［研究ノート］

Sanno University Bulletin Vol. 39 No.1 September 2018

チェビシェフの微分方程式の別解

The Other Solutions of Chebyshev Differential Equation

手代木　琢磨
Takuma Teshirogi
勝間　豊
Yutaka Katuma

Abstract
In the previous paper, the differential equations of the fundamental style of Chebyshev polynomials were discussed. In this paper, other solutions of the differential equations which contain inverse trigonometric function are discussed.

1．序　論

手代木と勝間 [2017] において、第一種および第二種のチェビシェフ多項式基本型の微分方程式を定義し、その性質を議論した。本稿ではそれらの微分方程式の別の解を検討する。

2．チェビシェフ多項式とチェビシェフ多項式基本型

2．1 第一種のチェビシェフ多項式と第一種のチェビシェフ多項式基本型

すでに知られているように、$\cos N\theta = f(\cos\theta)$ の $\cos\theta$ を x と書き直した式 $T_N(x)$ が、第一種のチェビシェフ多項式で、$T_N(x)$ の各項に係数 γ を掛けて、係数 γ と x との積が N 次となるように誘導された多項式が第一種のチェビシェフ多項式基本型 ${}_0T_N(x)$ である。

例えば、 $\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$ から $T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$ で、

${}_0T_5(x) = 16x^5 - 20\gamma^2x^3 + 5\gamma^4x$ である。

2017年12月4日　受理

同様に、$\cos 6\theta = 32\cos^6\theta - 48\cos^4\theta + 18\cos^2\theta - 1$ から $T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$ で、

${}_0T_6(x) = 32x^6 - 48\gamma^2 x^4 + 18\gamma^4 x^2 - \gamma^6$ である。

２．２ 第二種のチェビシェフ多項式と第二種のチェビシェフ多項式基本型

すでに知られているように、$\sin(N+1)\theta = \sin\theta \cdot g(\cos\theta)$ の中 の $g(\cos\theta)$ の $\cos\theta$ を x と書き直した式 $U_N(x)$ が第二種のチェビシェフ多項式で、$U_N(x)$ の各項に係数 γ を掛けて、γ と x との積が N 次となるように誘導された多項式が第二種のチェビシェフ多項式基本型 ${}_0U_N(x)$ である。

例えば $\sin 6\theta = \sin\theta(32\cos^5\theta - 32\cos^3\theta + 6\cos\theta)$ から $U_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x$ で、

${}_0U_5(x) = 32x^5 - 32\gamma^2 x^3 + 6\gamma^4 x$ である。同様に

$\sin 7\theta = \sin\theta(64\cos^6\theta - 80\cos^4\theta + 24\cos^4\theta - 1)$ から $U_6(x) = 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1$で、

${}_0U_6(x) = 64x^6 - 80\gamma^2 x^4 + 24\gamma^4 x^2 - \gamma^6$ である。

３． チェビシェフ多項式基本型の微分方程式

３．１ 第一種のチェビシェフ多項式基本型の微分方程式

手代木と勝間 [2017] で述べたように、第一種のチェビシェフ多項式基本型 ${}_0T_N(x)$ の微分方程式は次式で表される。

$$\left(1 - \frac{x^2}{\gamma^2}\right) \cdot {}_0T_N(x)'' - \frac{x}{\gamma^2} \cdot {}_0T_N(x)' + \frac{N^2}{\gamma^2} \cdot {}_0T_N(x) = 0$$

３．２ 第二種のチェビシェフ多項式基本型の微分方程式

手代木と勝間 [2017] で述べたように、第二種のチェビシェフ多項式基本型 ${}_0U_N(x)$ の微分方程式は次式で表される。

$$(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_0U_N(x)''-\frac{3x}{\gamma^2}\cdot {}_0U_N(x)'+\frac{N(N+2)}{\gamma^2}\cdot {}_0U_N(x)=0$$

４． チェビシェフ多項式基本型の微分方程式の別解

４．１ 第一種のチェビシェフ多項式基本型の微分方程式の別解

まず新しい多項式基本型 ${}_0V_N(x)$ を ${}_0V_N(x)=(\gamma^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot {}_0U_{N-1}(x)$ と定義する。

この関数の一階微分、二階微分を求め、

$${}_0V_N(x)'=(\gamma^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\{(\gamma^2-x^2)\cdot {}_0U_{N-1}(x)'-x\cdot {}_0U_{N-1}(x)\}$$

$${}_0V_N(x)''=(\gamma^2-x^2)^{-\frac{3}{2}}\{(\gamma^2-x^2)^2\cdot {}_0U_{N-1}(x)''-2x\cdot(\gamma^2-x^2)\cdot {}_0U_{N-1}(x)'-\gamma^2\cdot {}_0U_{N-1}(x)\}$$

これらの値を第一種のチェビシェフ多項式の微分方程式に代入すると、次のようになる。

$$(\gamma^2-x^2)\cdot {}_0V_N(x)''-x\cdot {}_0V_N(x)'+N^2\cdot {}_0V_N(x)$$

$$=(\gamma^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot\{(\gamma^2-x^2)\cdot {}_0U_{N-1}(x)''-3x\cdot {}_0U_{N-1}(x)'+(N^2-1)\cdot {}_0U_{N-1}(x)\}=0$$

ただし最後の式の誘導のために ${}_0U_{N-1}(x)$ が第二種のチェビシェフ多項式の微分方程式、

$$(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_0U_{N-1}(x)''-\frac{3x}{\gamma^2}\cdot {}_0U_{N-1}(x)'+\frac{(N-1)(N+1)}{\gamma^2}\cdot {}_0U_{N-1}(x)=0$$

の解であることを利用した。 ここから、${}_0V_N(x)$ が第一種のチェビシェフ多項式の微分方程式の解になっていることが判明する。

N=1 から N=12 までの ${}_0V_N(x)$ は次のようになる。

$${}_0V_1(x)=(\gamma^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$${}_0V_2(x)=(\gamma^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x$$

$${}_0V_3(x)=(\gamma^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(4x^2-\gamma^2)$$

$${}_0V_4(x)=(\gamma^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(8x^3-4\gamma^2x)$$

$${}_0V_5(x)=(\gamma^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(16x^4-12\gamma^2x^2+\gamma^4)$$

$${}_0V_6(x)=(\gamma^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(32x^5-32\gamma^2x^3+6\gamma^4x)$$

$${}_0V_7(x)=(\gamma^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(64x^6-80\gamma^2x^4+24\gamma^4x^2-\gamma^6)$$

$${}_0V_8(x)=(\gamma^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(128x^7-192\gamma^2x^5+80\gamma^4x^3-8\gamma^6x)$$

$${}_0V_9(x)=(\gamma^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(256x^8-448\gamma^2x^6+240\gamma^4x^4-40\gamma^6x^2+\gamma^8)$$

$${}_0V_{10}(x)=(\gamma^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(512x^9-1024\gamma^2x^7+672\gamma^4x^5-160\gamma^6x^3+10\gamma^8x)$$

$${}_0V_{11}(x)=(\gamma^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(1024x^{10}-2304\gamma^2x^8+1792\gamma^4x^6-560\gamma^6x^4+60\gamma^8x^2-\gamma^{10})$$

$${}_0V_{12}(x)=(\gamma^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(2048x^{11}-5120\gamma^2x^9+4608\gamma^4x^7-1792\gamma^6x^5+280\gamma^8x^3-12\gamma^{10}x)$$

この　${}_0V_N(x)$　を　$x=\gamma\cdot\cos\theta$　とおいて整理すると、

$${}_0V_N(x)={}_0V_N(\gamma\cdot\cos\theta)=\gamma\cdot\sin\theta\cdot{}_0U_{N-1}(\gamma\cdot\cos\theta)=\gamma^N\cdot\sin(N\cdot\theta)=\gamma^N\cdot\sin(N\cdot\cos^{-1}\frac{x}{\gamma})$$

が得られる。ただし$(\gamma^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$　に$x=\gamma\cdot\cos\theta$　を代入する場合、正をとって$\gamma\cdot\sin\theta$　とした。

以下同様である。

そこで別の関数 $y_T = \cos(N \cdot \cos^{-1}\frac{x}{\gamma})$ も第一種のチェビシェフ多項式基本型の微分方程式の解となるかを検討する。$\cos^{-1}\frac{x}{\gamma} = t$ とおくと、$y_T = \cos(N \cdot t)$, $x = \gamma \cdot \cos t$ となるので、

$$y_T' = \frac{dy_T}{dx} = \frac{dy_T}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{N}{\gamma} \cdot \frac{\sin(N \cdot t)}{\sin t}$$ である。この式をもう一度微分して次式を得る。

$$y_T'' = \frac{d}{dx}(\frac{dy_T}{dx}) = \frac{d}{dt}(\frac{dy_T}{dx}) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\{\frac{N}{\gamma} \cdot \frac{\sin(N \cdot t)}{\sin t}\} \cdot (-\frac{1}{\gamma \cdot \sin t})$$

$$= \frac{N}{\gamma^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 t} \cdot \{-N \cdot \cos(N \cdot t) + \frac{\sin(N \cdot t) \cdot \cos t}{\sin t}\} = -\frac{N^2}{\gamma^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 t} \cdot y_T + \frac{x}{\gamma^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 t} \cdot y_T'$$

さらに $\sin^2 t = 1 - \frac{x^2}{\gamma^2}$ を利用して、次式が得られる。

$$(1 - \frac{x^2}{\gamma^2}) \cdot y_T'' - \frac{x}{\gamma^2} \cdot y_T' + \frac{N^2}{\gamma^2} \cdot y_T = 0$$

上の式は第一種のチェビシェフ多項式基本型 ${}_0T_N(x)$ の微分方程式

$$(1 - \frac{x^2}{\gamma^2}) \cdot {}_0T_N(x)'' - \frac{x}{\gamma^2} \cdot {}_0T_N(x)' + \frac{N^2}{\gamma^2} \cdot {}_0T_N(x) = 0$$

の ${}_0T_N(x)$ の代わりに y_T を代入した式となっているので、y_T が第一種のチェビシェフ多項式基本型の微分方程式の解になっていることが解る。この $y_T = \cos(N \cdot \cos^{-1}\frac{x}{\gamma})$ は $\cos^{-1}\frac{x}{\gamma} = \theta$ とおくと $y_T = \cos(N \cdot \theta)$ となり、$y_T = \cos(N \cdot \cos^{-1}\frac{x}{\gamma}) = \cos(N \cdot \theta) = \frac{1}{\gamma^N} \cdot {}_0T_N(x)$ となる。

すなわち、y_T と ${}_0T_N(x)$ は係数が異なるだけで、本質的に同じ関数である。

前述したように、$_0V_N(x)=(\gamma^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot\ _0U_{N-1}(x)=\gamma^N\cdot\sin(N\cdot\cos^{-1}\frac{x}{\gamma})$ なので、

$$\{\ _0T_N(x)\}^2+\{\ _0V_N(x)\}^2=\{\ _0T_N(x)\}^2+(\gamma^2-x^2)\cdot\{\ _0U_{N-1}(x)\}^2=\gamma^{2N}$$ となる。

さらに次式が得られる。

$$_0T_N(x)\cdot\ _0V_N(x)=\gamma^{2N}\cdot\cos(N\cdot\cos^{-1}\frac{x}{\gamma})\cdot\sin(N\cdot\cos^{-1}\frac{x}{\gamma})=\gamma^{2N}\cdot\frac{\sin(2N\cdot\cos^{-1}\frac{x}{\gamma})}{2}=\frac{_0V_{2N}(x)}{2}$$

この式は次のようにも導入できる。

$$_0T_N(x)\cdot\ _0V_N(x)=\ _0T_N(x)\cdot(\gamma^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot\ _0U_{N-1}(x)=(\gamma^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{_0U_{2N-1}(x)}{2}=\frac{_0V_{2N}(x)}{2}$$

ただし最後の式の導入のために、手代木と勝間 [2017] で報告した、 $_0T_N(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{_0U_{2N-1}(x)}{_0U_{N-1}(x)}$ を利用した。

すなわち $_0T_N(x)$ と $_0V_N(x)$ だけでなく、その積である $_0T_N(x)\cdot\ _0V_N(x)$ もまた第一種のチェビシェフ多項式基本型の微分方程式の解となっている。

以上の結果を利用して $\gamma^N\cdot\cos(N\cdot\sin^{-1}\frac{x}{\gamma})=\ _0A_N(x)$ を検討する。

$$_0A_N(x)=\gamma^N\cdot\cos(N\cdot\sin^{-1}\frac{x}{\gamma})=\gamma^N\cdot\cos(\frac{N}{2}\cdot\pi-N\cdot\cos^{-1}\frac{x}{\gamma})$$

$$=\cos(\frac{N}{2}\cdot\pi)\cdot\ _0T_N(x)+\sin(\frac{N}{2}\cdot\pi)\cdot\ _0V_N(x)$$

同様に $\gamma^N\cdot\sin(N\cdot\sin^{-1}\frac{x}{\gamma})=\ _0B_N(x)$ を検討する。

$$_0B_N(x)=\gamma^N\cdot\sin(N\cdot\sin^{-1}\frac{x}{\gamma})=\gamma^N\cdot\sin(\frac{N}{2}\cdot\pi-N\cdot\cos^{-1}\frac{x}{\gamma})$$

$$=\sin(\frac{N}{2}\cdot\pi)\cdot\ _0T_N(x)-\cos(\frac{N}{2}\cdot\pi)\cdot\ _0V_N(x)$$

すなわち、${}_0A_N(x)$ や ${}_0B_N(x)$ も第一種のチェビシェフ多項式基本型の微分方程式の解となっているが、これらの関数は ${}_0T_N(x)$ や ${}_0V_N(x)$ と独立ではない。また次式が成立する。

$$\left\{ {}_0A_N(x) \right\}^2 + \left\{ {}_0B_N(x) \right\}^2 = \left\{ {}_0T_N(x) \right\}^2 + \left\{ {}_0V_N(x) \right\}^2 = \gamma^{2N}$$

N の値と ${}_0A_N(x)$ 、${}_0B_N(x)$ の結果を下にまとめる。

N	${}_0A_N(x) = \gamma^N \cdot \cos(N \cdot \sin^{-1}\dfrac{x}{\gamma})$	${}_0B_N(x) = \gamma^N \cdot \sin(N \cdot \sin^{-1}\dfrac{x}{\gamma})$
1	${}_0V_1(x)$	${}_0T_1(x)$
2	$-{}_0T_2(x)$	${}_0V_2(x)$
3	$-{}_0V_3(x)$	$-{}_0T_3(x)$
4	${}_0T_4(x)$	$-{}_0V_4(x)$
5	${}_0V_5(x)$	${}_0T_5(x)$
6	$-{}_0T_6(x)$	${}_0V_6(x)$
7	$-{}_0V_7(x)$	$-{}_0T_7(x)$
8	${}_0T_8(x)$	$-{}_0V_8(x)$
9	${}_0V_9(x)$	${}_0T_9(x)$
10	$-{}_0T_{10}(x)$	${}_0V_{10}(x)$

${}_0A_N(x)$ と ${}_0B_N(x)$ は正負の符号をつけた ${}_0T_N(x)$ や ${}_0V_N(x)$ で表され、さらにその積は ${}_0A_N(x) \cdot {}_0B_N(x) = \pm\, {}_0T_N(x) \cdot {}_0V_N(x) = \pm \dfrac{{}_0V_{2N}(x)}{2}$ となっていて、やはり第一種のチェビシェフ多項式基本型の微分方程式の解となっている。

４．２　第二種のチェビシェフ多項式基本型の微分方程式の別解

まず新しい多項式基本型 ${}_0W_N(x)$ を ${}_0W_N(x) = (\gamma^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot {}_0T_{N+1}(x)$ と定義する。

この関数の一階微分、二階微分を求め、

$$_{0}W_N(x)' = (\gamma^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}}\{(\gamma^2 - x^2)\cdot {}_{0}T_{N+1}(x)' + x\cdot {}_{0}T_{N+1}(x)\}$$

$$_{0}W_N(x)'' = (\gamma^2 - x^2)^{-\frac{5}{2}}\{(\gamma^2 - x^2)^2\cdot {}_{0}T_{N+1}(x)'' + 2x\cdot(\gamma^2 - x^2)\cdot {}_{0}T_{N+1}(x)' + (\gamma^2 + 2x^2)\cdot {}_{0}T_{N+1}(x)\}$$

これらの値を第二種のチェビシェフ多項式基本型の微分方程式に代入すると、次のようになる。

$$(\gamma^2 - x^2)\cdot {}_{0}W_N(x)'' - 3x\cdot {}_{0}W_N(x)' + N(N+2)\cdot {}_{0}W_N(x)$$

$$= (\gamma^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot\{(\gamma^2 - x^2)\cdot {}_{0}T_{N+1}(x)'' - x\cdot {}_{0}T_{N+1}(x) + (N+1)^2\cdot {}_{0}T_{N+1}(x)\} = 0$$

ただし ${}_{0}T_{N+1}(x)$ が第一種のチェビシェフ多項式基本型の微分方程式の解であることを利用した。

$$(1 - \frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_{0}T_{N+1}(x)'' - \frac{x}{\gamma^2}\cdot {}_{0}T_{N+1}(x)' + \frac{(N+1)^2}{\gamma^2}\cdot {}_{0}T_{N+1}(x) = 0$$

ここから ${}_{0}W_N(x)$ が第二種のチェビシェフ多項式基本型の微分方程式の解になることが解る。

${}_{0}W_N(x) = (\gamma^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot {}_{0}T_{N+1}(x)$ を下にまとめる。

$${}_{0}W_1(x) = (\gamma^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x^2 - \gamma^2)$$

$${}_{0}W_2(x) = (\gamma^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(4x^3 - 3\gamma^2 x)$$

$${}_{0}W_3(x) = (\gamma^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(8x^4 - 8\gamma^2 x^2 + \gamma^4)$$

$${}_{0}W_4(x) = (\gamma^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(16x^5 - 20\gamma^2 x^3 + 5\gamma^4 x)$$

$${}_{0}W_5(x) = (\gamma^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(32x^6 - 48\gamma^2 x^4 + 18\gamma^4 x^2 - \gamma^6)$$

$$ {}_{\mathbf{0}}W_6(x) = (\gamma^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (64x^7 - 112\gamma^2 x^5 + 56\gamma^4 x^3 - 7\gamma^6 x) $$

$$ {}_{\mathbf{0}}W_7(x) = (\gamma^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (128x^8 - 256\gamma^2 x^6 + 160\gamma^4 x^4 - 32\gamma^6 x^2 + \gamma^8) $$

$$ {}_{\mathbf{0}}W_8(x) = (\gamma^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (256x^9 - 576\gamma^2 x^7 + 432\gamma^4 x^5 - 120\gamma^6 x^3 + 9\gamma^8 x) $$

$$ {}_{\mathbf{0}}W_9(x) = (\gamma^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (512x^{10} - 1280\gamma^2 x^8 + 1120\gamma^4 x^6 - 400\gamma^6 x^4 + 50\gamma^8 x^2 - \gamma^{10}) $$

$$ {}_{\mathbf{0}}W_{10}(x) = (\gamma^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1024x^{11} - 2816\gamma^2 x^9 + 2816\gamma^4 x^7 - 1232\gamma^6 x^5 + 220\gamma^8 x^3 - 11\gamma^{10} x) $$

$$ {}_{\mathbf{0}}W_{11}(x) = (\gamma^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2048x^{12} - 6144\gamma^2 x^{10} + 6912\gamma^4 x^8 - 3584\gamma^6 x^6 + 840\gamma^8 x^4 - 72\gamma^{10} x^2 + \gamma^{12}) $$

$$ {}_{\mathbf{0}}W_{12}(x) = (\gamma^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (4096x^{13} - 13312\gamma^2 x^{11} + 16640\gamma^4 x^9 - 9984\gamma^6 x^8 + 2912\gamma^8 x^5 - 364\gamma^{10} x^3 + 13\gamma^{12} x) $$

この　${}_{\mathbf{0}}W_N(x)$　を　$x = \gamma \cdot \cos\theta$　とおいて整理すると、

$$ {}_{\mathbf{0}}W_N(x) = {}_{\mathbf{0}}W_N(\gamma\cos\theta) = \frac{{}_{\mathbf{0}}T_{N+1}(\gamma\cos\theta)}{\gamma \cdot \sin\theta} = \gamma^N \cdot \frac{\cos\{(N+1)\theta\}}{\sin\theta} = \gamma^N \cdot \frac{\cos\{(N+1)\cos^{-1}\frac{x}{\gamma}\}}{\sin(\cos^{-1}\frac{x}{\gamma})} $$

と書くことができる。そこで第二種のチェビシェフ多項式基本型の微分方程式のもう一つの解を

$$ y_U(x) = \frac{\sin\{(N+1)\cos^{-1}\frac{x}{\gamma}\}}{\sin(\cos^{-1}\frac{x}{\gamma})} $$ と仮定し検討する。

$\cos^{-1}\frac{x}{\gamma} = t$　とおくと、$y_U = \frac{\sin\{(N+1)t\}}{\sin t}$ となるので、まず一次微分は次式となる。

$$ y_U{}' = \frac{dy_U}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = (-\frac{1}{\gamma})[(N+1)\frac{\cos\{(N+1)t\}}{\sin^2 t} - \frac{\sin\{(N+1)t\} \cdot \cos t}{\sin^3 t}] $$

後に使用するために上の式を整理して次式を得る。

$$\frac{1}{\gamma}\cdot(N+1)\frac{\cos\{(N+1)t\}}{\sin^2 t}=-y_U'+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{\sin\{(N+1)t\}\cdot\cos t}{\sin^3 t}=-y_U'+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{\cos t}{\sin^2 t}\cdot y_U$$

さらに二次微分は次式となる。

$$y_U''=(\frac{1}{\gamma^2\sin^2 t})[-(N+1)^2\cdot\frac{\sin\{(N+1)t\}}{\sin t}-3\cdot(N+1)\cdot\frac{\cos\{(N+1)t\}\cdot\cos t}{\sin^2 t}$$

$$+\frac{\sin\{(N+1)t\}}{\sin t}+3\cdot\frac{\sin\{(N+1)t\}\cdot\cos^2 t}{\sin^3 t}\ ]$$

$$=(\frac{1}{\gamma^2\sin^2 t})[-N(N+2)\cdot y_U-3\cdot(N+1)\cdot\frac{\cos\{(N+1)t\}\cdot\cos t}{\sin^2 t}$$

$$+3\cdot\frac{\sin\{(N+1)t\}\cdot\cos^2 t}{\sin^3 t}\ ]$$

$$=(\frac{1}{\gamma^2\sin^2 t})[-N(N+2)\cdot y_U+3\gamma\cdot y_U'\cdot\cos t=(\frac{1}{\gamma^2\sin^2 t})[-N(N+2)\cdot y_U+3x\cdot y_U'\ ]$$

右辺を移項して整理すると次式が得られる。

$$\sin^2 t\cdot y_U''-\frac{3x}{\gamma^2}\cdot y_U'+\frac{N(N+2)}{\gamma^2}\cdot y_U=(1-\cos^2 t)\cdot y_U''-\frac{3x}{\gamma^2}\cdot y_U'+\frac{N(N+2)}{\gamma^2}\cdot y_U$$

$$=(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot y_U''-\frac{3x}{\gamma^2}\cdot y_U'+\frac{N(N+2)}{\gamma^2}\cdot y_U=0$$

以上の結果から y_U が第二種のチェビシェフ多項式の微分方程式の解になっていることが判明した。

さらに y_U に $\cos^{-1}\frac{x}{\gamma}=\theta$ を代入して整理すると

$$y_U(x)=\frac{\sin\{(N+1)\cos^{-1}\frac{x}{\gamma}\}}{\sin(\cos^{-1}\frac{x}{\gamma})}=\frac{\sin\{(N+1)\theta\}}{\sin\theta}=U_N(\cos\ \theta)=\frac{1}{\gamma^N}\cdot{}_0U_N(x)$$ となり、

結局 $_0U_N(x)=\gamma^N\cdot\dfrac{\sin\{(N+1)\cos^{-1}\frac{x}{\gamma}\}}{\sin(\cos^{-1}\frac{x}{\gamma})}$ となる。

すでに述べたように $_0W_N(x)=(\gamma^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot{}_0T_{N+1}(x)$ から

$$\{_0T_{N+1}(x)\}^2+(\gamma^2-x^2)\cdot\{_0U_N(x)\}^2=(\gamma^2-x^2)\cdot[\{_0W_N(x)\}^2+\{_0U_N(x)\}^2]=\gamma^{2(N+1)}$$

となり、この結果は次式からも誘導される。

$$\{_0W_N(x)\}^2+\{_0U_N(x)\}^2=[\gamma^N\cdot\frac{\cos\{(N+1)\cos^{-1}\frac{x}{\gamma}\}}{\sin(\cos^{-1}\frac{x}{\gamma})}]^2+[\gamma^N\cdot\frac{\sin\{(N+1)\cos^{-1}\frac{x}{\gamma}\}}{\sin(\cos^{-1}\frac{x}{\gamma})}]^2$$

$$=[\frac{\gamma^N}{\sin(\cos^{-1}\frac{x}{\gamma})}]^2=\frac{\gamma^{2N}}{(1-\frac{x^2}{\gamma^2})}=\frac{\gamma^{2(N+1)}}{(\gamma^2-x^2)}$$

また $_0V_N(x)=\gamma^N\cdot\sin(N\cos^{-1}\frac{x}{\gamma})$ を利用して、$_0V_{N+1}(x)\cdot{}_0W_N(x)$ を計算すると、

$$_0V_{N+1}(x)\cdot{}_0W_N(x)=\gamma^{2N+1}\cdot\frac{\sin\{2(N+1)\cos^{-1}\frac{x}{\gamma}\}}{2\sin(\cos^{-1}\frac{x}{\gamma})}=\frac{_0U_{2N+1}(x)}{2}$$

この式は $_0V_N(x)=(\gamma^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot{}_0U_{N-1}(x)$ と $_0W_N(x)=(\gamma^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot{}_0T_{N+1}(x)$ を利用して、

$_0V_{N+1}(x)\cdot{}_0W_N(x)={}_0U_N(x)\cdot{}_0T_{N+1}(x)=\dfrac{_0U_{2N+1}(x)}{2}$ としても導入できる。

このことから $_0U_N(x)$ 、$_0W_N(x)$ 、および $_0V_{N+1}(x)\cdot{}_0W_N(x)={}_0U_N(x)\cdot{}_0T_{N+1}(x)$ は

第二種のチェビシェフ多項式基本型の解となっている。

さらに、次の $_0C_N(x)$ も 第二種のチェビシェフ多項式基本型の微分方程式の解となっているが、

$$ {}_0C_N(x) = \gamma^N \cdot \frac{\sin\{(N+1)\sin^{-1}\frac{x}{\gamma}\}}{\cos(\sin^{-1}\frac{x}{\gamma})} = \sin(\frac{N+1}{2}\cdot\pi)\cdot {}_0W_N(x) - \cos(\frac{N+1}{2}\cdot\pi)\cdot {}_0U_N(x) $$

となり、同様に次の ${}_0D_N(x)$ も 第二種のチェビシェフ多項式基本型の微分方程式の解となっているが、

$$ {}_0D_N(x) = \gamma^N \cdot \frac{\cos\{(N+1)\sin^{-1}\frac{x}{\gamma}\}}{\cos(\sin^{-1}\frac{x}{\gamma})} = \cos(\frac{N+1}{2}\cdot\pi)\cdot {}_0W_N(x) + \sin(\frac{N+1}{2}\cdot\pi)\cdot {}_0U_N(x) $$

となるので、${}_0C_N(x)$ や ${}_0D_N(x)$ は ${}_0U_N(x)$ や ${}_0W_N(x)$ の関数になっている。

また次式が成立する。$\{{}_0C_N(x)\}^2 + \{{}_0D_N(x)\}^2 = \{{}_0W_N(x)\}^2 + \{{}_0U_N(x)\}^2 = \dfrac{\gamma^{2(N+1)}}{(\gamma^2 - x^2)}$

N の値と ${}_0C_N(x)$ 、${}_0D_N(x)$ の結果を下にまとめる。

N	${}_0C_N(x) = \gamma^N \cdot \dfrac{\sin\{(N+1)\sin^{-1}\frac{x}{\gamma}\}}{\cos(\sin^{-1}\frac{x}{\gamma})}$	${}_0D_N(x) = \gamma^N \cdot \dfrac{\cos\{(N+1)\sin^{-1}\frac{x}{\gamma}\}}{\cos(\sin^{-1}\frac{x}{\gamma})}$
1	${}_0U_1(x)$	$-{}_0W_1(x)$
2	$-{}_0W_2(x)$	$-{}_0U_2(x)$
3	$-{}_0U_3(x)$	${}_0W_3(x)$
4	${}_0W_4(x)$	${}_0U_4(x)$
5	${}_0U_5(x)$	$-{}_0W_5(x)$
6	$-{}_0W_6(x)$	$-{}_0U_6(x)$
7	$-{}_0U_7(x)$	${}_0W_7(x)$
8	${}_0W_8(x)$	${}_0U_8(x)$
9	${}_0U_9(x)$	$-{}_0W_9(x)$
10	$-{}_0W_{10}(x)$	$-{}_0U_{10}(x)$

${}_0C_N(x)$ と ${}_0D_N(x)$ は正負の符号をつけた ${}_0U_N(x)$ や ${}_0W_N(x)$ で表されることが解る。

４．３ 第二種のチェビシェフ多項式基本型に類似した関数の微分方程式

第二種のチェビシェフ多項式基本型の微分方程式の解を上に述べたが、その解に非常に良く似ている関数で、 しかも第二種のチェビシェフ多項式基本型の微分方程式の解とならない関数が存在することが解ったので、ここに詳述する。それらの関数を下にまとめる。

$$y_E = \frac{\cos\{(N+1)\cos^{-1}\frac{x}{\gamma}\}}{\cos(\cos^{-1}\frac{x}{\gamma})} \qquad y_F = \frac{\sin\{(N+1)\cos^{-1}\frac{x}{\gamma}\}}{\cos(\cos^{-1}\frac{x}{\gamma})}$$

$$y_G = \frac{\cos\{(N+1)\sin^{-1}\frac{x}{\gamma}\}}{\sin(\sin^{-1}\frac{x}{\gamma})} \qquad y_H = \frac{\sin\{(N+1)\sin^{-1}\frac{x}{\gamma}\}}{\sin(\sin^{-1}\frac{x}{\gamma})}$$

ただし、これらの関数は相互に関係づけられ、例えば y_G は次のようになり、

$$y_G = \frac{\cos\{(N+1)\sin^{-1}\frac{x}{\gamma}\}}{\sin(\sin^{-1}\frac{x}{\gamma})} = \frac{\cos\{\frac{N+1}{2}\cdot\pi-(N+1)\cos^{-1}\frac{x}{\gamma}\}}{\sin(\sin^{-1}\frac{x}{\gamma})}$$

$$= \cos(\frac{N+1}{2}\cdot\pi)\cdot y_E + \sin(\frac{N+1}{2}\cdot\pi)\cdot y_F$$

y_H は次のようになる。

$$y_H = \frac{\sin\{(N+1)\sin^{-1}\frac{x}{\gamma}\}}{\sin(\sin^{-1}\frac{x}{\gamma})} = \frac{\sin\{\frac{N+1}{2}\cdot\pi-(N+1)\cos^{-1}\frac{x}{\gamma}\}}{\sin(\sin^{-1}\frac{x}{\gamma})}$$

$$= \sin(\frac{N+1}{2}\cdot\pi)\cdot y_E - \cos(\frac{N+1}{2}\cdot\pi)\cdot y_F$$

以上から y_E と y_F の微分方程式を決定すればよい。

まず y_E であるが、すでに述べた ${}_{\mathbf{0}}T_N(x)=\gamma^N\cdot\cos(N\cdot\cos^{-1}\frac{x}{\gamma})$ と $\cos^{-1}\frac{x}{\gamma}=\theta$ を利用して、

$$y_E = \frac{\cos\{(N+1)\cos^{-1}\frac{x}{\gamma}\}}{\cos(\cos^{-1}\frac{x}{\gamma})} = \frac{{}_{\mathbf{0}}T_{N+1}(x)}{\gamma^{N+1}}\cdot\frac{\gamma}{x} = \frac{{}_{\mathbf{0}}T_{N+1}(x)}{\gamma^N}\cdot\frac{1}{x} \qquad \text{から}$$

${}_{\mathbf{0}}T_{N+1}(x)=\gamma^N\cdot x\cdot y_E = x\cdot{}_{\mathbf{0}}E_N(x)$ のような ${}_{\mathbf{0}}E_N(x)$ を考え、その微分方程式を検討する。

まず ${}_{\mathbf{0}}T_{N+1}(x)$ の一階微分、二階微分を求め、

$${}_{\mathbf{0}}T_{N+1}(x)' = x\cdot{}_{\mathbf{0}}E_N(x)' + {}_{\mathbf{0}}E_N(x) \qquad {}_{\mathbf{0}}T_{N+1}(x)'' = x\cdot{}_{\mathbf{0}}E_N(x)'' + 2\cdot{}_{\mathbf{0}}E_N(x)'$$

この結果を ${}_{\mathbf{0}}T_{N+1}(x)$ の微分方程式に代入する。

$$(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot{}_{\mathbf{0}}T_{N+1}(x)'' - \frac{x}{\gamma^2}\cdot{}_{\mathbf{0}}T_{N+1}(x)' + \frac{(N+1)^2}{\gamma^2}{}_{\mathbf{0}}T_{N+1}(x)$$

$$= x\cdot(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot{}_{\mathbf{0}}E_N(x)'' - (\frac{3x^2}{\gamma^2}-2)\cdot{}_{\mathbf{0}}E_N(x)' + \frac{N(N+2)}{\gamma^2}\cdot x\cdot{}_{\mathbf{0}}E_N(x) = 0$$

以上から $(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot{}_{\mathbf{0}}E_N(x)'' - (\frac{3x}{\gamma^2}-\frac{2}{x})\cdot{}_{\mathbf{0}}E_N(x)' + \frac{N(N+2)}{\gamma^2}\cdot{}_{\mathbf{0}}E_N(x) = 0$ となる。

この式を第三種のチェビシェフ多項式基本型の微分方程式と呼ぶことにする。

$N=1$ から $N=10$ までの $\ {}_{0}E_N(x)=\dfrac{{}_{0}T_{N+1}(x)}{x}$ は次のようになる。

$${}_{0}E_1(x)=2x-\frac{\gamma^2}{x}$$

$${}_{0}E_2(x)=4x^2-3\gamma^2$$

$${}_{0}E_3(x)=8x^3-8\gamma^2x+\frac{\gamma^4}{x}$$

$${}_{0}E_4(x)=16x^4-20\gamma^2x^2+5\gamma^4$$

$${}_{0}E_5(x)=32x^5-48\gamma^2x^3+18\gamma^4x-\frac{\gamma^6}{x}$$

$${}_{0}E_6(x)=64x^6-112\gamma^2x^4+56\gamma^4x^2-7\gamma^6$$

$${}_{0}E_7(x)=128x^7-256\gamma^2x^5+160\gamma^4x^3-32\gamma^6x+\frac{\gamma^8}{x}$$

$${}_{0}E_8(x)=256x^8-576\gamma^2x^6+432\gamma^4x^4-120\gamma^6x^2+9\gamma^8$$

$${}_{0}E_9(x)=512x^9-1280\gamma^2x^7+1120\gamma^4x^5-400\gamma^6x^3+50\gamma^8x-\frac{\gamma^{10}}{x}$$

$${}_{0}E_{10}(x)=1024x^{10}-2816\gamma^2x^8+2816\gamma^4x^6-1232\gamma^6x^4+220\gamma^8x^2-11\gamma^{10}$$

さらに y_F は直接微分して検討する。 $\cos^{-1}\dfrac{x}{\gamma}=t$ とおいてまず一回微分して次式が得られ、

$$y_F'=\frac{dy_F}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=(-\frac{1}{\gamma\sin t})[\,(N+1)\frac{\cos\{(N+1)t\}}{\cos t}+\frac{\sin\{(N+1)t\}\cdot\sin t}{\cos^2 t}\,]$$

$$=(-\frac{1}{\gamma})[\ \frac{1}{\cos t}\cdot(N+1)\cdot\frac{\cos\{(N+1)t\}}{\sin t}+\frac{1}{\cos t}\cdot y_F\,]$$

ここからまず $(N+1)\dfrac{\cos\{(N+1)t\}}{\sin t}=-\gamma\ \cos t\cdot y_F'-y_F=-x\cdot y_F'-y_F$ が得られる。

さらにもう一回微分して整理すると次式が得られる。

$$y_F'' = \left(\frac{1}{\gamma^2 \cdot \sin^2 t}\right)\left[-N(N+2)\cdot y_F + x\cdot y_F' - 2\cdot\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\cdot x\cdot y_F'\ \right]$$

$$= \left(\frac{1}{\gamma^2 \cdot \sin^2 t}\right)\left[-N(N+2)\cdot y_F + \left(3 - \frac{2}{\cos^2 t}\right)\cdot x\cdot y_F'\ \right]$$

この式に $\cos^2 t = \dfrac{x^2}{\gamma^2}$ と $\sin^2 t = 1 - \dfrac{x^2}{\gamma^2}$ を代入し整理して、次式が得られ

$$\gamma^2\cdot\left(1-\frac{x^2}{\gamma^2}\right)\cdot y_F'' = -N(N+2)\cdot y_F + \left(3x - \frac{2\gamma^2}{x}\right)\cdot y_F'$$

さらに整理して次式を得る。

$$\left(1-\frac{x^2}{\gamma^2}\right)\cdot y_F'' - \left(\frac{3x}{\gamma^2} - \frac{2}{x}\right)\cdot y_F' + \frac{N(N+2)}{\gamma^2}\cdot y_F = 0$$

この式はすでに述べた ${}_0E_N(x)$ の微分方程式と全く同じ式である。

そこで ${}_0U_N(x) = \gamma^N \cdot \dfrac{\sin\{(N+1)\cos^{-1}\frac{x}{\gamma}\}}{\sin(\cos^{-1}\frac{x}{\gamma})}$ と $\cos t = \dfrac{x}{\gamma}$ と $\sin t = \left(1-\dfrac{x^2}{\gamma^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ を利用して、

$${}_0F_N(x) = \gamma^N\cdot\frac{\sin\{(N+1)\cos^{-1}\frac{x}{\gamma}\}}{\cos(\cos^{-1}\frac{x}{\gamma})} = \frac{(\gamma^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot{}_0U_N(x)}{x} = \frac{{}_0V_{N+1}(x)}{x}$$

として ${}_0F_N(x)$ が第三種のチェビシェフ多項式基本型の微分方程式の解になっているかを、

${}_0V_{N+1}(x)$ を直接微分して検討する。まず ${}_0V_{N+1}(x)$ の一階微分、二階微分を求め、

$${}_0V_{N+1}(x)' = x\cdot{}_0F_N(x)' + {}_0F_N(x) \qquad {}_0V_{N+1}(x)'' = x\cdot{}_0F_N(x)'' + 2\cdot{}_0F_N(x)'$$

この結果を ${}_0V_{N+1}(x)$ の微分方程式に代入して次式が得られる。

$$(\gamma^2-x^2)\cdot{}_0V_{N+1}(x)'' - x\cdot{}_0V_{N+1}' + (N+1)^2\cdot{}_0V_{N+1}(x)$$

$$= x\cdot(\gamma^2-x^2)\cdot{}_0F_N(x)'' - (3x^2-2\gamma^2)\cdot{}_0F_N(x)' + N(N+2)\cdot x\cdot{}_0F_N(x) = 0$$

さらに整理して次の $F_N(x)$ の微分方程式が得られる。

$$(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_0F_N(x)''-(\frac{3x}{\gamma^2}-\frac{2}{x})\cdot {}_0F_N(x)'+\frac{N(N+2)}{\gamma^2}\cdot {}_0F_N(x)=0$$

この式は y_F を直接微分して得られた y_F の微分方程式と同じである。以上から ${}_0F_N(x)$ は

第三種のチェビシェフ多項式基本型の微分方程式の解となっている。

$N=1$ から N=10 までの ${}_{\mathbf{0}}F_N(x)$ は次のようになる。

$${}_{\mathbf{0}}F_1(x)=(\gamma^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2$$

$${}_{\mathbf{0}}F_2(x)=(\gamma^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(4x-\frac{\gamma^2}{x})$$

$${}_{\mathbf{0}}F_3(x)=(\gamma^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(8x^2-4\gamma^2)$$

$${}_{\mathbf{0}}F_4(x)=(\gamma^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(16x^3-12\gamma^2x+\frac{\gamma^4}{x})$$

$${}_{\mathbf{0}}F_5(x)=(\gamma^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(32x^4-32\gamma^2x^2+6\gamma^4)$$

$${}_{\mathbf{0}}F_6(x)=(\gamma^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(64x^5-80\gamma^2x^3+24\gamma^4x-\frac{\gamma^6}{x})$$

$${}_{\mathbf{0}}F_7(x)=(\gamma^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(128x^6-192\gamma^2x^4+80\gamma^4x^2-8\gamma^6)$$

$${}_{\mathbf{0}}F_8(x)=(\gamma^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(256x^7-448\gamma^2x^5+240\gamma^4x^3-40\gamma^6x+\frac{\gamma^8}{x})$$

$${}_{\mathbf{0}}F_9(x)=(\gamma^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(512x^8-1024\gamma^2x^6+672\gamma^4x^4-160\gamma^6x^2+10\gamma^8)$$

$${}_{\mathbf{0}}F_{10}(x)=(\gamma^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(1024x^9-2304\gamma^2x^7+1792\gamma^4x^5-560\gamma^6x^3+60\gamma^8x-\frac{\gamma^{10}}{x})$$

また　$_{0}E_N(x)=\dfrac{_{0}T_{N+1}(x)}{x}$　と　$_{0}F_N(x)=\dfrac{_{0}V_{N+1}(x)}{x}=\dfrac{(\gamma^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot{}_{0}U_N(x)}{x}$　とから、

$\{{}_{0}E_N(x)\}^2+\{{}_{0}F_N(x)\}^2=\{\dfrac{_{0}T_{N+1}(x)}{x}\}^2+\{\dfrac{(\gamma^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot{}_{0}U_N(x)}{x}\}^2=\dfrac{\gamma^{2(N+1)}}{x^2}$　が得られる。

この式は $_{0}E_N(x)$　と $_{0}F_N(x)$　とから直接計算しても得られる。

$$\{{}_{0}E_N(x)\}^2+\{{}_{0}F_N(x)\}^2=\gamma^{2N}\cdot\frac{1}{\{\cos(\cos^{-1}\frac{x}{\gamma})\}^2}=\frac{\gamma^{2(N+1)}}{x^2}$$

また $_{0}T_N(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{_{0}U_{2N-1}(x)}{_{0}U_{N-1}(x)}$　　$_{0}V_N(x)=(\gamma^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot{}_{0}U_{N-1}(x)$

$_{0}F_N(x)=\dfrac{_{0}V_{N+1}(x)}{x}=\dfrac{(\gamma^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot{}_{0}U_N(x)}{x}$　を利用して次の二式も得られる。

$$_{0}E_N(x)\cdot{}_{0}V_{N+1}(x)=\frac{_{0}T_{N+1}(x)}{x}\cdot(\gamma^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot{}_{0}U_N(x)=\frac{(\gamma^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot{}_{0}U_{2N+1}(x)}{2x}=\frac{_{0}F_{2N+1}(x)}{2}$$

$$_{0}T_{N+1}(x)\cdot{}_{0}F_N(x)={}_{0}T_{N+1}(x)\cdot\frac{(\gamma^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot{}_{0}U_N(x)}{x}=\frac{(\gamma^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot{}_{0}U_{2N+1}(x)}{2x}=\frac{_{0}F_{2N+1}(x)}{2}$$

ここから　$_{0}E_N(x)\cdot{}_{0}V_{N+1}(x)$　も　$_{0}T_{N+1}(x)\cdot{}_{0}F_N(x)$　も、第三種のチェビシェフ多項式基本型の微分方程式の解となっている。

さらに　y_G　や　y_H　からも同様に　$_{0}G_N(x)$　や　$_{0}H_N(x)$　を誘導する。

$$_{0}G_N(x)=\gamma^N\cdot\frac{\cos\{(N+1)\sin^{-1}\frac{x}{\gamma}\}}{\sin(\sin^{-1}\frac{x}{\gamma})}\qquad {}_{0}H_N(x)=\gamma^N\cdot\frac{\sin\{(N+1)\sin^{-1}\frac{x}{\gamma}\}}{\sin(\sin^{-1}\frac{x}{\gamma})}$$

これらの関数は $_{0}E_N(x)$　と　$_{0}F_N(x)$　と関係づけられ、例えば　$_{0}G_N(x)$　は次式となり、

$$ {}_0G_N(x) = \cos\left(\frac{N+1}{2}\cdot\pi\right)\cdot {}_0E_N(x) + \sin\left(\frac{N+1}{2}\cdot\pi\right)\cdot {}_0F_N(x) $$

${}_0H_N(x)$ は次式となる。

$$ {}_0H_N(x) = \sin\left(\frac{N+1}{2}\cdot\pi\right)\cdot {}_0E_N(x) - \cos\left(\frac{N+1}{2}\cdot\pi\right)\cdot {}_0F_N(x) $$

上の ${}_0G_N(x)$ と ${}_0H_N(x)$ の式を使って次の関係式を得る。

$$ \{{}_0G_N(x)\}^2 + \{{}_0H_N(x)\}^2 = \{{}_0E_N(x)\}^2 + \{{}_0F_N(x)\}^2 = \frac{\gamma^{2(N+1)}}{x^2} $$

この式は ${}_0G_N(x)$ と ${}_0H_N(x)$ とから直接計算しても得られる。

$$ \{{}_0G_N(x)\}^2 + \{{}_0H_N(x)\}^2 = \gamma^{2N}\cdot\frac{1}{\{\sin(\sin^{-1}\frac{x}{\gamma})\}^2} = \frac{\gamma^{2(N+1)}}{x^2} $$

N の値と ${}_0G_N(x)$ と ${}_0H_N(x)$ の結果を下にまとめる。

N	${}_0G_N(x) = \gamma^N\cdot\dfrac{\cos\{(N+1)\sin^{-1}\frac{x}{\gamma}\}}{\sin(\sin^{-1}\frac{x}{\gamma})}$	${}_0H_N(x) = \gamma^N\cdot\dfrac{\sin\{(N+1)\sin^{-1}\frac{x}{\gamma}\}}{\sin(\sin^{-1}\frac{x}{\gamma})}$
1	$-{}_0E_1(x)$	${}_0F_1(x)$
2	$-{}_0F_2(x)$	$-{}_0E_2(x)$
3	${}_0E_3(x)$	$-{}_0F_3(x)$
4	${}_0F_4(x)$	${}_0E_4(x)$
5	$-{}_0E_5(x)$	${}_0F_5(x)$
6	$-{}_0F_6(x)$	$-{}_0E_6(x)$
7	${}_0E_7(x)$	$-{}_0F_7(x)$
8	${}_0F_8(x)$	${}_0E_8(x)$
9	$-{}_0E_9(x)$	${}_0F_9(x)$
10	$-{}_0F_{10}(x)$	$-{}_0E_{10}(x)$

${}_0G_N(x)$ と ${}_0H_N(x)$ が正負の符号をつけた ${}_0E_N(x)$ や ${}_0F_N(x)$ で表されることが解る。

5. 総括

第一種のチェビシェフ多項式基本型 ${}_0T_N(x)$ の微分方程式　：

$$(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_0T_N(x)'' - \frac{x}{\gamma^2}\cdot {}_0T_N(x)' + \frac{N^2}{\gamma^2}\cdot {}_0T_N(x) = 0$$

第一種のチェビシェフ多項式基本型の微分方程式の解とその間の関係　：

$${}_0T_N(x) = \gamma^N \cdot \cos(N\cdot\cos^{-1}\frac{x}{\gamma})$$

$${}_0V_N(x) = \gamma^N \cdot \sin(N\cos^{-1}\frac{x}{\gamma}) = (\gamma^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot {}_0U_{N-1}(x)$$

$${}_0T_N(x)\cdot {}_0V_N(x) = \gamma^{2N}\cdot\frac{\sin(2N\cos^{-1}\frac{x}{\gamma})}{2} = (\gamma^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{{}_0U_{2N-1}(x)}{2} = \frac{{}_0V_{2N}(x)}{2}$$

$${}_0A_N(x) = \gamma^N \cdot \cos(N\cdot\sin^{-1}\frac{x}{\gamma})$$

$${}_0B_N(x) = \gamma^N \cdot \sin(N\cdot\sin^{-1}\frac{x}{\gamma})$$

$$\{{}_0T_N(x)\}^2 + \{{}_0V_N(x)\}^2 = \{{}_0A_N(x)\}^2 + \{{}_0B_N(x)\}^2 = \gamma^{2N}$$

第二種のチェビシェフ多項式基本型 ${}_0U_N(x)$ の微分方程式　：

$$(1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_0U_N(x)'' - \frac{3x}{\gamma^2}\cdot {}_0U_N(x)' + \frac{N(N+2)}{\gamma^2}\cdot {}_0U_N(x) = 0$$

第二種のチェビシェフ多項式基本型の微分方程式の解とその間の関係　：

$$ {}_0U_N(x) = \gamma^N \cdot \frac{\sin\{(N+1)\cos^{-1}\frac{x}{\gamma}\}}{\sin(\cos^{-1}\frac{x}{\gamma})} $$

$$ {}_0W_N(x) = \gamma^N \cdot \frac{\cos\{(N+1)\cos^{-1}\frac{x}{\gamma}\}}{\sin(\cos^{-1}\frac{x}{\gamma})} = \frac{{}_0T_{N+1}(x)}{(\gamma^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}} $$

$$ {}_0V_{N+1}(x) \cdot {}_0W_N(x) = {}_0T_{N+1}(x) \cdot {}_0U_N(x) = \gamma^{2N+1} \cdot \frac{\sin\{2(N+1)\cos^{-1}\frac{x}{\gamma}\}}{2\sin(\cos^{-1}\frac{x}{\gamma})} = \frac{{}_0U_{2N+1}(x)}{2} $$

$$ {}_0C_N(x) = \gamma^N \cdot \frac{\sin\{(N+1)\sin^{-1}\frac{x}{\gamma}\}}{\cos(\sin^{-1}\frac{x}{\gamma})} $$

$$ {}_0D_N(x) = \gamma^N \cdot \frac{\cos\{(N+1)\sin^{-1}\frac{x}{\gamma}\}}{\cos(\sin^{-1}\frac{x}{\gamma})} $$

$$ \{{}_0U_N(x)\}^2 + \{{}_0W_N(x)\}^2 = \{{}_0C_N(x)\}^2 + \{{}_0D_N(x)\}^2 = \frac{\gamma^{2(N+1)}}{(\gamma^2 - x^2)} $$

第三種のチェビシェフ多項式基本型の微分方程式　：

$$ (1 - \frac{x^2}{\gamma^2}) \cdot {}_0E_N(x)'' - (\frac{3x}{\gamma^2} - \frac{2}{x}) \cdot {}_0E_N(x)' + \frac{N(N+2)}{\gamma^2} \cdot {}_0E_N(x) = 0 $$

第三種のチェビシェフ多項式基本型の微分方程式の解とその間の関係　：

$$ {}_0E_N(x) = \gamma^N \cdot \frac{\cos\{(N+1)\cos^{-1}\frac{x}{\gamma}\}}{\cos(\cos^{-1}\frac{x}{\gamma})} = \frac{{}_0T_{N+1}(x)}{x} $$

$$ {}_0F_N(x) = \gamma^N \cdot \frac{\sin\{(N+1)\cos^{-1}\frac{x}{\gamma}\}}{\cos(\cos^{-1}\frac{x}{\gamma})} = \frac{{}_0V_{N+1}(x)}{x} = \frac{(\gamma^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot {}_0U_N(x)}{x} $$

$$ {}_0E_N(x) \cdot {}_0V_{N+1}(x) = {}_0T_{N+1}(x) \cdot {}_0F_N(x) = \frac{(\gamma^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot {}_0U_{2N+1}(x)}{2x} = \frac{{}_0F_{2N+1}(x)}{2} $$

$$ {}_0G_N(x) = \gamma^N \cdot \frac{\cos\{(N+1)\sin^{-1}\frac{x}{\gamma}\}}{\sin(\sin^{-1}\frac{x}{\gamma})} $$

$$ {}_0H_N(x) = \gamma^N \cdot \frac{\sin\{(N+1)\sin^{-1}\frac{x}{\gamma}\}}{\sin(\sin^{-1}\frac{x}{\gamma})} $$

$$ \{{}_0E_N(x)\}^2 + \{{}_0F_N(x)\}^2 = \{{}_0G_N(x)\}^2 + \{{}_0H_N(x)\}^2 = \frac{\gamma^{2(N+1)}}{x^2} $$

参考文献

手代木　琢磨、勝間　豊　：　チェビシェフ多項式の基本型について　、産業能率大学紀要、38(1), 2017,　pp.　1-28