$

$${}_0Le_{12}(x)^{(3)} = \frac{{}_{24}P_{12}}{2^{12}}\cdot\frac{1}{9!}\cdot(\,x^9 - \frac{{}_9C_2}{23}\cdot\gamma^2\cdot x^7 + \frac{{}_9C_4}{7\cdot 23}\cdot\gamma^4\cdot x^5 - \frac{5\cdot{}_9C_6}{7\cdot 19\cdot 23}\cdot\gamma^6\cdot x^3 + \frac{5\cdot{}_9C_8}{17\cdot 19\cdot 23}\cdot\gamma^8\cdot x)$$

$${}_0Le_{12}(x)^{(4)} = \frac{{}_{24}P_{12}}{2^{12}}\cdot\frac{1}{8!}\cdot(\,x^8 - \frac{{}_8C_2}{23}\cdot\gamma^2\cdot x^6 + \frac{{}_8C_4}{7\cdot 23}\cdot\gamma^4\cdot x^4 - \frac{5\cdot{}_8C_6}{7\cdot 19\cdot 23}\cdot\gamma^6\cdot x^2 + \frac{5\cdot{}_8C_8}{17\cdot 19\cdot 23}\cdot\gamma^8)$$

$${}_0Le_{12}(x)^{(5)} = \frac{{}_{24}P_{12}}{2^{12}}\cdot\frac{1}{7!}\cdot(\,x^7 - \frac{{}_7C_2}{23}\cdot\gamma^2\cdot x^5 + \frac{{}_7C_4}{7\cdot 23}\cdot\gamma^4\cdot x^3 - \frac{5\cdot{}_7C_6}{7\cdot 19\cdot 23}\cdot\gamma^6\cdot x)$$

$${}_0Le_{12}(x)^{(6)} = \frac{{}_{24}P_{12}}{2^{12}}\cdot\frac{1}{6!}\cdot(\,x^6 - \frac{{}_6C_2}{23}\cdot\gamma^2\cdot x^4 + \frac{{}_6C_4}{7\cdot 23}\cdot\gamma^4\cdot x^2 - \frac{5\cdot{}_6C_6}{7\cdot 19\cdot 23}\cdot\gamma^6)$$

$${}_0Le_{12}(x)^{(7)} = \frac{{}_{24}P_{12}}{2^{12}}\cdot\frac{1}{5!}\cdot(\,x^5 - \frac{{}_5C_2}{23}\cdot\gamma^2\cdot x^3 + \frac{{}_5C_4}{7\cdot 23}\cdot\gamma^4\cdot x)$$

$${}_0Le_{12}(x)^{(8)} = \frac{{}_{24}P_{12}}{2^{12}}\cdot\frac{1}{4!}\cdot(\,x^4 - \frac{{}_4C_2}{23}\cdot\gamma^2\cdot x^2 + \frac{{}_4C_4}{7\cdot 23}\cdot\gamma^4)\;,\; {}_0Le_{12}(x)^{(9)} = \frac{{}_{24}P_{12}}{2^{12}}\cdot\frac{1}{3!}\cdot(\,x^3 - \frac{{}_3C_2}{23}\cdot\gamma^2\cdot x)$$

$${}_0Le_{12}(x)^{(10)} = \frac{{}_{24}P_{12}}{2^{12}}\cdot\frac{1}{2!}\cdot(\,x^2 - \frac{{}_2C_2}{23}\cdot\gamma^2)\;,\; {}_0Le_{12}(x)^{(11)} = \frac{{}_{24}P_{12}}{2^{12}}\cdot\frac{1}{1!}\cdot x\;,\; {}_0Le_{12}(x)^{(12)} = \frac{{}_{24}P_{12}}{2^{12}}\cdot\frac{1}{0!}$$

$$\begin{aligned}{}_0Le_{13}(x) \;&= \frac{{}_{26}P_{13}}{2^{13}}\cdot\frac{1}{13!}\cdot(\,x^{13} - \frac{{}_{13}C_2}{25}\cdot\gamma^2\cdot x^{11} + \frac{3\cdot{}_{13}C_4}{23\cdot 25}\cdot\gamma^4\cdot x^9 - \frac{{}_{13}C_6}{5\cdot 7\cdot 23}\cdot\gamma^6\cdot x^7\\ &\quad + \frac{{}_{13}C_8}{5\cdot 19\cdot 23}\cdot\gamma^8\cdot x^5 - \frac{9\cdot{}_{13}C_{10}}{5\cdot 17\cdot 19\cdot 23}\cdot\gamma^{10}\cdot x^3 + \frac{3\cdot 11\cdot{}_{13}C_{12}}{17\cdot 19\cdot 23\cdot 25}\cdot\gamma^{12}\cdot x\,)\end{aligned}$$

$${}_0Le_{13}(x)^{(1)} = \frac{{}_{26}P_{13}}{2^{13}}\cdot\frac{1}{12!}\cdot(\,x^{12} - \frac{{}_{12}C_2}{25}\cdot\gamma^2\cdot x^{10} + \frac{3\cdot{}_{12}C_4}{23\cdot 25}\cdot\gamma^4\cdot x^8 - \frac{{}_{12}C_6}{5\cdot 7\cdot 23}\cdot\gamma^6\cdot x^6$$

$$+\frac{{}_{12}C_8}{5\cdot 19\cdot 23}\cdot\gamma^8\cdot x^4-\frac{9\cdot{}_{12}C_{10}}{5\cdot 17\cdot 19\cdot 23}\cdot\gamma^{10}\cdot x^2+\frac{3\cdot 11\cdot{}_{12}C_{12}}{17\cdot 19\cdot 23\cdot 25}\cdot\gamma^{12})$$

$${}_0Le_{13}(x)^{(2)}=\frac{{}_{26}P_{13}}{2^{13}}\cdot\frac{1}{11!}\cdot(x^{11}-\frac{{}_{11}C_2}{25}\cdot\gamma^2\cdot x^9+\frac{3\cdot{}_{11}C_4}{23\cdot 25}\cdot\gamma^4\cdot x^7-\frac{{}_{11}C_6}{5\cdot 7\cdot 23}\cdot\gamma^6\cdot x^5$$

$$+\frac{{}_{11}C_8}{5\cdot 19\cdot 23}\cdot\gamma^8\cdot x^3-\frac{9\cdot{}_{11}C_{10}}{5\cdot 17\cdot 19\cdot 23}\cdot\gamma^{10}\cdot x)$$

$${}_0Le_{13}(x)^{(3)}=\frac{{}_{26}P_{13}}{2^{13}}\cdot\frac{1}{10!}\cdot(x^{10}-\frac{{}_{10}C_2}{25}\cdot\gamma^2\cdot x^8+\frac{3\cdot{}_{10}C_4}{23\cdot 25}\cdot\gamma^4\cdot x^6-\frac{{}_{10}C_6}{5\cdot 7\cdot 23}\cdot\gamma^6\cdot x^4$$

$$+\frac{{}_{10}C_8}{5\cdot 19\cdot 23}\cdot\gamma^8\cdot x^2-\frac{9\cdot{}_{10}C_{10}}{5\cdot 17\cdot 19\cdot 23}\cdot\gamma^{10})$$

$${}_0Le_{13}(x)^{(4)}=\frac{{}_{26}P_{13}}{2^{13}}\cdot\frac{1}{9!}\cdot(x^9-\frac{{}_9C_2}{25}\cdot\gamma^2\cdot x^7+\frac{3\cdot{}_9C_4}{23\cdot 25}\cdot\gamma^4\cdot x^5-\frac{{}_9C_6}{5\cdot 7\cdot 23}\cdot\gamma^6\cdot x^3+\frac{{}_9C_8}{5\cdot 19\cdot 23}\cdot\gamma^8\cdot x)$$

$${}_0Le_{13}(x)^{(5)}=\frac{{}_{26}P_{13}}{2^{13}}\cdot\frac{1}{8!}\cdot(x^8-\frac{{}_8C_2}{25}\cdot\gamma^2\cdot x^6+\frac{3\cdot{}_8C_4}{23\cdot 25}\cdot\gamma^4\cdot x^4-\frac{{}_8C_6}{5\cdot 7\cdot 23}\cdot\gamma^6\cdot x^2+\frac{{}_8C_8}{5\cdot 19\cdot 23}\cdot\gamma^8)$$

$${}_0Le_{13}(x)^{(6)}=\frac{{}_{26}P_{13}}{2^{13}}\cdot\frac{1}{7!}\cdot(x^7-\frac{{}_7C_2}{25}\cdot\gamma^2\cdot x^5+\frac{3\cdot{}_7C_4}{23\cdot 25}\cdot\gamma^4\cdot x^3-\frac{{}_7C_6}{5\cdot 7\cdot 23}\cdot\gamma^6\cdot x)$$

$${}_0Le_{13}(x)^{(7)}=\frac{{}_{26}P_{13}}{2^{13}}\cdot\frac{1}{6!}\cdot(x^6-\frac{{}_6C_2}{25}\cdot\gamma^2\cdot x^4+\frac{3\cdot{}_6C_4}{23\cdot 25}\cdot\gamma^4\cdot x^2-\frac{{}_6C_6}{5\cdot 7\cdot 23}\cdot\gamma^6)$$

$${}_0Le_{13}(x)^{(8)}=\frac{{}_{26}P_{13}}{2^{13}}\cdot\frac{1}{5!}\cdot(x^5-\frac{{}_5C_2}{25}\cdot\gamma^2\cdot x^3+\frac{3\cdot{}_5C_4}{23\cdot 25}\cdot\gamma^4\cdot x)$$

$${}_0Le_{13}(x)^{(9)}=\frac{{}_{26}P_{13}}{2^{13}}\cdot\frac{1}{4!}\cdot(x^4-\frac{{}_4C_2}{25}\cdot\gamma^2\cdot x^2+\frac{3\cdot{}_4C_4}{23\cdot 25}\cdot\gamma^4)\ ,\ {}_0Le_{13}(x)^{(10)}=\frac{{}_{26}P_{13}}{2^{13}}\cdot\frac{1}{3!}\cdot(x^3-\frac{{}_3C_2}{25}\cdot\gamma^2\cdot x)$$

$${}_0Le_{13}(x)^{(11)}=\frac{{}_{26}P_{13}}{2^{13}}\cdot\frac{1}{2!}\cdot(x^2-\frac{{}_2C_2}{25}\cdot\gamma^2)\ ,\ {}_0Le_{13}(x)^{(12)}=\frac{{}_{26}P_{13}}{2^{13}}\cdot\frac{1}{1!}\cdot x\ ,\ {}_0Le_{13}(x)^{(13)}=\frac{{}_{26}P_{13}}{2^{13}}\cdot\frac{1}{0!}$$

8. 総括

第一種のチェビシェフ多項式基本型 ${}_0T_N(x)$:

$${}_0T_N(x)=2^{N-1}\cdot[\,x^N+\sum_{k=1}\{\,(-1)^k\cdot{}_NC_{2k}\cdot\prod_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{2N-2j})\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-2k}\}]$$

第一種のチェビシェフ多項式基本型 ${}_0T_N(x)$ の微分方程式 :

$$(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot{}_0T_N(x)''-\frac{x}{\gamma^2}\cdot{}_0T_N(x)'+\frac{N^2}{\gamma^2}\cdot{}_0T_N(x)=0$$

第二種のチェビシェフ多項式基本型 ${}_0U_N(x)$:

$$ {}_0U_N(x) = 2^N \cdot [\, x^N + \sum_{k=1} \{ (-1)^k \cdot {}_NC_{2k} \cdot \prod_{j=1}^{k} (\frac{2j-1}{2N-2j+2}) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k} \}] $$

第二種のチェビシェフ多項式基本型 ${}_0U_N(x)$ の微分方程式 :

$$ (1-\frac{x^2}{\gamma^2}) \cdot {}_0U_N(x)'' - \frac{3x}{\gamma^2} \cdot {}_0U_N(x)' + \frac{N(N+2)}{\gamma^2} \cdot {}_0U_N(x) = 0 $$

チェビシェフ多項式基本型の漸化式 :

$$ {}_0T_N(x) = \frac{{}_0U_N(x) - \gamma^2 \cdot {}_0U_{N-2}(x)}{2} \qquad {}_0T_N(x)' = \frac{{}_0U_N(x)' - \gamma^2 \cdot {}_0U_{N-2}(x)'}{2} $$

$$ x \cdot {}_0T_{N-1}(x) = \frac{{}_0T_N(x) + \gamma^2 \cdot {}_0T_{N-2}(x)}{2} \qquad x \cdot {}_0U_{N-1}(x) = \frac{{}_0U_N(x) + \gamma^2 \cdot {}_0U_{N-2}(x)}{2} $$

$$ {}_0T_N(x)' = N \cdot {}_0U_{N-1}(x) $$

$$ x \cdot {}_0U_{N-1}(x) = {}_0T_N(x) + \gamma^2 \cdot {}_0U_{N-2}(x) \qquad {}_0T_N(x) = {}_0U_N(x) - x \cdot {}_0U_{N-1}(x) $$

$$ x \cdot {}_0T_N(x)' = N \cdot {}_0T_N(x) + N\,\gamma^2 \cdot {}_0U_{N-2}(x) \qquad x \cdot {}_0U_N(x)' = N \cdot {}_0U_N(x) + \gamma^2 \cdot {}_0U_{N-1}(x)' $$

$$ {}_0U_{N-1}(x)' = N \cdot {}_0U_{N-2}(x) + x \cdot {}_0U_{N-2}(x)' $$

$$ x \cdot {}_0U_N(x)' - N \cdot {}_0U_N(x) = \gamma^2 \cdot \{\, x \cdot {}_0U_{N-2}(x)' + N \cdot {}_0U_{N-2}(x) \} $$

第一種のルジャンドル多項式基本型 ${}_0P_N(x) = {}_0T_N(x) + {}_0R_N(x)$ ：

$$ {}_0P_N(x) = 2^{N-1} \cdot [\, x^N + \sum_{k=1} \{ (-1)^k \cdot {}_NC_{2k} \cdot \prod_{j=1}^{k} (\frac{2j-1}{2N-2j+1}) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k} \}] $$

第一種のルジャンドル多項式基本型 ${}_0P_N(x)$ の微分方程式：

$$ (1-\frac{x^2}{\gamma^2}) \cdot {}_0P_N(x)'' - \frac{2x}{\gamma^2} \cdot {}_0P_N(x)' + \frac{N(N+1)}{\gamma^2} \cdot {}_0P_N(x) = 0 $$

第二種のルジャンドル多項式基本型 ${}_0Q_N(x) = {}_0U_N(x) + {}_0S_N(x)$ ：

$$ {}_0Q_N(x) = 2^N \cdot [\, x^N + \sum_{k=1} \{(-1)^k \cdot {}_N C_{2k} \cdot \prod_{j=1}^{k} (\frac{2j-1}{2N-2j+1}) \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k}\}] $$

第二種のルジャンドル多項式基本型 ${}_0Q_N(x)$ の微分方程式：

$$ (1-\frac{x^2}{\gamma^2}) \cdot {}_0Q_N(x)'' - \frac{2x}{\gamma^2} \cdot {}_0Q_N(x)' + \frac{N(N+1)}{\gamma^2} \cdot {}_0Q_N(x) = 0 $$

第一種の基本型補助項 ${}_0R_N(x) = {}_0P_N(x) - {}_0T_N(x)$：

$$ {}_0R_N(x) = 2^{N-1} \cdot \sum_{k=1} [(-1)^k \cdot {}_N C_{2k} \cdot \{\prod_{j=1}^{k} (\frac{2j-1}{2N-2j+1}) - \prod_{j=1}^{k} (\frac{2j-1}{2N-2j})\} \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k}] $$

第二種の基本型補助項 ${}_0S_N(x) = {}_0Q_N(x) - {}_0U_N(x)$：

$$ {}_0S_N(x) = 2^N \cdot \sum_{k=1} [(-1)^k \cdot {}_N C_{2k} \cdot \{\prod_{j=1}^{k} (\frac{2j-1}{2N-2j+1}) - \prod_{j=1}^{k} (\frac{2j-1}{2N-2j+2})\} \cdot \gamma^{2k} \cdot x^{N-2k}] $$

第一種の基本型補助項 ${}_0R_N(x)$ のチェビシェフ多項式との関係式　：

$$ (1-\frac{x^2}{\gamma^2}) \cdot {}_0R_N(x)'' - \frac{2x}{\gamma^2} \cdot {}_0R_N(x)' + \frac{N(N+1)}{\gamma^2} \cdot {}_0R_N(x) = N \cdot {}_0U_{\boldsymbol{N}-2}(x) $$

第二種の基本型補助項 ${}_0S_N(x)$ のチェビシェフ多項式との関係式　：

$$ (1-\frac{x^2}{\gamma^2}) \cdot {}_0S_N(x)'' - \frac{2x}{\gamma^2} \cdot {}_0S_N(x)' + \frac{N(N+1)}{\gamma^2} \cdot {}_0S_N(x) = -\, {}_0U_{N-1}(x)' $$

${}_0R_N(x)$ と ${}_0S_N(x)$ の関係式　：

$$ 2 \cdot {}_0R_N(x) - {}_0S_N(x) = \gamma^2 \cdot {}_0U_{N-2}(x) $$

$$ (1-\frac{x^2}{\gamma^2}) \cdot {}_0R_N(x)'' - \frac{2x}{\gamma^2} \cdot {}_0R_N(x)' + \frac{N(N-1)}{\gamma^2} \cdot {}_0R_N(x) = -\frac{N}{\gamma^2} \cdot {}_0S_N(x) $$

$$(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_0S_N(x)'' - \frac{3x}{\gamma^2}\cdot {}_0S_N(x)' + \frac{N^2}{\gamma^2}\cdot {}_0S_N(x) = -\frac{2}{\gamma^2}\cdot\{x\cdot {}_0R_N(x)' + N\cdot {}_0R_N(x)\}$$

$$(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_0R_N(x)'' - \frac{4x}{\gamma^2}\cdot {}_0R_N(x)' + \frac{N(N-3)}{\gamma^2}\cdot {}_0R_N(x)$$
$$= (1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_0S_N(x)'' - \frac{3x}{\gamma^2}\cdot {}_0S_N(x)' + \frac{N(N-1)}{\gamma^2}\cdot {}_0S_N(x)$$

ルジャンドル多項式基本型　${}_0Le_N(x)$ ：　$\dfrac{(2N)!}{2^N\cdot(N!)^2} = \Gamma(N) = \prod_{j=1}^{N}(\dfrac{2j-1}{j})$

$${}_0Le_N(x) = \frac{{}_{2N}P_N}{2^N}\cdot\frac{1}{N!}\cdot[\,x^N + \sum_{k=1}\{(-1)^k\cdot {}_NC_{2k}\cdot\prod_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{2N-2j+1})\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-2k}\}]$$

ルジャンドル多項式基本型 ${}_0Le_N(x)$ の微分方程式：

$$(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_0Le_N(x)'' - \frac{2x}{\gamma^2}\cdot {}_0Le_N(x)' + \frac{N(N+1)}{\gamma^2}\cdot {}_0Le_N(x) = 0$$

${}_0P_N(x)$ と ${}_0Q_N(x)$ と ${}_0Le_N(x)$ の関係：

$${}_0Le_N(x) = \frac{(2N)!}{2^N\cdot(N!)^2}\cdot\frac{{}_0P_N(x)}{2^{N-1}} = \frac{(2N)!}{2^N\cdot(N!)^2}\cdot\frac{{}_0Q_N(x)}{2^N}$$
$$= \Gamma(N)\cdot\frac{{}_0P_N(x)}{2^{N-1}} = \Gamma(N)\cdot\frac{{}_0Q_N(x)}{2^N}$$
$$= \prod_{j=1}^{N}(\frac{2j-1}{j})\cdot\frac{{}_0P_N(x)}{2^{N-1}} = \prod_{j=1}^{N}(\frac{2j-1}{j})\cdot\frac{{}_0Q_N(x)}{2^N}$$

ルジャンドル多項式基本型 ${}_0Le_N(x)$ の漸化式　：

$$(N+1)\cdot {}_0Le_{N+1}(x) - (2N+1)\,x\cdot {}_0Le_N(x) + N\cdot\gamma^2\cdot {}_0Le_{N-1}(x) = 0$$

$N-m$ 次のルジャンドル陪多項式基本型　${}_0Le_N(x)^{(m)}$ ：

$${}_0Le_N(x)^{(m)} = \frac{{}_{2N}P_N}{2^N}\cdot\frac{1}{(N-m)!}\cdot[\,x^{N-m} + \sum_{k=1}\{(-1)^k\cdot {}_{N-m}C_{2k}\cdot\prod_{j=1}^{k}(\frac{2j-1}{2N-2j+1})\cdot\gamma^{2k}\cdot x^{N-2k-m}\}]$$

ルジャンドル陪多項式基本型 ${}_0Le_N(x)^{(m)}$ の漸化式：

$$(N+1-m)\cdot {}_0Le_{N+1}(x)^{(m)} - (2N+1)\cdot x\cdot {}_0Le_N(x)^{(m)} + (N+m)\cdot \gamma^2\cdot {}_0Le_{N-1}(x)^{(m)} = 0$$

$${}_0Le_{\boldsymbol{N}+1}(x)^{(m)} - \gamma^2\cdot {}_0Le_{\boldsymbol{N}-1}(x)^{(m)} = (2N+1)\cdot {}_0Le_N(x)^{(m-1)}$$

$${}_0Le_{\boldsymbol{N}+1}(x)^{(m)} - x\cdot {}_0Le_N(x)^{(m)} = (N+m)\cdot {}_0Le_{\boldsymbol{N}}(x)^{(m-1)}$$

$$x\cdot {}_0Le_{\boldsymbol{N}}(x)^{(m)} - \gamma^2\cdot {}_0Le_{N-1}(x)^{(m)} = (N+1-m)\cdot {}_0Le_N(x)^{(m-1)}$$

ルジャンドル同伴関数基本型　${}_0y_N^m(x)$：　${}_0y_N^m(x) = (\gamma^2 - x^2)^{\frac{m}{2}}\cdot {}_0Le_{\boldsymbol{N}}(x)^{(m)}$

ルジャンドル同伴関数基本型　${}_0y_N^m(x)$　の微分方程式　：

$$(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_0y_N^m(x)'' - \frac{2x}{\gamma^2}\cdot {}_0y_N^m(x)' + \{\frac{N(N+1)}{\gamma^2} - \frac{m^2}{\gamma^2 - x^2}\}\cdot {}_0y_N^m(x) = 0$$

ルジャンドル同伴関数基本型　${}_0y_N^m(x)$　の漸化式：

$$(N+1-m)\cdot {}_0y_{N+1}^m - (2N+1)\,x\cdot {}_0y_N^m + (N+m)\cdot \gamma^2\cdot {}_0y_{N-1}^m = 0$$

$${}_0y_N^{m+1}(x) - 2mx\cdot(\gamma^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot {}_0y_N^m(x) + \{N(N+1) - m(m-1)\}\cdot {}_0y_N^{m-1}(x) = 0$$

参考文献

手代木　琢磨、 勝間　豊：チェビシェフ多項式の基本型について、産業能率大学紀要、38（1），2017，PP 1-28