

産業能率大学紀要

第38巻 第1号
2017年 9月

研究ノート

チェビシェフ多項式の基本型について

手代木琢磨
勝間 豊1

中小企業の生き残り戦略
－海外進出か国内残留か－

三村 孝雄29

メキシコの金融システム
－銀行部門の民営化と金融自由化の変遷－

木村 剛
柿原 智弘47



「産業能率大学紀要」執筆要項

産業能率大学紀要審査委員会

1. 投稿資格

次の条件を満たすものとする。

- (1) 産業能率大学情報マネジメント学部・経営学部および自由が丘産能短期大学の専任教員を原則とする。
- (2) 共著の場合には、少なくとも一名は、上記(1)の資格を有するものであること。
- (3) 本務校を持たない産業能率大学情報マネジメント学部・経営学部および自由が丘産能短期大学の兼任教員。
- (4) 上記(1)、(2)、(3)以外で、紀要審査委員会が適当と認めた者。

2. 原稿の種類

原稿は、邦文もしくは欧文の、他の刊行物に未発表のもので、論文、研究ノート、事例研究、資料、その他（書評、紹介、報告）のいずれかに該当するものに限る。

3. 原稿構成

原稿には、次のものを含むこと。

- (1) 邦文および欧文の表題。
- (2) 邦文および欧文で書かれた執筆者名と所属。
- (3) 論文と研究ノートの場合は150語程度の欧文抄録。

4. 原稿の量および投稿方法

- (1) 14,000字前後とする。
- (2) 欧文原稿の場合は、A 4判の用紙を用い、ダブルスペースで30枚以内を原則とする。
- (3) 完成原稿をメール添付にて事務局宛に送付する。手書きは不可。なお、セキュリティ上、パスワードを設定し、送信履歴を残す。

5. 表記

- (1) 原則として、常用漢字、現代かなづかいを用いる。
- (2) 表題の脚注
 - (a) 学会等に発表している場合には、「本論文は、学会名、講演会名、発表日、場所、において発表した。」というように注記する。
 - (b) 原稿受理日は、事務的に入れる。
- (3) 章、節などの記号
章の記号は、1. 2. ……、節の記号は、1. 1.、1. 2. ……、2. 1.、2. 2. ……のように付ける。
- (4) 脚注
 - (1)、(2)のように、注記の一連番号を参照箇所の右肩に書き、注記そのものは、本文の最後に一連番号を付けてまとめる。

(例)

……価格理論の一部として、取り扱われていることになり(1)…… (本文)

(1) 価格理論では、このことを特に「機能的分配の理論」と呼んでいる。(注記)

(5) 文献の引用

文章の一部に引用文献の著者名を含む場合は、著者名、続いて文献の発行年度を〔 〕で囲む(例1)

文章の外で文献を引用する場合は、著者名、発行年度を〔 〕で囲む(例2) 同一著者、同一年度の文献を複数個引用する場合は、発行年度の次に a, b, ……と一連の記号を付ける。

(例1) 文章中の引用

Minsky と Papert〔1969〕のパーセプトロンでは……岩尾〔1979a〕は、すでに述べた…

(例2) 文章の外の引用

関係完備制が証明された〔Codd 1971a〕

Example〔von Neumann and Morgenstern 1944〕

(6) 参考文献

本文中で引用した文献は、参考文献として著者名のアルファベット順にまとめる。書誌記述は、単行図書の場合は『著者名：書名、出版社、出版年、(その単行図書の一部を引用する場合には) ページ』の順に記述する。

(例1) 和書の場合

テイラー, F. W. 著 上野陽一訳編：科学的管理法、産業能率短期大学出版部、1969

(例2) 洋書の場合

Abliat,J.R. : Data Semantics, Proc.IFIP Working Conference on Data Base Management, North-Holland, 1974, pp.1-60

雑誌の場合は『執筆者名：表題、雑誌名、巻(号)、出版年、ページ』の順とする。

(例1) 和雑誌の場合

小田稔：マイクロ波の朝永理論、科学、49 (12), 1979, pp.795-798

(例2) 洋雑誌の場合

Kipp, E.M. : Twelve Guides to Effective Human Relations in R. & D., Research Management, 7(6), 1964, pp.419-428

(7) 図・表

図・表は、一枚の用紙に一つだけ書き、図・表のそれぞれに、図1 - 1 (Figure 1-1)、表1 - 1 (Table 1-1) のように一連番号を付け、タイトルを記入する。

6. 投稿期日

9月刊行の号は4月上旬、2月刊行の号は9月中旬を締め切りとする。ただし、投稿は随時受け付ける。

7. 投稿原稿の審査

原稿の採否は紀要審査委員会において決定する。採用された原稿について、加筆、修正が必要な場合は、一部の書き直しを要求する場合がある。また、表記などの統一のため、紀要審査委員会で一部改める場合もある。なお、原稿のテーマによっては紀要審査委員以外のものに原稿の査読を依頼することがある。

8. 執筆者校正

校正は執筆者の責任において行うこととする。(校正段階における加筆は、印刷の進行に支障を来すので、完全原稿を提出すること。)

9. 著作物の電子化と公開許諾

本誌に掲載された著作物の著作権は執筆者に帰属するが、次の件は了承される。

- (1) 執筆者は、掲載著作物の本文、抄録、キーワードに関して紀要審査委員会に「電子化公開許諾書」を提出し、著作物の電子化及び公開を許諾するものとする。共著の場合は、すべての執筆者の提出が必要である。
- (2) 上記により難しい場合は、紀要審査委員会に相談する。

10. 掲載論文の別刷

掲載された論文1編につき、本誌1部、別刷100部を無償で執筆者に贈呈する。別刷100部以上は有料とする。

(1991.6.5)

(1994.7.6改正)

(2003.1.7改正)

(2003.9.17改正)

(2013.4.29改正)

(2015.4.24改正)

チェビシェフ多項式の基本型について

The Report on Fundamental Style of Chebyshev Polynomials

手代木 琢磨

Takuma Teshirogi

勝間 豊

Yutaka Katuma

Abstract

In our previous paper, the secular equation of quantum chemistry was extended to the special determinants, and the determinants are related to the first and the second Chebyshev polynomials. In this paper, the fundamental style of Chebyshev polynomials are defined, and new functions derived from the fundamental style are discussed.

1. 序 論

前報（手代木&勝間2016）において、量子化学の単純ヒュッケル法で使われる永年方程式から誘導される二種類の行列式がチェビシェフの第一種および第二種の多項式と深く関係していることを報告した。現報では第一種および第二種チェビシェフ多項式基本型を定義し、この基本型から誘導されるいくつかの関数の性質を明らかにする。

2. チェビシェフ多項式基本型の定義

前報（手代木&勝間 2016）において、第一種の行列式 $|\mathbf{X}_N| = \prod_{k=1}^N \left(x - 2\sqrt{ab} \cdot \cos \frac{k}{N+1} \pi \right)$ は

$2\sqrt{ab} = 1$ とおけば、第二種のチェビシェフ多項式 $U_N(x)$ と

$U_N(x) = 2^N \cdot |\mathbf{U}_N| = 2^N \cdot \prod_{k=1}^N \left(x - \cos \frac{k}{N+1} \pi \right)$ なる関係があることを報告した。

チェビシェフ多項式の基本型について

また第一種のチェビシェフ多項式 $T_N(x)$ は $T_N(x) = 2^{N-1} \cdot \prod_{k=1}^N \left(x - \cos \frac{2k-1}{2N} \pi\right)$ となることも

報告した。そこで $2\sqrt{ab} = \gamma$ とおいた関数を第一種のチェビシェフ多項式基本型 ${}_0T_N(x)$ 、

および第二種のチェビシェフ多項式基本型 ${}_0U_N(x)$ と定義する。

$$\begin{cases} {}_0T_N(x) = 2^{N-1} \cdot \prod_{k=1}^N \left(x - \gamma \cos \frac{2k-1}{2N} \pi\right) & (N \geq 2) \\ {}_0U_N(x) = 2^N \cdot \prod_{k=1}^N \left(x - \gamma \cos \frac{k}{N+1} \pi\right) & (N \geq 2) \end{cases}$$

例えば第一種のチェビシェフ多項式基本型 ${}_0T_N(x)$ は次のようになる。ただし $\gamma \neq 0$ で、

この基本型の間には ${}_0T_{2N}(x) + \gamma^{2N} = 2 \{ {}_0T_N(x) \}^2$ の関係があり、 $\gamma^2 = -1$ でも成立する。

$$\begin{aligned} {}_0T_2(x) &= 2x^2 - \gamma^2 & {}_0T_3(x) &= 4x^3 - 3\gamma^2x \\ {}_0T_4(x) &= 8x^4 - 8\gamma^2x^2 + \gamma^4 & {}_0T_5(x) &= 16x^5 - 20\gamma^2x^3 + 5\gamma^4x \\ {}_0T_6(x) &= 32x^6 - 48\gamma^2x^4 + 18\gamma^4x^2 - \gamma^6 & {}_0T_7(x) &= 64x^7 - 112\gamma^2x^5 + 56\gamma^4x^3 - 7\gamma^6x \\ {}_0T_8(x) &= 128x^8 - 256\gamma^2x^6 + 160\gamma^4x^4 - 32\gamma^6x^2 + \gamma^8 \\ {}_0T_9(x) &= 256x^9 - 576\gamma^2x^7 + 432\gamma^4x^5 - 120\gamma^6x^3 + 9\gamma^8x \\ {}_0T_{10}(x) &= 512x^{10} - 1280\gamma^2x^8 + 1120\gamma^4x^6 - 400\gamma^6x^4 + 50\gamma^8x^2 - \gamma^{10} \\ {}_0T_{11}(x) &= 1024x^{11} - 2816\gamma^2x^9 + 2816\gamma^4x^7 - 1232\gamma^6x^5 + 220\gamma^8x^3 - 11\gamma^{10}x \\ {}_0T_{12}(x) &= 2048x^{12} - 6144\gamma^2x^{10} + 6912\gamma^4x^8 - 3584\gamma^6x^6 + 840\gamma^8x^4 - 72\gamma^{10}x^2 + \gamma^{12} \end{aligned}$$

また第二種のチェビシエフ多項式基本型 ${}_0U_N(x)$ は次のようになる。ただし $\gamma \neq 0$ である。

$$\begin{aligned} {}_0U_2(x) &= 4x^2 - \gamma^2 & {}_0U_3(x) &= 8x^3 - 4\gamma^2x \\ {}_0U_4(x) &= 16x^4 - 12\gamma^2x^2 + \gamma^4 & {}_0U_5(x) &= 32x^5 - 32\gamma^2x^3 + 6\gamma^4x \\ {}_0U_6(x) &= 64x^6 - 80\gamma^2x^4 + 24\gamma^4x^2 - \gamma^6 & {}_0U_7(x) &= 128x^7 - 192\gamma^2x^5 + 80\gamma^4x^3 - 8\gamma^6x \\ {}_0U_8(x) &= 256x^8 - 448\gamma^2x^6 + 240\gamma^4x^4 - 40\gamma^6x^2 + \gamma^8 \\ {}_0U_9(x) &= 512x^9 - 1024\gamma^2x^7 + 672\gamma^4x^5 - 160\gamma^6x^3 + 10\gamma^8x \\ {}_0U_{10}(x) &= 1024x^{10} - 2304\gamma^2x^8 + 1792\gamma^4x^6 - 560\gamma^6x^4 + 60\gamma^8x^2 - \gamma^{10} \\ {}_0U_{11}(x) &= 2048x^{11} - 5120\gamma^2x^9 + 4608\gamma^4x^7 - 1792\gamma^6x^5 + 280\gamma^8x^3 - 12\gamma^{10}x \\ {}_0U_{12}(x) &= 4096x^{12} - 11264\gamma^2x^{10} + 11520\gamma^4x^8 - 5376\gamma^6x^6 + 1120\gamma^8x^4 - 84\gamma^{10}x^2 + \gamma^{12} \end{aligned}$$

両関数の関係は ${}_0T_N(x) = \frac{{}_0U_N(x) - \gamma^2 \cdot {}_0U_{N-2}(x)}{2}$ 、 $\frac{d}{dx} [{}_0T_N(x)] = N \cdot {}_0U_{N-1}(x)$ および

$${}_0T_N(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{{}_0U_{2N-1}(x)}{{}_0U_{N-1}(x)} \text{ となる。また } \{ {}_0T_{N+1}(x) \}^2 + (\gamma^2 - x^2) \cdot \{ {}_0U_N(x) \}^2 = \gamma^{2(N+1)} \text{ を}$$

利用して $\{ {}_0T_{N+1}(x) \}^2 + (x^2 - \gamma^2) \cdot \{ {}_0U_N(x) \}^2 = {}_0T_{2N+2}(x)$ となり、 $\gamma^2 = -1$ でも成立する。

3. チェビシエフ多項式基本型の微分方程式

3. 1 第一種のチェビシエフ多項式基本型の微分方程式

第一種のチェビシエフ多項式の基本型は次のようになり、この関数の微分方程式を求める。

$${}_0T_N(x) = \frac{N}{2} \cdot \sum_{k=0} \left\{ (-\gamma^2)^k \cdot \frac{{}_{N-k}C_k}{N-k} \cdot (2x)^{N-2k} \right\} \quad (N-2k \geq 0)$$

第一種のチェビシエフ多項式基本型の一階微分および二階微分は次のようになる。

$$\begin{cases} {}_0T_N(x)' = N \cdot \sum_{k=0} \left\{ (-\gamma^2)^k \cdot {}_{N-1-k}C_k \cdot (2x)^{N-2k-1} \right\} & (N-2k-1 \geq 0) \\ {}_0T_N(x)'' = 2N \cdot \sum_{k=0} \left\{ (-\gamma^2)^k \cdot (k+1) \cdot {}_{N-1-k}C_{k+1} \cdot (2x)^{N-2k-2} \right\} & (N-2k-2 \geq 0) \end{cases}$$

チェビシェフ多項式の基本型について

この結果と第一種のチェビシェフ多項式の微分方程式の類推から、第一種のチェビシェフ多項式基本型

$${}_0T_N(x) = \frac{N}{2} \cdot \sum_{k=0} \left\{ (-\gamma^2)^k \cdot \frac{N-k}{N-k} \cdot C_k \cdot (2x)^{N-2k} \right\} = 2^{N-1} \cdot \prod_{k=1}^N \left(x - \gamma \cos \frac{2k-1}{2N} \pi \right) \quad \text{の微分方程式は}$$

$$\left(1 - \frac{x^2}{\gamma^2}\right) \cdot {}_0T_N(x)'' - \frac{x}{\gamma^2} \cdot {}_0T_N(x)' + \frac{N^2}{\gamma^2} \cdot {}_0T_N(x) = 0 \quad \text{となり } \gamma^2 = -1 \text{ でも成立する。}$$

3. 2 第二種のチェビシェフ多項式基本型の微分方程式

第二種のチェビシェフ多項式の基本型は次のようになり、この関数の微分方程式を求める。

$${}_0U_N(x) = \sum_{k=0} \left\{ (-\gamma^2)^k \cdot {}_{N-k}C_k \cdot (2x)^{N-2k} \right\} \quad (N-2k \geq 0)$$

第二種のチェビシェフ多項式基本型の一階微分および二階微分は次のようになる。

$$\begin{cases} {}_0U_N(x)' = 2 \cdot \sum_{k=0} \left\{ (-\gamma^2)^k \cdot (k+1) \cdot {}_{N-k}C_{k+1} \cdot (2x)^{N-2k-1} \right\} & (N-2k-1 \geq 0) \\ {}_0U_N(x)'' = 4 \cdot \sum_{k=0} \left\{ (-\gamma^2)^k \cdot (k+1)(k+2) \cdot {}_{N-k}C_{k+2} \cdot (2x)^{N-2k-2} \right\} & (N-2k-2 \geq 0) \end{cases}$$

この結果と第二種のチェビシェフ多項式の微分方程式の類推から、第二種のチェビシェフ多項式基本型

$${}_0U_N(x) = \sum_{k=0} \left\{ (-\gamma^2)^k \cdot {}_{N-k}C_k \cdot (2x)^{N-2k} \right\} = 2^N \cdot \prod_{k=1}^N \left(x - \gamma \cos \frac{k}{N+1} \pi \right) \quad \text{の微分方程式は}$$

$$\left(1 - \frac{x^2}{\gamma^2}\right) \cdot {}_0U_N(x)'' - \frac{3x}{\gamma^2} \cdot {}_0U_N(x)' + \frac{N(N+2)}{\gamma^2} \cdot {}_0U_N(x) = 0 \quad \text{となり、} \gamma^2 = -1 \text{ でも成立する。}$$

4. チェビシェフ多項式基本型拡張関数の微分方程式

4. 1 第一種のチェビシェフ多項式基本型拡張関数の微分方程式

偶数次の第一種のチェビシェフ多項式基本型、例えば ${}_0T_4(x) = 8x^4 - 8\gamma^2x^2 + \gamma^4$ の場合は

$${}_0T_4^{-1}(X) = X^4 - \frac{8}{\gamma^2}X^2 + \frac{8}{\gamma^4} \text{ を導入する。一般に } {}_0T_{2N}(x) = N \cdot \sum_{k=0}^N \left\{ (-\gamma^2)^k \cdot \frac{2N-k}{2N-k} \cdot C_k \cdot (2x)^{2(N-k)} \right\}$$

$$\text{から } {}_0T_{2N}^{-1}(X) = N \cdot \sum_{k=0}^N \left\{ \left(-\frac{4}{\gamma^2}\right)^k \cdot \frac{N+k}{N+k} \cdot C_{N-k} \cdot X^{2(N-k)} \right\} \quad \text{が得られる。}$$

この多項式の微分方程式を求める。 ${}_0T_{2N}(x) = (-\gamma^2)^N X^{-2N} \cdot {}_0T_{2N}^{-1}(X)$ であるが、係数を無視し、

${}_0T_{2N}(x) = X^{-2N} \cdot {}_0T_{2N}^{-1}(X)$ として計算する。 $x = \frac{1}{X}$ とおくと、 $\frac{dX}{dx} = -X^2$ となるので

$\frac{d}{dx} [{}_0T_{2N}(x)] = X^{-2N+1} \cdot \{2N \cdot {}_0T_{2N}^{-1}(X) - X \cdot {}_0T_{2N}^{-1}(X)'\}$ この式をもう一度微分して、

$\frac{d^2}{dx^2} [{}_0T_{2N}(x)] = X^{-2N+2} \{X^2 \cdot {}_0T_{2N}^{-1}(X)'' - 2(2N-1) \cdot X \cdot {}_0T_{2N}^{-1}(X)' + 2N(2N-1) \cdot {}_0T_{2N}^{-1}(X)\}$

これらの式を $(1 - \frac{x^2}{\gamma^2}) \cdot {}_0T_{2N}(x)'' - \frac{x}{\gamma^2} \cdot {}_0T_{2N}(x)' + \frac{4N^2}{\gamma^2} \cdot {}_0T_{2N}(x) = 0$ に代入して、

$$(X^2 - \frac{1}{\gamma^2}) \cdot {}_0T_{2N}^{-1}(X)'' - \left\{2(2N-1)X - \frac{4N-1}{\gamma^2} \cdot \frac{1}{X}\right\} \cdot {}_0T_{2N}^{-1}(X)' + 2N(2N-1) \cdot {}_0T_{2N}^{-1}(X) = 0$$

奇数次の第一種のチェビシエフ多項式基本型、例えば ${}_0T_5(x) = 16x^5 - 20\gamma^2x^3 + 5\gamma^4x$ の場合は、

$${}_0T_5^{-1}(X) = X^4 - \frac{4}{\gamma^2}X^2 + \frac{16}{5\gamma^4} \text{ で、一般に } {}_0T_{2N+1}(x) = \frac{2N+1}{2} \cdot \sum_{k=0}^N \left\{ (-\gamma^2)^k \cdot \frac{2N+1-k}{2N+1-k} C_k \cdot (2x)^{2(N-k)+1} \right\}$$

$$\text{から } {}_0T_{2N+1}^{-1}(X) = \sum_{k=0}^N \left\{ \left(-\frac{4}{\gamma^2}\right)^k \cdot \frac{N+k+1}{N+1+k} C_{N-k} \cdot X^{2(N-k)} \right\} \text{ が得られる。}$$

この多項式の微分方程式を求める。 ${}_0T_{2N+1}(x) = (-\gamma^2)^N (2N+1) \cdot X^{-2N-1} \cdot {}_0T_{2N+1}^{-1}(X)$ であるが、

係数を無視して ${}_0T_{2N+1}(x) = X^{-2N-1} \cdot {}_0T_{2N+1}^{-1}(X)$ として計算する。

$\frac{d}{dx} [{}_0T_{2N+1}(x)] = X^{-2N} \cdot \{(2N+1) \cdot {}_0T_{2N+1}^{-1}(X) - X \cdot {}_0T_{2N+1}^{-1}(X)'\}$

$\frac{d^2}{dx^2} [{}_0T_{2N+1}(x)] = X^{-2N+1} \{X^2 \cdot {}_0T_{2N+1}^{-1}(X)'' - 4N \cdot X \cdot {}_0T_{2N+1}^{-1}(X)' + 2N(2N+1) \cdot {}_0T_{2N+1}^{-1}(X)\}$

これらの式を $(1 - \frac{x^2}{\gamma^2}) \cdot {}_0T_{2N+1}(x)'' - \frac{x}{\gamma^2} \cdot {}_0T_{2N+1}(x)' + \frac{(2N+1)^2}{\gamma^2} \cdot {}_0T_{2N+1}(x) = 0$ に代入し、

$$(X^2 - \frac{1}{\gamma^2}) \cdot {}_0T_{2N+1}^{-1}(X)'' - \left(4N \cdot X - \frac{4N+1}{\gamma^2} \cdot \frac{1}{X}\right) \cdot {}_0T_{2N+1}^{-1}(X)' + 2N(2N+1) \cdot {}_0T_{2N+1}^{-1}(X) = 0$$

チェビシェフ多項式の基本型について

N が偶数でも奇数でも ${}_0 T_N^{-1}(X)$ は同じ微分方程式となるので、まず ${}_0 T_N^{-1}(X)$ を列挙する。

$${}_0 T_2^{-1}(X) = X^2 - \frac{1}{2\gamma^2}$$

$${}_0 T_3^{-1}(X) = X^2 - \frac{4}{3\gamma^2}$$

$${}_0 T_4^{-1}(X) = X^4 - \frac{8}{\gamma^2}X^2 + \frac{8}{\gamma^4}$$

$${}_0 T_5^{-1}(X) = X^4 - \frac{4}{\gamma^2}X^2 + \frac{16}{5\gamma^4}$$

$${}_0 T_6^{-1}(X) = X^6 - \frac{18}{\gamma^2}X^4 + \frac{48}{\gamma^4}X^2 - \frac{32}{\gamma^6}$$

$${}_0 T_7^{-1}(X) = X^6 - \frac{8}{\gamma^2}X^4 + \frac{16}{\gamma^4}X^2 - \frac{64}{7\gamma^6}$$

$${}_0 T_8^{-1}(X) = X^8 - \frac{32}{\gamma^2}X^6 + \frac{160}{\gamma^4}X^4 - \frac{256}{\gamma^6}X^2 + \frac{128}{\gamma^8}$$

$${}_0 T_9^{-1}(X) = X^8 - \frac{40}{3\gamma^2}X^6 + \frac{48}{\gamma^4}X^4 - \frac{64}{\gamma^6}X^2 + \frac{256}{9\gamma^8}$$

$${}_0 T_{10}^{-1}(X) = X^{10} - \frac{50}{\gamma^2}X^8 + \frac{400}{\gamma^4}X^6 - \frac{1120}{\gamma^6}X^4 + \frac{1280}{\gamma^8}X^2 - \frac{512}{\gamma^{10}}$$

$${}_0 T_{11}^{-1}(X) = X^{10} - \frac{20}{\gamma^2}X^8 + \frac{112}{\gamma^4}X^6 - \frac{256}{\gamma^6}X^4 + \frac{256}{\gamma^8}X^2 - \frac{1024}{11\gamma^{10}}$$

$${}_0 T_{12}^{-1}(X) = X^{12} - \frac{72}{\gamma^2}X^{10} + \frac{840}{\gamma^4}X^8 - \frac{3584}{\gamma^6}X^6 + \frac{6912}{\gamma^8}X^4 - \frac{6144}{\gamma^{10}}X^2 + \frac{2048}{\gamma^{12}}$$

この関数の微分方程式は次のようになる。この式は $\gamma^2 = -1$ でも成立する。

$$(X^2 - \frac{1}{\gamma^2}) \cdot {}_0 T_N^{-1}(X) - \left\{ 2(N-1) \cdot X - \frac{2N-1}{\gamma^2} \cdot \frac{1}{X} \right\} \cdot {}_0 T_N^{-1}(X) + N(N-1) \cdot {}_0 T_N^{-1}(X) = 0$$

この関数の因数分解は ${}_0 T_N^{-1}(X) = \prod_{k=1}^N \left(X - \frac{1}{\gamma \cos \frac{2k-1}{2N}\pi} \right) \quad (N \geq 2, k \neq \frac{N+1}{2})$ となる。

$$\text{また余弦の性質から } {}_0T_N^{-1}(X) = \prod_{k=1}^N \left(X^2 - \frac{1}{\gamma^2 \cos^2 \frac{2k-1}{2N}\pi} \right) = \prod_{k=1}^N \left(X^2 - \frac{1}{\gamma^2} - \frac{\tan^2 \frac{2k-1}{2N}\pi}{\gamma^2} \right)$$

となり、 ${}_0T_N^{-1}(X)$ の X^2 に $X^2 = Y^2 + \frac{1}{\gamma^2}$ を代入し、得られる関数 ${}_0V^{-1}(Y)$ を下にまとめる。

$${}_0V_2^{-1}(Y) = Y^2 - \frac{1}{\gamma^2}$$

$${}_0V_3^{-1}(Y) = Y^2 - \frac{1}{3\gamma^2}$$

$${}_0V_4^{-1}(Y) = Y^4 - \frac{6}{\gamma^2}Y^2 + \frac{1}{\gamma^4}$$

$${}_0V_5^{-1}(Y) = Y^4 - \frac{2}{\gamma^2}Y^2 + \frac{1}{5\gamma^4}$$

$${}_0V_6^{-1}(Y) = Y^6 - \frac{15}{\gamma^2}Y^4 + \frac{15}{\gamma^4}Y^2 - \frac{1}{\gamma^6}$$

$${}_0V_7^{-1}(Y) = Y^6 - \frac{5}{\gamma^2}Y^4 + \frac{3}{\gamma^4}Y^2 - \frac{1}{7\gamma^6}$$

$${}_0V_8^{-1}(Y) = Y^8 - \frac{28}{\gamma^2}Y^6 + \frac{70}{\gamma^4}Y^4 - \frac{28}{\gamma^6}Y^2 + \frac{1}{\gamma^8}$$

$${}_0V_9^{-1}(Y) = Y^8 - \frac{28}{3\gamma^2}Y^6 + \frac{14}{\gamma^4}Y^4 - \frac{4}{\gamma^6}Y^2 + \frac{1}{9\gamma^8}$$

$${}_0V_{10}^{-1}(Y) = Y^{10} - \frac{45}{\gamma^2}Y^8 + \frac{210}{\gamma^4}Y^6 - \frac{210}{\gamma^6}Y^4 + \frac{45}{\gamma^8}Y^2 - \frac{1}{\gamma^{10}}$$

$${}_0V_{11}^{-1}(Y) = Y^{10} - \frac{15}{\gamma^2}Y^8 + \frac{42}{\gamma^4}Y^6 - \frac{30}{\gamma^6}Y^4 + \frac{5}{\gamma^8}Y^2 - \frac{1}{11\gamma^{10}}$$

$${}_0V_{12}^{-1}(Y) = Y^{12} - \frac{66}{\gamma^2}Y^{10} + \frac{495}{\gamma^4}Y^8 - \frac{924}{\gamma^6}Y^6 + \frac{495}{\gamma^8}Y^4 - \frac{66}{\gamma^{10}}Y^2 + \frac{1}{\gamma^{12}}$$

一般にこれらの関数は次式で表される。

$$\left\{ \begin{array}{l} {}_0V_{2N}^{-1}(Y) = \sum_{k=0}^N \left\{ \left(-\frac{1}{\gamma^2}\right)^k \cdot {}_{2N}C_{2k} \cdot Y^{2(N-k)} \right\} = \prod_{k=1}^N \left(Y^2 - \frac{\tan^2 \frac{2k-1}{4N}\pi}{\gamma^2} \right) = \prod_{i=1}^{2N} \left(Y - \frac{\tan \frac{2i-1}{4N}\pi}{\gamma} \right) \\ {}_0V_{2N+1}^{-1}(Y) = \sum_{k=0}^N \left\{ \left(-\frac{1}{\gamma^2}\right)^k \cdot \frac{{}_{2N}C_{2k}}{2k+1} \cdot Y^{2(N-k)} \right\} = \prod_{k=1}^N \left(Y^2 - \frac{\tan^2 \frac{2k-1}{4N+2}\pi}{\gamma^2} \right) = \prod_{i=1}^{2N+1} \left(Y - \frac{\tan \frac{2i-1}{4N+2}\pi}{\gamma} \right) \end{array} \right.$$

チェビシェフ多項式の基本型について

ただし ${}_0V_{2N+1}^{-1}(Y)$ の場合は $i = N+1$ を除く。因みに次式が成立する。

$$\frac{d}{dY} [{}_0V_{2N+1}^{-1}(Y)] = \frac{d}{dY} \left[\sum_{k=0}^N \left\{ \left(-\frac{1}{\gamma^2}\right)^k \cdot \frac{{}_2NC_{2k}}{2k+1} \cdot Y^{2(N-k)} \right\} \right] = \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \left(-\frac{1}{\gamma^2}\right)^k \cdot {}_2NC_{2k+1} \cdot Y^{2(N-k)-1} \right\}$$

$$\text{ここから } \gamma^2 = -1 \text{ のとき } \frac{d}{dY} [{}_0V_{2N+1}^{-1}(Y)] + {}_0V_{2N}^{-1}(Y) = (Y+1)^{2N}$$

$$\text{この関数の微分方程式を求める。 } X^2 = Y^2 + \frac{1}{\gamma^2} \text{ から } \frac{dY}{dX} = \frac{\sqrt{\gamma^2 Y^2 + 1}}{\gamma Y}$$

$$\frac{d}{dX} [{}_0T_N^{-1}(X)] = \frac{d}{dY} [{}_0V_N^{-1}(Y)] \cdot \left(\frac{dY}{dX}\right) = \frac{\sqrt{\gamma^2 Y^2 + 1}}{\gamma Y} \cdot {}_0V_N^{-1}(Y)'$$

$$\frac{d^2}{dX^2} [{}_0T_N^{-1}(X)] = \frac{\gamma^2 Y^2 + 1}{\gamma^2 Y^2} \cdot {}_0V_N^{-1}(Y)'' - \frac{1}{\gamma^2 Y^3} \cdot {}_0V_N^{-1}(Y)'$$

これらの式を ${}_0T_N^{-1}(X)$ の微分方程式に代入して次式を得る。この式は $\gamma^2 = -1$ でも成立する。

$$\left(Y^2 + \frac{1}{\gamma^2}\right) \cdot {}_0V_N^{-1}(Y)'' - 2(N-1) \cdot Y \cdot {}_0V_N^{-1}(Y)' + N(N-1) \cdot {}_0V_N^{-1}(Y) = 0$$

一方 ${}_0T_N(x)$ の対数を取って微分して得られる関数 ${}_0F_N(x)$ の微分方程式を求める。

$${}_0T_N(x) = 2^{N-1} \cdot \prod_{k=1}^N \left(x - \gamma \cos \frac{2k-1}{2N} \pi\right) \text{ の対数を微分して次式が得られる。}$$

$$\ln \{ {}_0T_N(x) \} = \ln (2^{N-1}) + \sum_{k=1}^N \left\{ \ln \left(x - \gamma \cos \frac{2k-1}{2N} \pi \right) \right\}$$

$${}_0F_N(x) = \frac{{}_0T_N(x)'}{{}_0T_N(x)} = N \cdot \frac{{}_0U_{N-1}(x)}{{}_0T_N(x)} = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{x - \gamma \cos \frac{2k-1}{2N} \pi} \right)$$

$N = 2$ から $N = 12$ までの関数 ${}_0F_N(x)$ は次のようになる。

$${}_0F_N(x) = \frac{{}_0T_N(x)'}{{}_0T_N(x)} = N \cdot \frac{{}_0U_{N-1}(x)}{{}_0T_N(x)}$$

$${}_0F_2(x) = 2 \cdot \frac{2x}{2x^2 - \gamma^2}$$

$${}_0F_3(x) = 3 \cdot \frac{4x^2 - \gamma^2}{4x^3 - 3\gamma^2x}$$

$${}_0F_4(x) = 4 \cdot \frac{8x^3 - 4\gamma^2x}{8x^4 - 8\gamma^2x^2 + \gamma^4}$$

$${}_0F_5(x) = 5 \cdot \frac{16x^4 - 12\gamma^2x^2 + \gamma^4}{16x^5 - 20\gamma^2x^3 + 5\gamma^4x}$$

$${}_0F_6(x) = 6 \cdot \frac{32x^5 - 32\gamma^2x^3 + 6\gamma^4x}{32x^6 - 48\gamma^2x^4 + 18\gamma^4x^2 - \gamma^6}$$

$${}_0F_7(x) = 7 \cdot \frac{64x^6 - 80\gamma^2x^4 + 24\gamma^4x^2 - \gamma^6}{64x^7 - 112\gamma^2x^5 + 56\gamma^4x^3 - 7\gamma^6x}$$

$${}_0F_8(x) = 8 \cdot \frac{128x^7 - 192\gamma^2x^5 + 80\gamma^4x^3 - 8\gamma^6x}{128x^8 - 256\gamma^2x^6 + 160\gamma^4x^4 - 32\gamma^6x^2 + \gamma^8}$$

$${}_0F_9(x) = 9 \cdot \frac{256x^8 - 448\gamma^2x^6 + 240\gamma^4x^4 - 40\gamma^6x^2 + \gamma^8}{256x^9 - 576\gamma^2x^7 + 432\gamma^4x^5 - 120\gamma^6x^3 + 9\gamma^8x}$$

$${}_0F_{10}(x) = 10 \cdot \frac{512x^9 - 1024\gamma^2x^7 + 672\gamma^4x^5 - 160\gamma^6x^3 + 10\gamma^8x}{512x^{10} - 1280\gamma^2x^8 + 1120\gamma^4x^6 - 400\gamma^6x^4 + 50\gamma^8x^2 - \gamma^{10}}$$

$${}_0F_{11}(x) = 11 \cdot \frac{1024x^{10} - 2304\gamma^2x^8 + 1792\gamma^4x^6 - 560\gamma^6x^4 + 60\gamma^8x^2 - \gamma^{10}}{1024x^{11} - 2816\gamma^2x^9 + 2816\gamma^4x^7 - 1232\gamma^6x^5 + 220\gamma^8x^3 - 11\gamma^{10}x}$$

$${}_0F_{12}(x) = 12 \cdot \frac{2048x^{11} - 5120\gamma^2x^9 + 4608\gamma^4x^7 - 1792\gamma^6x^5 + 280\gamma^8x^3 - 12\gamma^{10}x}{2048x^{12} - 6144\gamma^2x^{10} + 6912\gamma^4x^8 - 3584\gamma^6x^6 + 840\gamma^8x^4 - 72\gamma^{10}x^2 + \gamma^{12}}$$

この ${}_0F_N(x)$ をもう一度微分して ${}_0F_N(x)'$ 、および $\frac{{}_0T_N(x)''}{{}_0T_N(x)}$ が得られる。

$${}_0F_N(x)' = \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{-1}{(x - \gamma \cos \frac{2k-1}{2N} \pi)^2} \right\}$$

$$\frac{{}_0T_N(x)''}{{}_0T_N(x)} = \{ {}_0F_N(x) \}^2 + {}_0F_N(x)'$$

$$= \left\{ \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{x - \gamma \cos \frac{2k-1}{2N} \pi} \right) \right\}^2 - \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{1}{(x - \gamma \cos \frac{2k-1}{2N} \pi)^2} \right\}$$

$$= \sum_{i,j} \left\{ \frac{2}{(x - \gamma \cos \frac{2i-1}{2N} \pi)(x - \gamma \cos \frac{2j-1}{2N} \pi)} \right\} \quad (1 \leq i < j \leq N)$$

チェビシェフ多項式の基本型について

これらの式を ${}_0T_N(x)$ の微分方程式に代入し次式を得る。ただし $1 \leq i < j \leq N$ である。

$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{x}{x - \gamma \cos \frac{2k-1}{2N} \pi} \right) + \sum_{i,j} \left\{ \frac{2(x^2 - \gamma^2)}{(x - \gamma \cos \frac{2i-1}{2N} \pi)(x - \gamma \cos \frac{2j-1}{2N} \pi)} \right\} = N^2$$

さらに $\ln \{ {}_0T_N(x)' \}$ の微分 $\frac{{}_0T_N(x)''}{{}_0T_N(x)'}$ は次式となる。

$$\frac{d}{dx} [\ln \{ {}_0T_N(x)' \}] = \frac{{}_0T_N(x)''}{{}_0T_N(x)'} = \frac{\sum_{i,j} \left\{ \frac{2}{(x - \gamma \cos \frac{2i-1}{2N} \pi)(x - \gamma \cos \frac{2j-1}{2N} \pi)} \right\}}{\sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{x - \gamma \cos \frac{2k-1}{2N} \pi} \right)} (1 \leq i < j \leq N)$$

一方 ${}_0T_N(x)' = {}_0T_N(x) \cdot {}_0F_N(x)$ と ${}_0T_N(x)'' = {}_0T_N(x) \cdot [{}_0F_N(x)' + \{ {}_0F_N(x) \}^2]$ を

${}_0T_N(x)$ の微分方程式に代入して $N^2 = x \cdot {}_0F_N(x) + (x^2 - \gamma^2) \cdot [{}_0F_N(x)' + \{ {}_0F_N(x) \}^2]$ を得る。

この式をもう一度微分してさらに整理すると

$$(x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0F_N(x)'' + 3x \cdot {}_0F_N(x)' + [2N^2 + 1 - 2(x^2 - \gamma^2) \cdot \{ {}_0F_N(x) \}^2] \cdot {}_0F_N(x) = 0$$

この式の最終項の $[2N^2 + 1 - 2(x^2 - \gamma^2) \cdot \{ {}_0F_N(x) \}^2]$ のみを計算するために、

$$\{ {}_0F_N(x) \}^2 = \left\{ \frac{{}_0T_N(x)'}{{}_0T_N(x)} \right\}^2 = \left\{ \frac{N \cdot {}_0U_{N-1}(x)}{{}_0T_N(x)} \right\}^2 = N^2 \cdot \left\{ \frac{{}_0U_{N-1}(x)}{{}_0T_N(x)} \right\}^2 \quad \text{と}$$

$\{ {}_0T_N(x) \}^2 + (\gamma^2 - x^2) \cdot \{ {}_0U_{N-1}(x) \}^2 = \gamma^{2N}$ を利用すると次式が得られるので、

$$\begin{aligned} & 2N^2 + 1 - 2(x^2 - \gamma^2) \cdot \{ {}_0F_N(x) \}^2 \\ &= 1 + 2N^2 - 2N^2 \cdot (x^2 - \gamma^2) \cdot \left\{ \frac{{}_0U_{N-1}(x)}{{}_0T_N(x)} \right\}^2 = 1 + 2N^2 \cdot \frac{\gamma^{2N}}{\{ {}_0T_N(x) \}^2} \end{aligned}$$

ここから ${}_0F_N(x)$ の微分方程式は次式のようにも表される。

$$(x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0F_N(x)'' + 3x \cdot {}_0F_N(x)' + \left[1 + \frac{2N^2 \cdot \gamma^{2N}}{\{{}_0T_N(x)\}^2} \right] \cdot {}_0F_N(x) = 0$$

この微分方程式の解は ${}_0F_N(x) = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{x - \gamma \cos \frac{2k-1}{2N} \pi} \right)$ である。

4. 2 第二種のチェビシエフ多項式基本型拡張関数の微分方程式

偶数次の第二種のチェビシエフ多項式基本型、例えば ${}_0U_4(x) = 16x^4 - 12\gamma^2x^2 + \gamma^4$ から

$${}_0U_4^{-1}(X) = X^4 - \frac{12}{\gamma^2}X^2 + \frac{16}{\gamma^4} \quad \text{を導入する。一般に } {}_0U_{2N}(x) = \sum_{k=0}^N \left\{ (-\gamma^2)^k \cdot {}_{2N-k}C_k (2x)^{2(N-k)} \right\}$$

から ${}_0U_{2N}^{-1}(X) = \sum_{k=0}^N \left\{ \left(-\frac{4}{\gamma^2}\right)^k \cdot {}_{N+k}C_{N-k} \cdot X^{2(N-k)} \right\}$ が得られる。

この多項式の微分方程式を求める。 ${}_0U_{2N}(x) = (-\gamma^2)^N X^{-2N} \cdot {}_0U_{2N}^{-1}(X)$ であるが、

係数を無視して、 ${}_0U_{2N}(x) = X^{-2N} \cdot {}_0U_{2N}^{-1}(X)$ として計算する。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [{}_0U_{2N}(x)] &= X^{-2N+1} \{ 2N \cdot {}_0U_{2N}^{-1}(X) - X \cdot {}_0U_{2N}^{-1}(X)' \} \\ \frac{d^2}{dx^2} [{}_0U_{2N}(x)] &= X^{-2N+2} \{ X^2 \cdot {}_0U_{2N}^{-1}(X)'' - 2(2N-1) \cdot X \cdot {}_0U_{2N}^{-1}(X)' + 2N(2N-1) \cdot {}_0U_{2N}^{-1}(X) \} \end{aligned}$$

以上の三式を ${}_0U_{2N}(X)$ の微分方程式に代入して、 ${}_0U_{2N}^{-1}(X)$ の微分方程式を得る。

$$\left(X^2 - \frac{1}{\gamma^2} \right) \cdot {}_0U_{2N}^{-1}(X)'' - \left\{ 2(2N-1) \cdot X - \frac{4N+1}{\gamma^2} \cdot \frac{1}{X} \right\} \cdot {}_0U_{2N}^{-1}(X)' + 2N(2N-1) \cdot {}_0U_{2N}^{-1}(X) = 0$$

奇数次の第二種のチェビシエフ多項式基本型、例えば ${}_0U_5(x) = 32x^5 - 32\gamma^2x^3 + 6\gamma^4x$ は、

$${}_0U_5^{-1}(X) = X^4 - \frac{16}{3\gamma^2}X^2 + \frac{16}{3\gamma^4} \quad \text{を考える。一般に } {}_0U_{2N+1}(x) = \sum_{k=0}^N \left\{ (-\gamma^2)^k \cdot {}_{2N+1-k}C_k (2x)^{2(N-k)+1} \right\}$$

から ${}_0U_{2N+1}^{-1}(X) = \frac{1}{N+1} \cdot \sum_{k=0}^N \left\{ \left(-\frac{4}{\gamma^2}\right)^k \cdot {}_{N+k+1}C_{N-k} \cdot X^{2(N-k)+1} \right\}$ を導入する。

チェビシェフ多項式の基本型について

この多項式の微分方程式を求める。 ${}_0U_{2N+1}(x) = (-\gamma^2)^N (2N+2) \cdot X^{-2N-1} \cdot {}_0U_{2N+1}^{-1}(X)$ であるが、

係数を無視して ${}_0U_{2N+1}(x) = X^{-2N-1} \cdot {}_0U_{2N+1}^{-1}(X)$ として計算する。

$$\frac{d}{dx} [{}_0U_{2N+1}(x)] = X^{-2N} \cdot \left\{ (2N+1) \cdot {}_0U_{2N+1}^{-1}(X) - X \cdot {}_0U_{2N+1}^{-1}(X)' \right\}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} [{}_0U_{2N+1}(x)] = X^{-2N+1} \left\{ X^2 \cdot {}_0U_{2N+1}^{-1}(X)'' - 4N \cdot X \cdot {}_0U_{2N+1}^{-1}(X)' + 2N(2N+1) \cdot {}_0U_{2N+1}^{-1}(X) \right\}$$

以上の三式を ${}_0U_{2N+1}(x)$ の微分方程式に代入して ${}_0U_{2N+1}^{-1}(X)$ の微分方程式を得る。

$$\left(X^2 - \frac{1}{\gamma^2} \right) \cdot {}_0U_{2N+1}^{-1}(X)'' - \left\{ 4N \cdot X - \frac{4N+3}{\gamma^2} \cdot \frac{1}{X} \right\} \cdot {}_0U_{2N+1}^{-1}(X)' + 2N(2N+1) \cdot {}_0U_{2N+1}^{-1}(X) = 0$$

N が偶数でも奇数でも ${}_0U_N^{-1}(X)$ は同じ微分方程式となるので、まず ${}_0U_N^{-1}(X)$ を列挙する。

$${}_0U_2^{-1}(X) = X^2 - \frac{4}{\gamma^2}$$

$${}_0U_3^{-1}(X) = X^2 - \frac{2}{\gamma^2}$$

$${}_0U_4^{-1}(X) = X^4 - \frac{12}{\gamma^2} X^2 + \frac{16}{\gamma^4}$$

$${}_0U_5^{-1}(X) = X^4 - \frac{16}{3\gamma^2} X^2 + \frac{16}{3\gamma^4}$$

$${}_0U_6^{-1}(X) = X^6 - \frac{24}{\gamma^2} X^4 + \frac{80}{\gamma^4} X^2 - \frac{64}{\gamma^6}$$

$${}_0U_7^{-1}(X) = X^6 - \frac{10}{\gamma^2} X^4 + \frac{24}{\gamma^4} X^2 - \frac{16}{\gamma^6}$$

$${}_0U_8^{-1}(X) = X^8 - \frac{40}{\gamma^2} X^6 + \frac{240}{\gamma^4} X^4 - \frac{448}{\gamma^6} X^2 + \frac{256}{\gamma^8}$$

$${}_0U_9^{-1}(X) = X^8 - \frac{16}{\gamma^2} X^6 + \frac{336}{5\gamma^4} X^4 - \frac{512}{5\gamma^6} X^2 + \frac{256}{5\gamma^8}$$

$${}_0U_{10}^{-1}(X) = X^{10} - \frac{60}{\gamma^2} X^8 + \frac{560}{\gamma^4} X^6 - \frac{1792}{\gamma^6} X^4 + \frac{2304}{\gamma^8} X^2 - \frac{1024}{\gamma^{10}}$$

$${}_0U_{11}^{-1}(X) = X^{10} - \frac{70}{3\gamma^2} X^8 + \frac{448}{3\gamma^4} X^6 - \frac{384}{\gamma^6} X^4 + \frac{1280}{3\gamma^8} X^2 - \frac{512}{3\gamma^{10}}$$

$${}_0U_{12}^{-1}(X) = X^{12} - \frac{84}{\gamma^2} X^{10} + \frac{1120}{\gamma^4} X^8 - \frac{5376}{\gamma^6} X^6 + \frac{11520}{\gamma^8} X^4 - \frac{11264}{\gamma^{10}} X^2 + \frac{4096}{\gamma^{12}}$$

この関数の微分方程式は次のようになり、この式は $\gamma^2 = -1$ でも成立する。

$$\left(X^2 - \frac{1}{\gamma^2} \right) \cdot {}_0U_N^{-1}(X)'' - \left\{ 2(N-1)X - \frac{2N+1}{\gamma^2} \cdot \frac{1}{X} \right\} \cdot {}_0U_N^{-1}(X)' + N(N-1) \cdot {}_0U_N^{-1}(X) = 0$$

この解の因数分解は次式になる。 ${}_0U_N^{-1}(X) = \prod_{k=1}^N \left(X - \frac{1}{\gamma \cos \frac{k}{N+1} \pi} \right) \quad (N \geq 2, k \neq \frac{N+1}{2})$

さらに ${}_0U_N^{-1}(X) = \prod_{k=1}^N \left(X^2 - \frac{1}{\gamma^2 \cos^2 \frac{k}{N+1} \pi} \right) = \prod_{k=1}^N \left(X^2 - \frac{1}{\gamma^2} - \frac{\tan^2 \frac{k}{N+1} \pi}{\gamma^2} \right)$ となるので、

${}_0U_N^{-1}(X)$ の X^2 に $X^2 = Y^2 + \frac{1}{\gamma^2}$ を代入し、得られる関数を ${}_0W_N^{-1}(Y)$ として下にまとめる。

$${}_0W_2^{-1}(Y) = Y^2 - \frac{3}{\gamma^2}$$

$${}_0W_3^{-1}(Y) = Y^2 - \frac{1}{\gamma^2}$$

$${}_0W_4^{-1}(Y) = Y^4 - \frac{10}{\gamma^2} Y^2 + \frac{5}{\gamma^4}$$

$${}_0W_5^{-1}(Y) = Y^4 - \frac{10}{3\gamma^2} Y^2 + \frac{1}{\gamma^4}$$

$${}_0W_6^{-1}(Y) = Y^6 - \frac{21}{\gamma^2} Y^4 + \frac{35}{\gamma^4} Y^2 - \frac{7}{\gamma^6}$$

$${}_0W_7^{-1}(Y) = Y^6 - \frac{7}{\gamma^2} Y^4 + \frac{7}{\gamma^4} Y^2 - \frac{1}{\gamma^6}$$

$${}_0W_8^{-1}(Y) = Y^8 - \frac{36}{\gamma^2} Y^6 + \frac{126}{\gamma^4} Y^4 - \frac{84}{\gamma^6} Y^2 + \frac{9}{\gamma^8}$$

$${}_0W_9^{-1}(Y) = Y^8 - \frac{12}{\gamma^2} Y^6 + \frac{126}{5\gamma^4} Y^4 - \frac{12}{\gamma^6} Y^2 + \frac{1}{\gamma^8}$$

$${}_0W_{10}^{-1}(Y) = Y^{10} - \frac{55}{\gamma^2} Y^8 + \frac{330}{\gamma^4} Y^6 - \frac{462}{\gamma^6} Y^4 + \frac{165}{\gamma^8} Y^2 - \frac{11}{\gamma^{10}}$$

$${}_0W_{11}^{-1}(Y) = Y^{10} - \frac{55}{3\gamma^2} Y^8 + \frac{66}{\gamma^4} Y^6 - \frac{66}{\gamma^6} Y^4 + \frac{55}{3\gamma^8} Y^2 - \frac{1}{\gamma^{10}}$$

$${}_0W_{12}^{-1}(Y) = Y^{12} - \frac{78}{\gamma^2} Y^{10} + \frac{715}{\gamma^4} Y^8 - \frac{1716}{\gamma^6} Y^6 + \frac{1287}{\gamma^8} Y^4 - \frac{286}{\gamma^{10}} Y^2 + \frac{13}{\gamma^{12}}$$

この関数を一般的に表すと、

$$\left\{ \begin{array}{l} {}_0W_{2N}^{-1}(Y) = \sum_{k=0}^N \left\{ \left(-\frac{1}{\gamma^2} \right)^k \cdot {}_{2N+1}C_{2k} \cdot Y^{2(N-k)} \right\} = \prod_{k=1}^N \left(Y^2 - \frac{\tan^2 \frac{k}{2N+1} \pi}{\gamma^2} \right) = \prod_{i=1}^{2N} \left(Y - \frac{\tan \frac{i}{2N+1} \pi}{\gamma} \right) \\ {}_0W_{2N+1}^{-1}(Y) = \sum_{k=0}^N \left\{ \left(-\frac{1}{\gamma^2} \right)^k \cdot \frac{{}_{2N+1}C_{2k}}{2k+1} \cdot Y^{2(N-k)} \right\} = \prod_{k=1}^N \left(Y^2 - \frac{\tan^2 \frac{k}{2N+2} \pi}{\gamma^2} \right) = \prod_{i=1}^{2N+1} \left(Y - \frac{\tan \frac{i}{2N+2} \pi}{\gamma} \right) \end{array} \right.$$

ただし ${}_0W_{2N+1}^{-1}(Y)$ の場合は $i = N+1$ を除く。

チェビシェフ多項式の基本型について

この関数の微分方程式を求める。 $X^2 = Y^2 + \frac{1}{\gamma^2}$ から $\frac{dY}{dX} = \frac{\sqrt{\gamma^2 Y^2 + 1}}{\gamma Y}$

$$\frac{d}{dX} [{}_0U_N^{-1}(X)] = \frac{d}{dY} [{}_0W_N^{-1}(Y)] \cdot \left(\frac{dY}{dX}\right) = \frac{\sqrt{\gamma^2 Y^2 + 1}}{\gamma Y} \cdot {}_0W_N^{-1}(Y)'$$

$$\frac{d^2}{dX^2} [{}_0U_N^{-1}(X)] = \frac{\gamma^2 Y^2 + 1}{\gamma^2 Y^2} \cdot {}_0W_N^{-1}(Y)'' - \frac{1}{\gamma^2 Y^3} \cdot {}_0W_N^{-1}(Y)'$$

これらの式を ${}_0U_N^{-1}(X)$ の微分方程式に代入して、 ${}_0W_N^{-1}(Y)$ の微分方程式を得る。

$$(Y^2 + \frac{1}{\gamma^2}) \cdot {}_0W_N^{-1}(Y)'' - 2 \left\{ (N-1) \cdot Y - \frac{1}{\gamma^2} \cdot \frac{1}{Y} \right\} \cdot {}_0W_N^{-1}(Y)' + N(N-1) \cdot {}_0W_N^{-1}(Y) = 0$$

この式は $\gamma^2 = -1$ でも成立する。

さらに ${}_0U_N(x)$ の対数を取って微分して得られる関数 ${}_0G_N(x)$ の微分方程式を求める。

$${}_0U_N(x) = 2^N \cdot \prod_{k=1}^N \left(x - \gamma \cos \frac{k}{N+1} \pi \right) \text{ の対数を微分して次式が得られる。}$$

$$\ln \{ {}_0U_N(x) \} = \ln(2^N) + \sum_{k=1}^N \left\{ \ln \left(x - \gamma \cos \frac{k}{N+1} \pi \right) \right\}$$

$${}_0G_N(x) = \frac{{}_0U_N(x)'}{{}_0U_N(x)} = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{x - \gamma \cos \frac{k}{N+1} \pi} \right)$$

$N = 2$ から $N = 12$ までの関数 ${}_0G_N(x)$ は次のようになる。

$${}_0G_N(x) = \frac{{}_0U_N(x)'}{{}_0U_N(x)}$$

$${}_0G_2(x) = \frac{8x}{4x^2 - \gamma^2}$$

$${}_0G_3(x) = \frac{24x^2 - 4\gamma^2}{8x^3 - 4\gamma^2x}$$

$${}_0G_4(x) = \frac{64x^3 - 24\gamma^2x}{16x^4 - 12\gamma^2x^2 + \gamma^4}$$

$${}_0G_5(x) = \frac{160x^4 - 96\gamma^2x^2 + 6\gamma^4}{32x^5 - 32\gamma^2x^3 + 6\gamma^4x}$$

$${}_0G_6(x) = \frac{384x^5 - 320\gamma^2x^3 + 48\gamma^4x}{64x^6 - 80\gamma^2x^4 + 24\gamma^4x^2 - \gamma^6}$$

$${}_0G_7(x) = \frac{896x^6 - 960\gamma^2x^4 + 240\gamma^4x^2 - 8\gamma^6}{128x^7 - 192\gamma^2x^5 + 80\gamma^4x^3 - 8\gamma^6x}$$

$${}_0G_8(x) = \frac{2048x^7 - 2688\gamma^2x^5 + 960\gamma^4x^3 - 80\gamma^6x}{256x^8 - 448\gamma^2x^6 + 240\gamma^4x^4 - 40\gamma^6x^2 + \gamma^8}$$

$${}_0G_9(x) = \frac{4608x^8 - 7168\gamma^2x^6 + 3360\gamma^4x^4 - 480\gamma^6x^2 + 10\gamma^8}{512x^9 - 1024\gamma^2x^7 + 672\gamma^4x^5 - 160\gamma^6x^3 + 10\gamma^8x}$$

$${}_0G_{10}(x) = \frac{10240x^9 - 18432\gamma^2x^7 + 10752\gamma^4x^5 - 2240\gamma^6x^3 + 120\gamma^8x}{1024x^{10} - 2304\gamma^2x^8 + 1792\gamma^4x^6 - 560\gamma^6x^4 + 60\gamma^8x^2 - \gamma^{10}}$$

$${}_0G_{11}(x) = \frac{22528x^{10} - 46080\gamma^2x^8 + 32256\gamma^4x^6 - 8960\gamma^6x^4 + 840\gamma^8x^2 - 12\gamma^{10}}{2048x^{11} - 5120\gamma^2x^9 + 4608\gamma^4x^7 - 1792\gamma^6x^5 + 280\gamma^8x^3 - 12\gamma^{10}x}$$

$${}_0G_{12}(x) = \frac{49152x^{11} - 112640\gamma^2x^9 + 92160\gamma^4x^7 - 32256\gamma^6x^5 + 4480\gamma^8x^3 - 168\gamma^{10}x}{4096x^{12} - 11264\gamma^2x^{10} + 11520\gamma^4x^8 - 5376\gamma^6x^6 + 1120\gamma^8x^4 - 84\gamma^{10}x^2 + \gamma^{12}}$$

さらに $\frac{{}_0T_N(x)''}{{}_0T_N(x)'} = \frac{\{N \cdot {}_0U_{N-1}(x)\}'}{N \cdot {}_0U_{N-1}(x)} = \frac{{}_0U_{N-1}(x)'}{{}_0U_{N-1}(x)} = {}_0G_{N-1}(x)$ から次式が成立する。

$$\sum_{i,j} \left\{ \frac{2}{(x - \gamma \cos \frac{2i-1}{2N}\pi)(x - \gamma \cos \frac{2j-1}{2N}\pi)} \right\} = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{x - \gamma \cos \frac{2k-1}{2N}\pi} \right) \cdot \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{1}{x - \gamma \cos \frac{k}{N}\pi} \right)$$

ただし $1 \leq i < j \leq N$ である。

さらに ${}_0G_N(x)$ をもう一度微分して ${}_0G_N(x)' = \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{-1}{(x - \gamma \cos \frac{k}{N+1}\pi)^2} \right\}$ が得られる。

チェビシェフ多項式の基本型について

また ${}_0G_N(x)' = \frac{{}_0U_N(x)''}{{}_0U_N(x)} - \left\{ \frac{{}_0U_N(x)'}{{}_0U_N(x)} \right\}^2$ なので

$$\frac{{}_0U_N(x)''}{{}_0U_N(x)} = \sum_{i,j} \left\{ \frac{2}{(x - \gamma \cos \frac{i}{N+1} \pi)(x - \gamma \cos \frac{j}{N+1} \pi)} \right\} \quad (1 \leq i < j \leq N)$$

これらの式を ${}_0U_N(x)$ の微分方程式に代入し次式を得る。ただし $1 \leq i < j \leq N$ である。

$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{3x}{x - \gamma \cos \frac{k}{N+1} \pi} \right) + \sum_{i,j} \left\{ \frac{2(x^2 - \gamma^2)}{(x - \gamma \cos \frac{i}{N+1} \pi)(x - \gamma \cos \frac{j}{N+1} \pi)} \right\} = N(N+2)$$

さらに $\ln \{ {}_0U_N(x)' \}$ の微分 $\frac{{}_0U_N(x)''}{{}_0U_N(x)'}$ は次式となる。

$$\frac{d}{dx} [\ln \{ {}_0U_N(x)' \}] = \frac{{}_0U_N(x)''}{{}_0U_N(x)'} = \frac{\sum_{i,j} \left\{ \frac{2}{(x - \gamma \cos \frac{i}{N+1} \pi)(x - \gamma \cos \frac{j}{N+1} \pi)} \right\}}{\sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{x - \gamma \cos \frac{k}{N+1} \pi} \right)} \quad (1 \leq i < j \leq N)$$

一方 ${}_0U_N(x)' = {}_0U_N(x) \cdot {}_0G_N(x)$ と ${}_0U_N(x)'' = {}_0U_N(x) \cdot [{}_0G_N(x)' + \{ {}_0G_N(x) \}^2]$ を

${}_0U_N(x)$ の微分方程式に代入し、 $N(N+2) = 3x \cdot {}_0G_N(x) + (x^2 - \gamma^2) \cdot [{}_0G_N(x)' + \{ {}_0G_N(x) \}^2]$

を得る。この式をもう一度微分してさらに整理すると ${}_0G_N(x)$ の微分方程式が得られる。

$$(x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0G_N(x)'' + 5x \cdot {}_0G_N(x)' + \left[2(N+1)^2 + 1 - 4x \cdot {}_0G_N(x) - 2(x^2 - \gamma^2) \cdot \{ {}_0G_N(x) \}^2 \right] \cdot {}_0G_N(x) = 0$$

この式が ${}_0G_N(x) = \frac{{}_0U_N(x)'}{{}_0U_N(x)} = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{x - \gamma \cos \frac{k}{N+1} \pi} \right)$ の微分方程式である。

5. チェビシエフ多項式基本型混合関数の微分方程式

5. 1 第一種のチェビシエフ多項式基本型と第二種のチェビシエフ多項式基本型の比

第一種および第二種のチェビシエフ多項式基本型の比からなる ${}_0H_N(x)$ を定義し、その性質を検討する。

$${}_0H_N(x) = \frac{{}_0T_{N+1}(x)}{{}_0U_N(x)} = \frac{N+1}{{}_0F_{N+1}(x)} = x - \gamma^2 \cdot \frac{{}_0U_{N-1}(x)}{{}_0U_N(x)}$$

$${}_0H_2(x) = x - \gamma^2 \cdot \frac{2x}{4x^2 - \gamma^2} \quad {}_0H_3(x) = x - \gamma^2 \cdot \frac{4x^2 - \gamma^2}{8x^3 - 4\gamma^2x}$$

$${}_0H_4(x) = x - \gamma^2 \cdot \frac{8x^3 - 4\gamma^2x}{16x^4 - 12\gamma^2x^2 + \gamma^4} \quad {}_0H_5(x) = x - \gamma^2 \cdot \frac{16x^4 - 12\gamma^2x^2 + \gamma^4}{32x^5 - 32\gamma^2x^3 + 6\gamma^4x}$$

$${}_0H_6(x) = x - \gamma^2 \cdot \frac{32x^5 - 32\gamma^2x^3 + 6\gamma^4x}{64x^6 - 80\gamma^2x^4 + 24\gamma^4x^2 - \gamma^6}$$

$${}_0H_7(x) = x - \gamma^2 \cdot \frac{64x^6 - 80\gamma^2x^4 + 24\gamma^4x^2 - \gamma^6}{128x^7 - 192\gamma^2x^5 + 80\gamma^4x^3 - 8\gamma^6x}$$

$${}_0H_8(x) = x - \gamma^2 \cdot \frac{128x^7 - 192\gamma^2x^5 + 80\gamma^4x^3 - 8\gamma^6x}{256x^8 - 448\gamma^2x^6 + 240\gamma^4x^4 - 40\gamma^6x^2 + \gamma^8}$$

$${}_0H_9(x) = x - \gamma^2 \cdot \frac{256x^8 - 448\gamma^2x^6 + 240\gamma^4x^4 - 40\gamma^6x^2 + \gamma^8}{512x^9 - 1024\gamma^2x^7 + 672\gamma^4x^5 - 160\gamma^6x^3 + 10\gamma^8x}$$

$${}_0H_{10}(x) = x - \gamma^2 \cdot \frac{512x^9 - 1024\gamma^2x^7 + 672\gamma^4x^5 - 160\gamma^6x^3 + 10\gamma^8x}{1024x^{10} - 2304\gamma^2x^8 + 1792\gamma^4x^6 - 560\gamma^6x^4 + 60\gamma^8x^2 - \gamma^{10}}$$

$${}_0H_{11}(x) = x - \gamma^2 \cdot \frac{1024x^{10} - 2304\gamma^2x^8 + 1792\gamma^4x^6 - 560\gamma^6x^4 + 60\gamma^8x^2 - \gamma^{10}}{2048x^{11} - 5120\gamma^2x^9 + 4608\gamma^4x^7 - 1792\gamma^6x^5 + 280\gamma^8x^3 - 12\gamma^{10}x}$$

$${}_0H_{12}(x) = x - \gamma^2 \cdot \frac{2048x^{11} - 5120\gamma^2x^9 + 4608\gamma^4x^7 - 1792\gamma^6x^5 + 280\gamma^8x^3 - 12\gamma^{10}x}{4096x^{12} - 11264\gamma^2x^{10} + 11520\gamma^4x^8 - 5376\gamma^6x^6 + 1120\gamma^8x^4 - 84\gamma^{10}x^2 + \gamma^{12}}$$

${}_0H_N(x)$ に関してまず次式が成立する。

$${}_0H_N(x) = \frac{\prod_{k=1}^{N+1} \left(x - \gamma \cos \frac{2k-1}{2N+2} \pi \right)}{\prod_{k=1}^N \left(x - \gamma \cos \frac{k}{N+1} \pi \right)}$$

チェビシェフ多項式の基本型について

さらに $\{ {}_0 T_{N+1}(x) \}^2 + (\gamma^2 - x^2) \cdot \{ {}_0 U_N(x) \}^2 = \gamma^{2(N+1)}$ から

$$\left\{ \frac{{}_0 T_{N+1}(x)}{{}_0 U_N(x)} \right\}^2 + (\gamma^2 - x^2) = \{ {}_0 H_N(x) \}^2 + (\gamma^2 - x^2) = \frac{\gamma^{2(N+1)}}{\{ {}_0 U_N(x) \}^2}$$

一方 ${}_0 T_N(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{{}_0 U_{2N-1}(x)}{{}_0 U_{N-1}(x)}$ を利用して $2 \cdot \frac{{}_0 T_{N+1}(x)}{{}_0 U_N(x)} = 2 \cdot {}_0 H_N(x) = \frac{{}_0 U_{2N+1}(x)}{\{ {}_0 U_N(x) \}^2}$

この式を上のに代入して、 $\{ {}_0 H_N(x) \}^2 - 2 \cdot \frac{\gamma^{2(N+1)}}{{}_0 U_{2N+1}(x)} \cdot {}_0 H_N(x) + (\gamma^2 - x^2) = 0$

この式を解いて、 ${}_0 H_N(x) = \frac{\gamma^{2(N+1)} + {}_0 T_{2N+2}(x)}{{}_0 U_{2N+1}(x)} = \frac{\gamma^{2(N+1)}}{{}_0 U_{2N+1}(x)} + {}_0 H_{2N+1}(x)$

ただし次式を利用し、 ${}_0 H_N(x)$ は正をとった。

$$\left\{ \frac{{}_0 T_{2N+2}(x)}{{}_0 U_{2N+1}(x)} \right\}^2 + (\gamma^2 - x^2) = \{ {}_0 H_{2N+1}(x) \}^2 + (\gamma^2 - x^2) = \frac{\gamma^{4(N+1)}}{\{ {}_0 U_{2N+1}(x) \}^2}$$

この関数の微分方程式を求める。

まず $\{ {}_0 T_{N+1}(x) \}^2 + (\gamma^2 - x^2) \cdot \{ {}_0 U_N(x) \}^2 = \gamma^{2(N+1)}$ を微分して

$$(N+1) \cdot {}_0 T_{N+1}(x) - x \cdot {}_0 U_N(x) + (\gamma^2 - x^2) \cdot {}_0 U_N(x)' = 0 \quad \text{が得られ、整理すると}$$

$$(x^2 - \gamma^2) \cdot \frac{{}_0 U_N(x)'}{{}_0 U_N(x)} + x = (x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0 G_N(x) + x = (N+1) \cdot \frac{{}_0 T_{N+1}(x)}{{}_0 U_N(x)} = (N+1) \cdot {}_0 H_N(x)$$

つぎに ${}_0 T_{N+1}(x) = {}_0 H_N(x) \cdot {}_0 U_N(x)$ を微分して、

$$(N+1) \cdot {}_0 U_N(x) = {}_0 H_N(x)' \cdot {}_0 U_N(x) + {}_0 H_N(x) \cdot {}_0 U_N(x)' \quad \text{を得、整理して}$$

$${}_0 H_N(x)' = (N+1) - {}_0 H_N(x) \cdot \frac{{}_0 U_N(x)'}{{}_0 U_N(x)} = (N+1) - {}_0 H_N(x) \cdot {}_0 G_N(x)$$

この式に $(x^2 - \gamma^2)$ をかけて整理すると、

$$\begin{aligned} (x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0 H_N(x)' &= (N+1)(x^2 - \gamma^2) - {}_0 H_N(x) \cdot (x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0 G_N(x) \\ &= (N+1)(x^2 - \gamma^2) + x \cdot {}_0 H_N(x) - (N+1) \cdot \{ {}_0 H_N(x) \}^2 \end{aligned}$$

この式を微分して整理し、 ${}_0H_N(x)$ の微分方程式を得る。

$$(x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0H_N(x)'' + \{2(N+1) \cdot {}_0H_N(x) + x\} \cdot {}_0H_N(x)' - \{{}_0H_N(x) + 2(N+1)x\} = 0$$

5. 2 第一種および第二種のチェビシエフ多項式基本型の比の対数関数の微分方程式

次のような関数を定義する。

$$\begin{aligned} {}_0J_N(x) &= {}_0F_{N+1}(x) - {}_0G_N(x) & \begin{cases} {}_0K_N(x) = (x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0J_N(x) - x \\ {}_0L_N(x) = (x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0J_N(x) + x \end{cases} \\ {}_0O_N(x) &= {}_0F_{N+1}(x) + {}_0G_N(x) & \begin{cases} {}_0P_N(x) = (x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0O_N(x) - x \\ {}_0Q_N(x) = (x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0O_N(x) + x \end{cases} \end{aligned}$$

これらの関数の相互関係を明らかにする。まず ${}_0H_N(x) = \frac{{}_0T_{N+1}(x)}{{}_0U_N(x)}$ の対数関数を考える。

$$\ln\{{}_0H_N(x)\} = \sum_{k=1}^{N+1} \left\{ \ln\left(x - \gamma \cos \frac{2k-1}{2N+2}\pi\right) \right\} - \sum_{k=1}^N \left\{ \ln\left(x - \gamma \cos \frac{k}{N+1}\pi\right) \right\}$$

さらにこの対数関数の微分を考える。

$$\begin{aligned} \frac{{}_0H_N(x)'}{{}_0H_N(x)} &= \frac{{}_0T_{N+1}(x)'}{{}_0T_{N+1}(x)} - \frac{{}_0U_N(x)'}{{}_0U_N(x)} = {}_0F_{N+1}(x) - {}_0G_N(x) \\ &= {}_0J_N(x) = \sum_{k=1}^{N+1} \left(\frac{1}{x - \gamma \cos \frac{2k-1}{2N+2}\pi} \right) - \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{x - \gamma \cos \frac{k}{N+1}\pi} \right) \end{aligned}$$

すなわち ${}_0J_N(x)$ は $\ln\{{}_0H_N(x)\}$ の一階微分関数である。

次に ${}_0F_{N+1}(x)$ に関する新しい式を導入する。

${}_0F_{N+1}(x) = \frac{{}_0T_{N+1}(x)'}{{}_0T_{N+1}(x)}$ をもう一度微分して整理すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} {}_0F_{N+1}(x)' &= \frac{{}_0T_{N+1}(x)''}{{}_0T_{N+1}(x)} - \left\{ \frac{{}_0T_{N+1}(x)'}{{}_0T_{N+1}(x)} \right\}^2 = \frac{{}_0T_{N+1}(x)'}{{}_0T_{N+1}(x)} \cdot \frac{{}_0T_{N+1}(x)''}{{}_0T_{N+1}(x)'} - \left\{ \frac{{}_0T_{N+1}(x)'}{{}_0T_{N+1}(x)} \right\}^2 \\ &= {}_0F_{N+1}(x) \cdot {}_0G_N(x) - \{ {}_0F_{N+1}(x) \}^2 = -{}_0J_N(x) \cdot {}_0F_{N+1}(x) \end{aligned}$$

チェビシェフ多項式の基本型について

またすでに述べたように $N^2 = x \cdot {}_0 F_N(x) + (x^2 - \gamma^2) \cdot [{}_0 F_N(x)' + \{ {}_0 F_N(x) \}^2]$ なので、

$$(N+1)^2 = x \cdot {}_0 F_{N+1}(x) + (x^2 - \gamma^2) \cdot [{}_0 F_{N+1}(x)' + \{ {}_0 F_{N+1}(x) \}^2]$$

また $N(N+2) = 3x \cdot {}_0 G_N(x) + (x^2 - \gamma^2) \cdot [{}_0 G_N(x)' + \{ {}_0 G_N(x) \}^2]$ なので、

この両式の差をとり、さらに ${}_0 J_N(x) = {}_0 F_{N+1}(x) - {}_0 G_N(x)$, ${}_0 J_N(x)' = {}_0 F_{N+1}(x)' - {}_0 G_N(x)'$ 、

および ${}_0 K_N(x)' = (x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0 J_N(x)' + 2x \cdot {}_0 J_N(x) - 1$ を利用すると次の二式が得られる。

$$\begin{cases} {}_0 F_{N+1}(x) = \frac{1}{2} \cdot {}_0 J_N(x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{{}_0 K_N(x)'}{{}_0 K_N(x)} \\ {}_0 G_N(x) = -\frac{1}{2} \cdot {}_0 J_N(x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{{}_0 K_N(x)'}{{}_0 K_N(x)} \end{cases}$$

ここから ${}_0 F_{N+1}(x) + {}_0 G_N(x) = {}_0 O_N(x) = -\frac{{}_0 K_N(x)'}{{}_0 K_N(x)}$ で、さらに次式も得られる。

$$\begin{cases} \{ {}_0 F_{N+1}(x) \}^2 + \{ {}_0 G_N(x) \}^2 = \frac{1}{2} \{ {}_0 J_N(x) \}^2 + \frac{1}{2} \left\{ \frac{{}_0 K_N(x)'}{{}_0 K_N(x)} \right\}^2 \\ \{ {}_0 F_{N+1}(x) \} \cdot \{ {}_0 G_N(x) \} = -\frac{1}{4} \{ {}_0 J_N(x) \}^2 + \frac{1}{4} \left\{ \frac{{}_0 K_N(x)'}{{}_0 K_N(x)} \right\}^2 \end{cases}$$

一方 ${}_0 F_N(x)$ の微分方程式を利用すると、 ${}_0 F_{N+1}(x)$ の微分方程式は次式となり、

$$\begin{aligned} (x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0 F_{N+1}(x)'' + 3x \cdot {}_0 F_{N+1}(x)' \\ + \left[2(N+1)^2 + 1 - 2(x^2 - \gamma^2) \cdot \{ {}_0 F_{N+1}(x) \}^2 \right] \cdot {}_0 F_{N+1}(x) = 0 \end{aligned}$$

この式に $(N+1)^2 = (x^2 - \gamma^2) \cdot \{ {}_0 F_{N+1}(x) \}^2 - {}_0 K_N(x) \cdot {}_0 F_{N+1}(x)$ を代入して整理すると、

$$(x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0 F_{N+1}(x)'' + 3x \cdot {}_0 F_{N+1}(x)' + \{ 1 - 2 \cdot {}_0 K_N(x) \cdot {}_0 F_{N+1}(x) \} \cdot {}_0 F_{N+1}(x) = 0$$

既に述べたように、 ${}_0 F_{N+1}(x)$ の微分方程式は次式のようにも表されるので、

$$(x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0 F_{N+1}(x)'' + 3x \cdot {}_0 F_{N+1}(x)' + \left[1 + \frac{2(N+1)^2 \cdot \gamma^{2(N+1)}}{\{ {}_0 T_{N+1}(x) \}^2} \right] \cdot {}_0 F_{N+1}(x) = 0$$

ここから ${}_0K_N(x)$ の値が得られる。

$${}_0K_N(x) = -\frac{(N+1)^2 \cdot \gamma^{2(N+1)}}{\{ {}_0T_{N+1}(x) \}^2} \cdot \frac{1}{{}_0F_{N+1}(x)} = -\frac{(N+1) \cdot \gamma^{2(N+1)}}{{}_0T_{N+1}(x) \cdot {}_0U_N(x)} = -\frac{2(N+1) \cdot \gamma^{2(N+1)}}{{}_0U_{2N+1}(x)}$$

ただし ${}_0T_N(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{{}_0U_{2N-1}(x)}{{}_0U_{N-1}(x)}$ から誘導される ${}_0T_{N+1}(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{{}_0U_{2N+1}(x)}{{}_0U_N(x)}$ を利用した。

$N=2$ から $N=7$ までの関数 ${}_0K_N(x)$ は次のようになる。

$${}_0K_N(x) = -\frac{(N+1) \cdot \gamma^{2(N+1)}}{{}_0T_{N+1}(x) \cdot {}_0U_N(x)} = -\frac{2(N+1) \cdot \gamma^{2(N+1)}}{{}_0U_{2N+1}(x)}$$

$${}_0K_2(x) = -\frac{3\gamma^6}{(4x^3 - 3\gamma^2x)(4x^2 - \gamma^2)}$$

$${}_0K_3(x) = -\frac{4\gamma^8}{(8x^4 - 8\gamma^2x^2 + \gamma^4)(8x^3 - 4\gamma^2x)}$$

$${}_0K_4(x) = -\frac{5\gamma^{10}}{(16x^5 - 20\gamma^2x^3 + 5\gamma^4x)(16x^4 - 12\gamma^2x^2 + \gamma^4)}$$

$${}_0K_5(x) = -\frac{6\gamma^{12}}{(32x^6 - 48\gamma^2x^4 + 18\gamma^4x^2 - \gamma^6)(32x^5 - 32\gamma^2x^3 + 6\gamma^4x)}$$

$${}_0K_6(x) = -\frac{7\gamma^{14}}{(64x^7 - 112\gamma^2x^5 + 56\gamma^4x^3 - 7\gamma^6x)(64x^6 - 80\gamma^2x^4 + 24\gamma^4x^2 - \gamma^6)}$$

$${}_0K_7(x) = -\frac{8\gamma^{16}}{(128x^8 - 256\gamma^2x^6 + 160\gamma^4x^4 - 32\gamma^6x^2 + \gamma^8)(128x^7 - 192\gamma^2x^5 + 80\gamma^4x^3 - 8\gamma^6x)}$$

またすでに述べたように ${}_0H_N(x) = \frac{\gamma^{2(N+1)}}{{}_0U_{2N+1}(x)} + {}_0H_{2N+1}(x)$ なので、

$${}_0K_N(x) = 2(N+1) \cdot \{ {}_0H_{2N+1}(x) - {}_0H_N(x) \} \quad \text{となる。}$$

この ${}_0K_N(x)$ を利用すると、 ${}_0L_N(x) = {}_0K_N(x) + 2x = -\frac{2(N+1) \cdot \gamma^{2(N+1)}}{{}_0U_{2N+1}(x)} + 2x$

チェビシェフ多項式の基本型について

さらにこの ${}_0 K_N(x)$ の微分係数 ${}_0 K_N(x)' = (x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0 J_N(x)' + 2x \cdot {}_0 J_N(x) - 1$ は、

$${}_0 K_N(x)' = \frac{2(N+1)\gamma^{2(N+1)}}{{}_0 U_{2N+1}(x)} \cdot \frac{U_{2N+1}(x)'}{{}_0 U_{2N+1}(x)} = \frac{2(N+1)\gamma^{2(N+1)}}{{}_0 U_{2N+1}(x)} \cdot {}_0 G_{2N+1}(x)$$

$N=2$ から $N=6$ までの関数 ${}_0 K_N(x)'$ は次のようになる。

$${}_0 K_N(x)' = -{}_0 K_N(x) \cdot {}_0 G_{2N+1}(x) = \frac{2(N+1) \cdot \gamma^{2(N+1)}}{{}_0 U_{2N+1}(x)} \cdot {}_0 G_{2N+1}(x)$$

$${}_0 K_2(x)' = 3\gamma^6 \cdot \frac{80x^4 - 48\gamma^2 x^2 + 3\gamma^4}{(4x^3 - 3\gamma^2 x)^2 (4x^2 - \gamma^2)^2}$$

$${}_0 K_3(x)' = 4\gamma^8 \cdot \frac{448x^4 - 480\gamma^2 x^2 + 120\gamma^4 x^2 - 4\gamma^6}{(8x^4 - 8\gamma^2 x^2 + \gamma^4)^2 (8x^3 - 4\gamma^2 x)^2}$$

$${}_0 K_4(x)' = 5\gamma^{10} \cdot \frac{2304x^8 - 3584\gamma^2 x^6 + 1680\gamma^4 x^4 - 240\gamma^6 x^2 + 5\gamma^8}{(16x^5 - 20\gamma^2 x^3 + 5\gamma^4 x)^2 (16x^4 - 12\gamma^2 x^2 + \gamma^4)^2}$$

$${}_0 K_5(x)' = 6\gamma^{12} \cdot \frac{11264x^{10} - 23040\gamma^2 x^8 + 16128\gamma^4 x^6 - 4480\gamma^6 x^4 + 420\gamma^8 x^2 - 6\gamma^{10}}{(32x^6 - 48\gamma^2 x^4 + 18\gamma^4 x^2 - \gamma^6)^2 (32x^5 - 32\gamma^2 x^3 + 6\gamma^4 x)^2}$$

$${}_0 K_6(x)' = 7\gamma^{14} \cdot \frac{53248x^{12} - 135168\gamma^2 x^{10} + 126720\gamma^4 x^8 - 53760\gamma^6 x^6 + 10080\gamma^8 x^4 - 672\gamma^{10} x^2 + 7\gamma^{12}}{(64x^7 - 112\gamma^2 x^5 + 56\gamma^4 x^3 - 7\gamma^6 x)^2 (64x^6 - 80\gamma^2 x^4 + 24\gamma^4 x^2 - \gamma^6)^2}$$

さらに ${}_0 K_N(x) = -\frac{(N+1) \cdot \gamma^{2(N+1)}}{{}_0 T_{N+1}(x) \cdot {}_0 U_N(x)}$ の微分係数を考えると、

$${}_0 K_N(x)' = \frac{2(N+1)\gamma^{2(N+1)}}{{}_0 U_{2N+1}(x)} \cdot \{ {}_0 F_{N+1}(x) + {}_0 G_N(x) \} \quad \text{が得られ、}$$

ここから ${}_0 F_{N+1}(x) + {}_0 G_N(x) = {}_0 O_N(x) = {}_0 G_{2N+1}(x) = -\frac{{}_0 K_N(x)'}{{}_0 K_N(x)}$ となる。

さらに ${}_0 Q_N(x) = (x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0 O_N(x) + x$ の性質を調べる。

まず ${}_0 O_N(x) = {}_0 G_{2N+1}(x)$ と、 $(x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0 G_N(x) + x = (N+1) \cdot {}_0 H_N(x)$ から、

$${}_0 Q_N(x) = (x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0 G_{2N+1}(x) + x = 2(N+1) \cdot {}_0 H_{2N+1}(x)$$

そこで ${}_0H_{2N+1}(x) = \frac{{}_0T_{2N+2}(x)}{{}_0U_{2N+1}(x)}$ に、二種類のチェビシェフ多項式基本型間の漸化式

${}_0T_{2N+2}(x) = x \cdot {}_0U_{2N+1}(x) - \gamma^2 \cdot {}_0U_{2N}(x)$ を代入して、次式を得る。

$$\begin{aligned} {}_0Q_N(x) &= 2(N+1) \cdot \frac{{}_0T_{2N+2}(x)}{{}_0U_{2N+1}(x)} = 2(N+1) \cdot \frac{x \cdot {}_0U_{2N+1}(x) - \gamma^2 \cdot {}_0U_{2N}(x)}{{}_0U_{2N+1}(x)} \\ &= 2(N+1) \cdot x - 2(N+1) \cdot \gamma^2 \cdot \frac{{}_0U_{2N}(x)}{{}_0U_{2N+1}(x)} \end{aligned}$$

さらに ${}_0P_N(x)$ も容易に求めることができる。

$${}_0P_N(x) = {}_0Q_N(x) - 2x = 2N \cdot x - 2(N+1) \gamma^2 \cdot \frac{{}_0U_{2N}(x)}{{}_0U_{2N+1}(x)}$$

さらに次の二式を整理して、

$$\begin{cases} {}_0Q_N(x) = (x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0O_N(x) + x = (x^2 - \gamma^2) \cdot \{ {}_0F_{N+1}(x) + {}_0G_N(x) \} + x \\ {}_0K_N(x) = (x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0J_N(x) - x = (x^2 - \gamma^2) \cdot \{ {}_0F_{N+1}(x) - {}_0G_N(x) \} - x \end{cases}$$

${}_0Q_N(x) - {}_0K_N(x) = 2(x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0G_N(x) + 2x = 2(N+1) \cdot {}_0H_N(x)$ が得られ、ここから

${}_0K_N(x) = 2(N+1) \cdot \{ {}_0H_{2N+1}(x) - {}_0H_N(x) \}$ が得られるが、この式はすでに導入した。

以上の下準備をした後、各関数の微分方程式を求める。

${}_0F_{N+1}(x)$ の微分方程式は、

$$(x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0F_{N+1}(x)'' + 3x \cdot {}_0F_{N+1}(x)' + \{ 1 - 2 \cdot {}_0K_N(x) \cdot {}_0F_{N+1}(x) \} \cdot {}_0F_{N+1}(x) = 0 \quad \text{で、}$$

この式に ${}_0F_{N+1}(x)' = -{}_0J_N(x) \cdot {}_0F_{N+1}(x)$ を利用すると、

${}_0F_{N+1}(x)$ の微分方程式は次式のようにも表される。

$$\begin{aligned} (x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0F_{N+1}(x)'' + 5x \cdot {}_0F_{N+1}(x)' \\ + \{ 1 + 2x \cdot {}_0J_N(x) - 2 \cdot {}_0K_N(x) \cdot {}_0F_{N+1}(x) \} \cdot {}_0F_{N+1}(x) = 0 \end{aligned}$$

一方 ${}_0G_N(x)$ の微分方程式は

$$(x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0G_N(x)'' + 5x \cdot {}_0G_N(x)' + \left[2(N+1)^2 + 1 - 4x \cdot {}_0G_N(x) - 2(x^2 - \gamma^2) \cdot \{ {}_0G_N(x) \}^2 \right] \cdot {}_0G_N(x) = 0$$

となり、 ${}_0K_N(x)$ を用いて整理すると、次式になるので、

$$(x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0G_N(x)'' + 5x \cdot {}_0G_N(x)' + \{ 1 + 2x \cdot {}_0J_N(x) + 2 \cdot {}_0K_N(x) \cdot {}_0G_N(x) \} \cdot {}_0G_N(x) = 0$$

両式の差をとって、 ${}_0J_N(x)$ の微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & (x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0J_N(x)'' + 5x \cdot {}_0J_N(x)' + {}_0J_N(x) + 2x \cdot \{ {}_0J_N(x) \}^2 \\ & \quad - \left[\{ {}_0J_N(x) \}^2 + \{ {}_0O_N(x) \}^2 \right] \cdot {}_0K_N(x) \\ & = (x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0J_N(x)'' + 5x \cdot {}_0J_N(x)' \\ & \quad + \{ 1 + 2x \cdot {}_0J_N(x) - {}_0J_N(x) \cdot {}_0K_N(x) \} \cdot {}_0J_N(x) - \{ {}_0O_N(x) \}^2 \cdot {}_0K_N(x) = 0 \end{aligned}$$

また両式の和をとって、 ${}_0O_N(x)$ の微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & (x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0O_N(x)'' + 5x \cdot {}_0O_N(x)' \\ & \quad + \{ 1 + 2x \cdot {}_0J_N(x) - {}_0J_N(x) \cdot {}_0K_N(x) \} \cdot {}_0O_N(x) - {}_0J_N(x) \cdot {}_0O_N(x) \cdot {}_0K_N(x) \\ & = (x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0O_N(x)'' + 5x \cdot {}_0O_N(x)' + \{ 1 + 2x \cdot {}_0J_N(x) - 2 \cdot {}_0J_N(x) \cdot {}_0K_N(x) \} \cdot {}_0O_N(x) = 0 \end{aligned}$$

${}_0Q_N(x)$ の場合は ${}_0H_N(x)$ の微分方程式と ${}_0Q_N(x) = 2(N+1) \cdot {}_0H_{2N+1}(x)$ とから、

$$(x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0Q_N(x)'' + \{ 2 \cdot {}_0Q_N(x) + x \} \cdot {}_0Q_N(x)' - \{ {}_0Q_N(x) + 8(N+1)^2 x \} = 0 \quad \text{となる。}$$

${}_0P_N(x) = {}_0Q_N(x) - 2x$ の微分方程式は、 ${}_0Q_N(x)$ の微分方程式と

$${}_0P_N(x)' - {}_0Q_N(x)' = -2, \quad {}_0P_N(x)'' - {}_0Q_N(x)'' = 0 \quad \text{を利用し、次式となる。}$$

$$(x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0P_N(x)'' + \{ 2 \cdot {}_0P_N(x) + 5x \} \cdot {}_0P_N(x)' + \{ 3 \cdot {}_0P_N(x) - 8N(N+2)x \} = 0$$

次に ${}_0K_N(x)$ の微分方程式を求める。

$${}_0K_N(x) = -\frac{2(N+1)\gamma^{2(N+1)}}{{}_0U_{2N+1}(x)} \quad \text{を利用すると} \quad {}_0U_{2N+1}(x)' = -\frac{{}_0K_N(x)'}{{}_0K_N(x)} \cdot {}_0U_{2N+1}(x) \quad \text{および}$$

$${}_0U_{2N+1}(x)'' = -\frac{{}_0K_N(x)''}{{}_0K_N(x)} \cdot {}_0U_{2N+1}(x) + 2 \cdot \left\{ \frac{{}_0K_N(x)'}{{}_0K_N(x)} \right\}^2 \cdot {}_0U_{2N+1}(x) \quad \text{となるので、}$$

これらの式を ${}_0U_{2N+1}(x)$ の微分方程式に代入して次式が得られる。

$$\begin{aligned} & (x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0K_N(x)'' - 2(x^2 - \gamma^2) \cdot \left\{ \frac{{}_0K_N(x)'}{{}_0K_N(x)} \right\} \cdot {}_0K_N(x)' + 3x \cdot {}_0K_N(x)' \\ & \quad + (2N+1)(2N+3) \cdot {}_0K_N(x) \\ &= (x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0K_N(x)'' + \{2(x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0Q_N(x) + 3x\} \cdot {}_0K_N(x)' + (2N+1)(2N+3) \cdot {}_0K_N(x) \\ &= (x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0K_N(x)'' + \{2 \cdot {}_0Q_N(x) + x\} \cdot {}_0K_N(x)' + (2N+1)(2N+3) \cdot {}_0K_N(x) = 0 \end{aligned}$$

${}_0L_N(x) = {}_0K_N(x) + 2x$ の微分方程式は ${}_0K_N(x)$ の微分方程式と、

$${}_0L_N(x)' - {}_0K_N(x)' = 2, \quad {}_0L_N(x)'' - {}_0K_N(x)'' = 0 \quad \text{を利用し、次式となる。}$$

$$\begin{aligned} & (x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0L_N(x)'' + \{2 \cdot {}_0Q_N(x) + x\} \cdot {}_0L_N(x)' \\ & \quad + (2N+1)(2N+3) \cdot {}_0L_N(x) - 4 \cdot {}_0Q_N(x) - 8(N+1)^2 x = 0 \end{aligned}$$

6. 総括

6.1 関数

$$\text{第一種のチェビシエフ多項式基本型: } {}_0T_N(x) = 2^{N-1} \cdot \prod_{k=1}^N \left(x - \gamma \cos \frac{2k-1}{2N} \pi \right) \quad (N \geq 2)$$

$$\text{第二種のチェビシエフ多項式基本型: } {}_0U_N(x) = 2^N \cdot \prod_{k=1}^N \left(x - \gamma \cos \frac{k}{N+1} \pi \right) \quad (N \geq 2)$$

$${}_0T_{N+1}(x) \text{ と } {}_0U_N(x) \text{ との比: } {}_0H_N(x) = \frac{{}_0T_{N+1}(x)}{{}_0U_N(x)}$$

$${}_0T_N(x) \text{ の対数関数の微分係数: } {}_0F_N(x) = \frac{{}_0T_N(x)'}{{}_0T_N(x)} = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{x - \gamma \cos \frac{2k-1}{2N} \pi} \right)$$

チェビシェフ多項式の基本型について

$${}_0U_N(x) \text{ の対数関数の微分係数} : {}_0G_N(x) = \frac{{}_0U_N(x)'}{{}_0U_N(x)} = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{x - \gamma \cos \frac{k}{N+1} \pi} \right)$$

$${}_0T_N(x) \text{ の関連関数 } {}_0T_N^{-1}(X) : {}_0T_N^{-1}(X) = \prod_{k=1}^N \left(X - \frac{1}{\gamma \cos \frac{2k-1}{2N} \pi} \right) \quad (N \geq 2, k \neq \frac{N+1}{2})$$

$${}_0U_N(x) \text{ の関連関数 } {}_0U_N^{-1}(X) : {}_0U_N^{-1}(X) = \prod_{k=1}^N \left(X - \frac{1}{\gamma \cos \frac{k}{N+1} \pi} \right) \quad (N \geq 2, k \neq \frac{N+1}{2})$$

$${}_0T_N^{-1}(X) \text{ の関連関数 } {}_0V_N^{-1}(Y) : {}_0V_N^{-1}(Y) = \prod_{k=1}^N \left(Y - \frac{\tan \frac{2k-1}{2N} \pi}{\gamma} \right) \quad (k \neq \frac{N+1}{2})$$

$${}_0U_N^{-1}(X) \text{ の関連関数 } {}_0W_N^{-1}(Y) : {}_0W_N^{-1}(Y) = \prod_{k=1}^N \left(Y - \frac{\tan \frac{k}{N+1} \pi}{\gamma} \right) \quad (k \neq \frac{N+1}{2})$$

$${}_0F_{N+1}(x) \text{ と } {}_0G_N(x) \text{ との差} : {}_0J_N(x) = {}_0F_{N+1}(x) - {}_0G_N(x) = -\frac{{}_0F_{N+1}(x)'}{{}_0F_{N+1}(x)}$$

$${}_0F_{N+1}(x) \text{ と } {}_0G_N(x) \text{ との和} : {}_0O_N(x) = {}_0F_{N+1}(x) + {}_0G_N(x) = {}_0G_{2N+1}(x) = -\frac{{}_0K_N(x)'}{{}_0K_N(x)}$$

$${}_0J_N(x) \text{ の関連関数 } {}_0K_N(x) : {}_0K_N(x) = (x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0J_N(x) - x = -\frac{(N+1) \cdot \gamma^{2(N+1)}}{{}_0T_{N+1}(x) \cdot {}_0U_N(x)}$$

$${}_0J_N(x) \text{ の関連関数 } {}_0L_N(x) : {}_0L_N(x) = (x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0J_N(x) + x$$

$${}_0O_N(x) \text{ の関連関数 } {}_0P_N(x) : {}_0P_N(x) = (x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0O_N(x) - x$$

$${}_0O_N(x) \text{ の関連関数 } {}_0Q_N(x) : {}_0Q_N(x) = (x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0O_N(x) + x = 2(N+1) \cdot {}_0H_{2N+1}(x)$$

6. 2 微分方程式

$${}_0T_N(x) \text{ の微分方程式} : \left(1 - \frac{x^2}{\gamma^2}\right) \cdot {}_0T_N(x)'' - \frac{x}{\gamma^2} \cdot {}_0T_N(x)' + \frac{N^2}{\gamma^2} \cdot {}_0T_N(x) = 0$$

$${}_0U_N(x) \text{ の微分方程式} : \left(1 - \frac{x^2}{\gamma^2}\right) \cdot {}_0U_N(x)'' - \frac{3x}{\gamma^2} \cdot {}_0U_N(x)' + \frac{N(N+2)}{\gamma^2} \cdot {}_0U_N(x) = 0$$

$${}_0 H_N(x) \text{ の微分方程式} : (x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0 H_N(x)'' + \{ 2(N+1) \cdot {}_0 H_N(x) + x \} \cdot {}_0 H_N(x)' - \{ {}_0 H_N(x) + 2(N+1)x \} = 0$$

$${}_0 F_{N+1}(x) \text{ の微分方程式} : (x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0 F_{N+1}(x)'' + 5x \cdot {}_0 F_{N+1}(x)' + \{ 1 + 2x \cdot {}_0 J_N(x) - 2 \cdot {}_0 K_N(x) \cdot {}_0 F_{N+1}(x) \} \cdot {}_0 F_{N+1}(x) = 0$$

$${}_0 G_N(x) \text{ の微分方程式} : (x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0 G_N(x)'' + 5x \cdot {}_0 G_N(x)' + \{ 1 + 2x \cdot {}_0 J_N(x) + 2 \cdot {}_0 K_N(x) \cdot {}_0 G_N(x) \} \cdot {}_0 G_N(x) = 0$$

$${}_0 T_N^{-1}(X) \text{ の微分方程式} : (X^2 - \frac{1}{\gamma^2}) \cdot {}_0 T_N^{-1}(X)'' - \{ 2(N-1) \cdot X - \frac{2N-1}{\gamma^2} \cdot \frac{1}{X} \} \cdot {}_0 T_N^{-1}(X)' + N(N-1) \cdot {}_0 T_N^{-1}(X) = 0$$

$${}_0 U_N^{-1}(X) \text{ の微分方程式} : (X^2 - \frac{1}{\gamma^2}) \cdot {}_0 U_N^{-1}(X)'' - \left\{ 2(N-1) \cdot X - \frac{2N+1}{\gamma^2} \cdot \frac{1}{X} \right\} \cdot {}_0 U_N^{-1}(X)' + N(N-1) \cdot {}_0 U_N^{-1}(X) = 0$$

$${}_0 V_N^{-1}(Y) \text{ の微分方程式} : (Y^2 + \frac{1}{\gamma^2}) \cdot {}_0 V_N^{-1}(Y)'' - 2(N-1) \cdot Y \cdot {}_0 V_N^{-1}(Y)' + N(N-1) \cdot {}_0 V_N^{-1}(Y) = 0$$

$${}_0 W_N^{-1}(Y) \text{ の微分方程式} : (Y^2 + \frac{1}{\gamma^2}) \cdot {}_0 W_N^{-1}(Y)'' - 2 \{ (N-1) \cdot Y - \frac{1}{\gamma^2} \cdot \frac{1}{Y} \} \cdot {}_0 W_N^{-1}(Y)' + N(N-1) \cdot {}_0 W_N^{-1}(Y) = 0$$

$${}_0 J_N(x) \text{ の微分方程式} : (x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0 J_N(x)'' + 5x \cdot {}_0 J_N(x)' + \{ 1 + 2x \cdot {}_0 J_N(x) - {}_0 J_N(x) \cdot {}_0 K_N(x) \} \cdot {}_0 J_N(x) - \{ {}_0 O_N(x) \}^2 \cdot {}_0 K_N(x) = 0$$

$${}_0 O_N(x) \text{ の微分方程式} : (x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0 O_N(x)'' + 5x \cdot {}_0 O_N(x)' + \{ 1 + 2x \cdot {}_0 J_N(x) - 2 \cdot {}_0 J_N(x) \cdot {}_0 K_N(x) \} \cdot {}_0 O_N(x) = 0$$

$${}_0 K_N(x) \text{ の微分方程式} : (x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0 K_N(x)'' + \{ 2 \cdot {}_0 Q_N(x) + x \} \cdot {}_0 K_N(x)' + (2N+1)(2N+3) \cdot {}_0 K_N(x) = 0$$

チェビシェフ多項式の基本型について

$${}_0L_N(x) \text{ の微分方程式} : \begin{aligned} & (x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0L_N(x)'' + \{2 \cdot {}_0Q_N(x) + x\} \cdot {}_0L_N(x)' \\ & + (2N+1)(2N+3) \cdot {}_0L_N(x) - 4 \cdot {}_0Q_N(x) - 8(N+1)^2 x = 0 \end{aligned}$$

$${}_0P_N(x) \text{ の微分方程式} : \begin{aligned} & (x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0P_N(x)'' + \{2 \cdot {}_0P_N(x) + 5x\} \cdot {}_0P_N(x)' \\ & + \{3 \cdot {}_0P_N(x) - 8N(N+2)x\} = 0 \end{aligned}$$

$${}_0Q_N(x) \text{ の微分方程式} : \begin{aligned} & (x^2 - \gamma^2) \cdot {}_0Q_N(x)'' + \{2 \cdot {}_0Q_N(x) + x\} \cdot {}_0Q_N(x)' \\ & - \{ {}_0Q_N(x) + 8(N+1)^2 x \} = 0 \end{aligned}$$

以上、本稿に現れる関数とその関数の微分方程式をまとめた。

参考文献

手代木 琢磨、勝間 豊：特殊な行列式とチェビシェフ多項式、産業能率大学紀要、37 (1), 2016, pp. 1-23

中小企業の生き残り戦略
－海外進出か国内残留か－

A Study on Survival Strategies of Small and Medium Enterprises :
Should the SMEs expand their business overseas or remain in Japan?

三村 孝雄
Takao Mimura

Abstract

The global financial crisis triggered by the bankruptcy of a major U.S. investment bank, Lehman Brothers, on September 15, 2008, forced thousands of companies large and small into a corner to reduce their costs and production and seek ways to keep their businesses going. The purpose of this study is to analyze what successful measures and strategies small and medium enterprises (SMEs) in Japan implemented during the crisis. This study was mainly conducted through interviews.

The findings indicate that the SMEs succeeded in going overseas entered countries which had fewer business competitors. In addition, they looked for new customers who were willing to buy in quantity for increasing the SMEs' sales. On the other hand, the SMEs that chose to remain in Japan switched their production strategy from selling cheap consumer goods to selling high-value added business products to increase their profits. Whether expanding business overseas or staying in Japan, the SMEs worked hard to find the best strategy so that they were able to survive the global financial crisis.

1. 問題の背景と調査方法

2008年9月15日（月）にリーマン・ブラザーズは連邦倒産法第11章の適用を連邦裁判所に申請した。同社が発行していた社債や投信を保有していた企業への影響、取引先への連鎖などの恐れ、またそれに対する議会政府の対応の遅れからアメリカ経済への不安が広がり、世界的な金融危機へと連鎖した（リーマンショック）。日本でもこれを境に世界的な経済の冷え込

みから消費の落ち込み、金融不安で各種通貨から急速なドル安が進み（図表1参照）、米国市場への依存が強い輸出産業から大きなダメージが広がり、結果的に日本経済の大幅な景気後退へも繋がっていった。リーマンショックという金融危機が円の価値を強くしたのは、日本経済が好調だったからではなく、逆にリーマンショック後の日本の生産水準は急落している。アメリカ発の金融ショックでありながら先進国中最大のインパクトを日本が受けてしまった（伊丹〔2013〕）。

円高は2010年になっても続き、日本の大手企業は労働賃金の安い東南アジア諸国へ製造工場移転を加速させた（製造コストの削減）と同時に、海外生産比率の拡大や急激な生産調整（減産）を実施した。しかし、日本経済に追い打ちをかけるように2011年3月11日に東日本大震災が発生し、日本国内のサプライチェーンが大混乱となり、特に多くの半導体を使用している自動車や電気製品は生産も出来なくなってしまった。

国内工場で生産し、国内の発注元に納品していた中小企業にとっても、発注元からの受注数量の急激な減少や更なるコストダウンの要求に対し、売上高の維持や利益確保に関し厳しい時代を迎えることになった（中小企業庁〔2010〕）。

しかし、リーマンショックから8年が経過し、景気後退時期を乗り越えて現在でも好調な業績を維持する中小企業は存在している。中沢〔2014〕も中小企業研究の中で、中小企業でも大企業でも継続し利益をあげている会社は「なすべきこと」が社員に共有化されている。また逆に連続して大きな赤字をだしている企業は「コア」がなく、「何屋さん」なのか判然としていない。そして「何をしたいのか」もわからず、克服すべき課題や向かって行くべき方向が不明瞭であると言及している。

好調な中小企業がリーマンショック後にどのような具体的な施策や経営戦略を執って難局を乗り越えて来たのかを、直接経営者に聞き取り調査を実施し「中小企業における成功の秘訣を見出す」ことを目的とする。

調査方法は「テクニカルショウヨコハマ2016（工業技術見本市）」に出展ブースを構えていた中小企業において、特に会場で「技術セミナーを実施した企業」および「海外工場で生産した商品を展示」していた企業を「成功している中小企業であると仮定」し、会場にて説明員に企業概要や商品の特徴（コア技術）を伺った。その後、企業のホームページにて「経営理念や業務内容の変化」を確認し、直接企業を訪問し経営者の方から詳しい内容の聞き取り調査を実施した。

図表 1 2000年以降の為替の動向

円の対ドル・対ユーロの為替レートの推移



(注) 対ドルはインターバンク相場(東京市場)スポット・レート、対ユーロは対ドルの円レートとユーロ・レートから算出
 (資料) IMF, Principal Global Indicators (PGI)

2. 聴き取り調査

今回、以下の中小企業6社の聴き取り調査を行った。

図表 2 聴き取り調査対象企業

企業	業種・業態	本社所在地	従業員数(名)	創業年(年)
A	プラスチック塗装、金型設計	神奈川県川崎市	15	1984
B	一般樹脂の二次加工全般	神奈川県川崎市	20	1971
C	メカトロニクス専門商社	神奈川県横浜市	34	1962
D	特殊ヒーター製造	神奈川県横浜市	12	1987
E	プラスチックと精密プレス部品	長野県塩尻市	79	1980
F	特殊プリンター開発製造販売	長野県塩尻市	24	1993

(人員は2016年12月現在)

聴き取り調査の実施は、2016年6月、8月であり、各社とも約1時間程度実施している。尚、聴き取り調査の質問項目は以下のとおりである。

- ①2008年のリーマンショック以降、受注数量や売上金額に変動があったか？
- ②発注元からのビジネス条件に変化はあったのか？
- ③海外進出を決断したのか？あるいは、国内のみでのビジネスを継続したのか？
- ④海外進出（工場や販売拠点）を決断した経緯は何か？
- ⑤海外進出対象国を決めた経緯は何か？
- ⑥海外進出までに費やした期間や費用はどれくらいか？
- ⑦海外進出をしてから現在までの経営状況は改善したのか？
- ⑧今後5年の経営戦略はどうするのか？
- ⑨海外進出をしなかった理由は何か？
- ⑩リーマンショック以降と現状とを比較した場合、会社の有り様に変化はあるか？

以上の質問項目に対する回答の要約は以下の通りであるが、経営者の強い信念を感じさせられた回答は、「厚い記述」として生の発言も記載した。

【A社】；プラスチック部品への塗装メーカー

家族経営の会社であり、現会長（父親）が立ち上げた企業である。川崎工場（建物面積200㎡）と横浜工場（建物面積700㎡）において発注元からの依頼を受けて、プラスチックの金型設計製造やプラスチック部品成型後の塗装を請け負ってきた。発注元は大手企業のみならず、大手企業の1次下請けからの仕事も受けていた。金型設計と製造は国内で実施していたが、発注元の量産工場は韓国や中国に存在している関係上、国内で完成した金型を船便で送っていた。このような事業形態であったことから、海外との関係が全く無かった訳ではなく、発注元の海外工場での金型の修正加工なども手掛けていた。

しかし、リーマンショックを契機に発注元からの受注が激減し、売上金額がピーク時の40%になってしまった時に、先代社長（現会長）は廃業して「蕎麦屋」の経営に転換することを現社長（息子）に打ち明けた。その時点で現社長は、「蕎麦屋」に事業転換するリスクよりも現有の金型設計やプラスチック塗装のノウハウを活かしたいと考え、2010年に経営権を引き継いだ。そして、現状のビジネスの将来性を把握するために納品先工場（中国の大連など）に足を運び、情報収集に時間を費やした。その時に感じたことが、A社のその後の方向性を大きく変えることになった。A社の社長は次のように話してくれた。

国内の製造メーカーからプラスチック部品の金型製造を受注しました。当社で金型を

設計・製造し、発注元の製造工場がある中国に（金型を）船で送り、金型設置のために私が現地工場に行った時のことです。そこで目にしたのは、当社以外の日本メーカーから来た金型や新規部品の（日本企業の）金型見積書が多数あったのです。それらの物は日本の発注元から当社に対し「合い見積もり」の依頼すら無かった案件でした。当社でもそれらの仕事を受注出来たかもしれないのに、自分が日本に居て発注元の発注先情報などを持っていなかった事がショックでした。中国現地に居たら情報が入っていたのかもしれないし、日本でネットワークのない中小企業は不利であると痛感しました。海外に拠点があれば情報も入りビジネスも安定すると思いましたが、私には海外拠点を出すお金がありませんでした。

【海外進出決断のポイント】

- ①中国製造現場では、日本部品メーカーの各社見積もり情報が多数流失していた。
- ②日本に居ても中小企業にはネットワークが無く、発注元の情報が入らない。
- ③海外に拠点があれば日本以上に発注元の情報が入ると感じた。

その後、社長は国策として工場特区を設けて海外企業を誘致するベトナムにも出向き、仮にA社が工場進出した際に「現地で仕事があるのか？」また「日本企業の製品を現地企業が買ってくれるのか？」について調査した。その結果、ハノイ市では軒並み投資金額が高くなるが、ホーチミン市では自社と同業種のローカル企業が多いものの、技術力は低いことから勝算はあるという感触を得た。更に詳細な情報を得るために、ホーチミン市に事務所を借りようとしたが家賃が高かったため、JETRO（ホーチミン事務所）のインキュベーションオフィスを借りて（賃借料3万円／月）、3カ月の約束で会長に赴任してもらい、調査を続けた。

その結果、A社はホーチミン市の工場特区にレンタル工場（建物面積500㎡）を借りて、日本工場の余剰機械を運び込み2010年度中に操業を開始した。そして現在では4000㎡まで拡張し、現地企業からの発注を受けながらITコンシューマー機器の部品塗装を月産800万個生産し、現地企業に納品するまでになっている。リーマンショック以前の利益にまでは戻っていないが、売上金額は戻している。工場進出時を振り返って、A社社長は次のようにも話してくれた。

正直言って、安定した受注見込みがあってベトナムに進出した訳ではありません。当時は円高だったので、海外では何を見ても安く感じました。実際にインフラ投資も楽だった。ただし、部品加工メーカーが1社のみで海外進出しても仕事を受注する事は難しく、完成品まで一貫生産できる会社同士が進出しなければ無理です。しかも、月産500個レベルなら、日本での生産とコストは変わらないので海外生産の意味はない。更に、海外のビジネスでは最高権限者が、現地に居てその場でジャッジ出来ないと駄目です。

【海外進出決断のポイント】

- ①円高により海外インフラ投資金額が安く、国内に投資するよりメリットを感じた。
- ②完成品まで一貫生産できる部品メーカーの仲間を日本で持っており、そのメーカーも海外進出すればビジネス成功のチャンスがあると感じた。
- ③社長自身が海外で指揮を取る覚悟があった。

社長は、年の半分はベトナムに出張している。また3カ月の約束で赴任した会長も、6年が経過したが現在でもホーチミン在住である。社長は今後の経営展開として、以下の3点を掲げている。

- ①日本国内での製造は、自社のコア技術が活かせる分野に特化して「B to B」の分野のものを作りをする。現状のような「B to C」の分野では景気動向によって受注がいきなりゼロになる危険性がある。要するにPO^①（発注書）に基づいて量産が動いている訳ではなく、FC^②（予測値）ベースで量産しなくては発注元の納期要望に応えられない中小企業の実情がある。自社から何かを発信（もの作り）し続けると人は集まるし、同じ製品を作るにしても、日本人のヒラメキや発想力は海外より高い。
- ②ベトナム工場の顧客もホーチミン集中から周辺地域に拡大している。そのため、現在の工場特区からより納品先に近い場所での工場展開も必要と感じている。情報収集のアンテナを張って、一貫生産を行っている他の日本企業とも共有化したい。
- ③ブラジルに新たに進出したい。理由はネットワークインフラが整っている現在、日本との時差の関係で24時間働くことが出来る（日本で設計したものが、翌日には試験製造がブラジルで完成しているという意味）。

A社にとってのターニングポイントに近いことが、聴き取り調査から感じ取れた。

【B社】；一般樹脂の二次加工全般（印刷業）

家族経営の会社であり、現会長（父親）が立ち上げた企業である。東北地域や近隣の多くのプラスチック成形業者から発注を受けて、川崎工場（740㎡）においてナビゲーション、スマートフォン、オーディオ商品などへの印刷（文字やロゴマークなど）をしていた。しかし、リーマンショックを境に取引先からの受注量激減や廃業する取引先など環境が変わり、受注数量がそれまでの4割減になってしまった。待っていても仕事が来ない時期が続いたため、2009年から2010年にかけて付加価値のある印刷を自社内部で独自開発することに傾注し、その商品を約半年間かけて現社長（当時専務）が大手企業へ売り込みに行った。しかし、中小企業の人間が大企業の門戸をたたいても簡単には会ってもらえなかった。2010年に川崎市産

業振興財団主催の「起業家オーディション」に応募したところ、タイミング良く「優秀賞」を受賞した。これを契機に川崎市商工会議所のサポートも受けられ、大企業とのコネクションを作ることが出来た。しかし、当時の大企業からは「工場は日本国内だけですか？（国内のみでの取引か）」と多く聞かれた。

但し、B社は日本経済新聞や他の経済雑誌などで「大手企業の駆け込み寺」と評価されるほど技術力には定評があり、国内生産での品質確保には自信を持っていた。また、中小企業として小回りが利き、量産への近道（大手企業は1～2年かけて量産開始）であることに対しての自信もあった。会社が有名になったお陰で経営的な危機感を感じず、海外進出などは全く考えていなかった。ただ一方で、国内受注だけでは生産ロット数量に限界があることも社長は懸念していた。

前述のA社がベトナムに工場進出は果たしてからほぼ1年後の2011年、A社の社長から「工場を建てたから見に来ないか？」との誘いがあり、現会長からの勧めもあって工場見学に出かけて行った。A社の社長とは同じ二代目後継者ということで「二代目の会」を作って情報交換はしていたものの、海外進出目的でベトナムに出掛けた訳ではなかった。しかし、実際に現地に行ってみると「活気がある」「飯がうまい」という情緒的な感動以外にも、「A社の後工程での専門の印刷会社がなくA社が苦勞しているの、B社が進出すれば仕事がもらえる」と判断し、2012年3月にはA社と同じ工場特区に工場を設置した。

そして海外工場が立ち上がったら国内工場も譲るという先代の約束通り、同年10月には社長に就任した。B社の社長は、当時を振り返って以下のように話してくれた。

ベトナムのA社の現場を見ていたら、自社も出したいなと思いました。国内だけのビジネスでは、3～5年後の売上計画が立てづらくなってきた時期でしたから。また弟（現専務）の嫁がベトナム人で身近にベトナムを感じていたし、現地に嫁の親戚も多く、サポートが期待できたこともありました。実は、私の妻の国籍はブラジルです。先代が積極的に外国人（日系ブラジル人、ペルー人、フィリピン人）を採用してきたことから、国際色豊かな中で育ちましたので、海外進出に対する違和感はありませんでした。工場の設備はA社が持っていたのを借りられるし（初期投資金額が少ない）、A社の海外経験も自社に活かせると思い、1週間でベトナム進出へのライセンスを取得し、約1カ月で工場を立ち上げることが出来ました。

【海外進出決断のポイント】

- ①国内ビジネスのみでは、3～5年先の売上見込みが立たなかった。
- ②先に海外進出を果たしたA社の先行事例を応用でき、且つ現地に住む親族にサポートして貰えると思った。

現在のベトナムビジネスにおいて、新規需要は増えていないが売り上げは安定している。国内とベトナムでの売り上げ比率は8割が国内ではあるが、将来的には逆転する可能性が見えてきた。その背景には、中国で部品製造してきた自動車会社の仕事が、ベトナムに流れてきていることにある。また自動車業界は印刷の要求品質が高く、ローカルの同業者が対応出来ない付加価値の高い特殊印刷技術をB社が持っているからである。但し、印刷加工賃は安い。ため、ロジスティックコストを抑えることや新規取引先増加目的で、ホーチミン市の南にある現在の工場を発注元企業や外資企業が多数存在する北部に移転させようとしている。

更に、B社のブラジル進出の将来展望に関して、社長は以下のように話してくれた。

初めての海外工場であるベトナムが成功したとしての話ですが、ベトナムと同じように、ブラジルも親日国なので進出はしやすいと思います。メキシコの自動車工場向けに、ブラジルから部品を供給していきたいと考えています。日本人が行ってベトナムで日本品質の部品が供給できるのであれば、ブラジルでも同様のことが実現できるのではないのでしょうか。

B社の社長は、川崎市産業振興財団が実施している海外進出セミナーや年4回の勉強会にも必ず出席し、着実に情報収集をしてブラジル進出の準備を進めている。

【C社】メカトロニクス機器の専門商社

創業は1962年と古く、コンベア設計製造会社として設立された。1970年代には製造メーカーから現在の油空圧機器、伝導要品、制御機器および輸送機器の専門商社に業種を変えた。社長は2代目であるが、今回聴き取り調査に対応してくれたのは支店長である。支店は横浜、厚木、立川、三島の4拠点を有しており、今回の聴き取り対象者は、C社の海外展開（海外支店）を検討した中心人物である。

リーマンショック以前の2000年代前半と比較して、同社の現在の取引形態はかなり異なってきた。円高（図表1参照）によって、国内製造メーカーが製造拠点を海外に移転してしまったことと、海外のローカル会社に仕事自体を奪われてしまったことである。そのため、従来は国内間で取引していた企業からも、海外に出て行った限りは「海外企業として扱って欲しい」と要求された。即ち、為替レートを考慮した商売をしなくてはならなくなったのだが、C社は現在でも「円建て」の取引を基本としている。また、無借金経営をしている関係で、リーマンショック後もC社にとって大きな影響は無かった。このような背景から、現在でも海外拠点は持たずに国内4拠点で営業活動を維持している。但し、海外支店開拓を検討する過程において、海外視察に行った時のことを以下のように話してくれた。

シンガポールに行きましたが、現地商社と日本の商社では質が違ったので、自社が進出しても勝てると思いました。しかし、ローカル賃金やオフィスの賃貸料が非常に高かったので、トータルでペイできないと判断しました。また、東南アジア諸国の様々な場所で「日本製のコア部品の入手に困っていないか？」と尋ねたところ、どこの企業（装置メーカー）も困っていなかったのです。すでに現地に商社があり、必要な物は日本から入ってきていたんです。また昨今では、日本製品じゃなくてはいけないという意識が薄らいできています。「台湾製なら安心だね」という具合です。海外の製造メーカーさんもEMS⁽³⁾（受託生産）で商品を設計製造したり、コンテナ船で物を送るだけなので、何も現地に支店が無くても良いと思いました。やはりインターネット社会になって、ビジネス上の物理的距離感は無くなっていると感じています。

【国内残留決断のポイント】

- ①シンガポールでは人件費とオフィス賃貸料が異常に高騰していたので、進出しても単独で黒字化が難しいと判断した。
- ②同業者が既に進出しており、また日本製部品でなくてもお客様は既に台湾製の部品でも受け入れられていたので、日本製部品調達の価値が薄れてきた。

C社の今後のビジネス拡大の方向性に関しては、従来の部品だけを扱う商社では売り上げが「ジリ貧」になる可能性があり、新たに「ユニット化」した商品を商材として取り扱う方針を持っている。そのようなケースが増えれば海外支店を設け、現地の数社から送られてきた小ロットの部品を海外支店で集約し、一括して国内に送るというロジスティックの役割を持たせることは可能である。

では、なぜ海外でユニット化しないのかという質問に対して、支店長は以下のように話してくれた。

ユニット化して付加価値を付けるには、ハード面だけでは不十分です。たとえば多関節ロボットなどをユニット化する場合、制御ソフトウェアを組み込みでお客様に提案しないとロボットの精度や動きがわかりません。それが付加価値となるのです。自社は単なる資材部へ製品を納入する商社機能だけではなく、設計開発部門への「提案型ビジネス」を展開している会社です。それゆえ、ソフトウェアを含めると日本でしかできないと思っています。タイにもインドネシアにも行ってきましたが、ローカル企業は育てませんでした。大量生産品への対応力はあるが、小ロットに対応した品質の良い工場はまだありませんでした。中国は考えていないし、韓国も良くない、台湾なら将来的には良いかもしれません。

【日本残留決断のポイント】

- ①国内なら部品単体販売では無く、ユニット部品化して付加価値を上げられる（販売単価増）と判断した。
- ②ソフトウェア開発を含めると、東南アジア諸国の人材ではまだ対応できないことが分かった。

創業50年を過ぎ、60周年に向けてC社の商材のキーワードは、「Made in Japan」「Product by Japan」「Produce by Japan」ではないかと、支店長は語ってくれた。

【D社】特殊ヒーター製造

創業以来国内において継続して発注元からの依頼を受けて、部品およびユニットを製造している会社である。工場は東京と名古屋の2カ所にあり、小型特殊ヒーターの設計製造を行っている。小型特殊ヒーターは産業用の為、発注元からの要求はコストよりも信頼性・安全性が優先されるニッチ商品である。納入実績のある会社も国内3,500社以上にのぼり、「オリジナルのヒーターを一つから製作いたします」がモットーである。具体的用途としては、衛星放送用アンテナに内蔵されるヒーターやLEDライトを使用した交通信号機用のヒーターである。LEDライトは発熱しないために、寒冷地の信号機の霜や雪が融けなくなり、発光の技術革新が思わぬ新規需要を創出した事例となっている。

この市場の参入障壁は低いのだが、発注元からのロット数量が少なく大手には手が出しにくい商品分野であり、需要は安定的に見込まれるのでビジネスは維持できている。そのため、リーマンショック前後での売上金額の差異は少ない。

社長も自社のビジネスを拡大させるという事業方針を持たず、地域と一体になり地域貢献活動に積極的に取り組んでいる。例えば、地元大学の学生インターンシップ受け入れや役場職員の新人教育の現場自習先としての受け入れをしており、地域一体型の企業を目指している。このため、今のところ海外進出の必要性を感じていない。

【E社】プラスチックと精密プレスの子部品製造

兄の経営する東京の会社の出先工場であったが、現社長（弟）が1980年に独立して長野県で創業した。創業当初は地元大手企業からの発注があり、部品製造工場として売り上げの大半を占めていたし、発注元からの技術的支援も受けていた。製品の主軸は金属プレス部品とプラスチック部品（金型設計製造も含む）である。特に金属プレス加工技術に関しては技術力が高く、1980年代から順送金型⁽⁴⁾技術で成功していた。しかし、1985年9月のプラザ合意後の円高が進むにつれて、発注元は工場を次々にアジア諸国に移転させてしまった。発注元が

1986年に香港工場を立ち上げた際に、香港にプレス工場を出すように依頼を受けた。社長は香港の現場調査に年4回訪問している。訪問の目的は発注元工場の現場の実力を確認すると共に、他方では「日本では何をやれば生き残れるのか比較をする」のが目的であった。結局、香港には自社工場を出さなかったが、再び1990年に発注元からインドネシア、深圳（中国）への工場進出を依頼された。その都度、社長自らが現地調査を実施し、結局工場進出はしなかった。当時を振り返り以下の話をしてくれた。

発注元からは5回（5カ所）も海外進出の依頼がありました。発注のコミットメントはするからという「赤い絨毯」の話でした。でも3年先から5年先には自立して欲しいというのも条件でした。私は現地の仲介役（ブローカー）とも話をしてきましたが、彼らが私を説得する話としては「工場進出をして2～3年でパッと儲けて、儲からなくなったらパッと辞めましょう」というものでした。これは自分の経営スタンスと異なるものですし、進出するなら自分が行かなきゃならないと思っていましたので、日本の工場はどうなるのかと困ってしまいました。その結果、海外進出する自社のメリットはないと思い、日本での技術向上に努めようと決めました。

【国内残留決断のポイント】

- ①海外進出の仲介役と自身の経営者としての会社経営スタンスが異なった。
- ②経営者として、国内工場と海外工場の両方を均等に全力でマネジメントすることが出来ないと判断した。

当時、発注元からの依頼により海外に進出した部品メーカーはあった。しかし、海外に出ていって安い労働力で部品を製造しても、最終的には発注元からのコストダウン要求は国内にいた時と同じように強い。日系企業が発注元だけに部品を納めるだけのビジネス形態では意味がない。即ち、日本で作れる部品をそのまま海外で製造しても意味がないので、現地の他社の仕事を増やさない限り意味はないと判断した。

前述のように社長は自らの足で現地調査を実施した結果、海外進出を断念して国内でのビジネスに傾注する経営判断をした。その背景には以下の理由があげられる。

- ①アジア圏の労働賃金は安い、発注元からのコストダウン要求は国内と同様で海外進出しても収益は同じであり、海外進出してまでその要求に応じるリスクは高い。即ち、労働者のスキルや材料自体の品質の問題を含め、国内製造と同等の高品質な部品を供給するにはリスクが高い。
- ②進出から3年以降に自立経営をするには、誘致を斡旋した発注元に依存しないビジネス営業をしなくてはならないが、現地では会社対会社の信頼関係の構築に時間がかかり、新

規ビジネス獲得は難しいと判断した。

- ③新規ビジネスが獲得できたとしても、最終的には現地ローカルの部品製造メーカーとの競合になり、ローカルの人的ネットワークや華僑の資本力とは差が大きすぎて勝負できないと判断した。
- ④自社の生産技術ノウハウが、現地のローカル会社に流出することを恐れた。

以上の理由から海外への進出をあきらめたが、その代わり「日本で生き抜くには何をやれば良いか」を考え、国内大手企業複数からの部品を製造している。その部品もコモディティ―商品群の部品ではなく、付加価値が高く価格も急激には下がらない自社固有技術が活かせる業種に特化してビジネスを継続し、業績拡大をしている。

【F 社】特殊プリンターの開発・製造・販売

大手プリンターメーカーの代理店となり、仕入れたプリンターを独自に再設計、改造して仕入れ元メーカーが手を出さないニッチ市場向けに商品開発と販売を行っている。創業はバブル経済崩壊後であり、故先代社長が CD / DVD への直接印刷機器を開発しヒットしたことから会社が大きくなった。仕入れ元メーカーのインクジェット方式のプリンターは、基本的には紙媒体への印刷用インクを純正品として販売しているが、F 社の場合はインクそのものを別会社から調達し、紙媒体以外の物に印刷する市場をターゲットとしていた。

先代社長の時代には、本社工場（長野県塩尻市）と東京営業所、関西営業所、海外では北米と欧州に販売拠点を設けグローバルにビジネス展開していた。現社長である息子は北米に赴任していたが、当時北米での需要はなかったという。

F 社の商品開発は、先代社長のアイデアを具現化することによって成り立ち、既存の印刷物はインクジェット技術と特殊インクにより「何にでも印刷できる」を目標に売り上げを拡大してきた。2008年5月には「元気なモノ作り中小企業300社2008年版」に選ばれ注目を集めた。開発した機種数は70種類を超え、全世界でおよそ5,000台以上のプリンターを販売してきた。

しかし、同年9月にはリーマンショックが訪れて、販売先からの資金回収が難しくなり、プリンターの仕入れ元への支払いも厳しい状況が続いた。2012年に先代社長が病気で他界し、息子である現社長が会社を引き継いだのを契機に現社長は経営方針を転換し、グローバルに何でもお客様の要求に応える商品開発から、国内市場に特化した固有商品で経営をする判断をし、北米と欧州からは撤退している。その理由は以下のとおりである。

- ①海外でのビジネス経験が少なく、人材も不足しており安定的な売り上げが見込めない。
- ②商品販売の為、アフターサービスなどは現地の他会社に業務委託しており、採算が管理できない。即ち、業務委託された別会社が顧客満足度を向上させ、且つ自社の効率を上

げるには、「不具合の原因究明をして修理をするよりも、部品ユニット交換や完成品交換をした方が手間もかからない」為、F社にとっては業務委託会社からの請求金額を検証することができず、持ち出しが増えてしまった。また、不具合の根本原因が分からずじまいで自社商品の不良率が収束しなかった。

- ③商品販売先の企業調査が海外の為、不十分であり契約通りに事が進まなかった。
- ④特殊印刷機の市場規模は小さく、グローバルに展開するには商品の売上金額に比較して固定費（特に人件費）がかかり過ぎた。

先代の社長の時代には、市場ニーズが少しでもあればすぐに開発し、市場投入してきた。しかし現在ではそういったニッチ市場でも、日本からの技術供与を受けた中国メーカーが直ぐに参入し、1990年代のように品質や安全性、稼働安定性などの項目での差別化が困難となり市場は混乱している。先代社長の後を引き継ぎ、経営方針を変えた時のことを以下のように話してくれた。

先代は生粋の技術屋であり、お客様の要望や自分のアイデアがあるとすぐに研究開発し商品化するタイプでした。また設計中心の社員もついてくれたので技術者としては面白かったと思います。しかし、従業員の生活を安定させるという意味では、「社員の心得」として今もあるように「1. 出来ないと思うな。1. 出来ると思え。1. 出来ませんと言うな。1. 出来ますと言え。」で商品を片っ端から開発していたら、会社が継続出来ないと思いました。そこで選択と集中をして「フードプリンター（食品自体に印刷するプリンター、食品インクを使用）」と「情報記憶媒体コピー機」に特化して行こうと決めました。私の方針に反対する従業員は去って行ってしまいましたが、企業の身の丈に合った経営をしたかったのです。ただし、今でも先代の残した「出来ませんと言うな、出来ますと言え」という言葉を大切にしています。

【国内残留決定のポイント】

- ①会社の実力（人材、資金力）を考えると、海外も含めた全てのお客様の要望に応えていたら、自社が対応できる限界を超えていた（海外進出を断念した理由）。
- ②安定した売上と利益を確保する為に、社長自らがマネジメント出来る範囲での国内新規市場開拓とビジネスに集中させた方が経営が安定すると判断した。

F社の売上金額はリーマンショック前と同じくらいまでに回復し、利益金額はそれ以上大幅に増益となっている。現在、国内食品市場向けの特種プリンター販売を事業の柱とし安定的な収益を確保しているが、食品市場以外の事業成長の場を模索している。

3. 聴き取り調査からの知見

A社は国内の川崎工場、横浜工場の2拠点を維持しつつ、ホーチミン市（ベトナム）に1工場を進出させた（図表3参照）。国内工場では自社のコア技術を活かせる分野に特化させ、ベトナム工場では単価は安いと数量が稼げる民生品部品製造にビジネスを傾注している。ベトナム工場での発注元は日本では無くベトナムにある。ベトナム生産が増えたことにより、会社全体の売上高はリーマンショック前のレベルまで回復してきた（利益的にはまだ到達していない）。今後、ベトナム工場の場所を発注元に近いところに移転すると共に、新たにブラジルに工場進出したいと考えている。

B社は国内の川崎工場を維持しつつ、ホーチミン市（ベトナム）に1工場を進出させた（図表3参照）。全社売上におけるベトナムでの売上比率は2割程度であるが安定している。今後は民生品需要だけではなく、品質が重要視される車関連部品の発注先が、中国からベトナムに流れてきているので、売上比率はベトナムが日本と逆転する可能性が十分にあると考えている。また自社の特殊印刷のコア技術を持っていることが強みであり、今後ブラジルに工場進出させて車関連部品を製造することを検討している。

C社は海外営業拠点を検討はしたが、既にC社と同じような機能を持つ他社が進出しておりメリットがないと判断し、日本ビジネスを拡大させるために横浜支店、厚木支店、立川営業所の他に、三島営業所を増設させた（図表3参照）。今後は自社の付加価値を増やすようなユニット化した商材に移行させていき、売上金額と利益を拡大させようとしている。

D社は小ロットの特殊部品製造に特化しており、横浜工場と名古屋工場での操業を維持している。ニッチ狙いの商品製造に特化しており、地域一体型の企業を目指している。

E社は国内発注元が香港、中国、インドネシア、フィリピンに工場を国内から移転させた都度、海外工場進出の強い要望を国内発注元から出されていた。しかし、海外に工場進出することなく自社のコア技術を活かした付加価値の高い部品に国内製造をシフトさせ、国内のビジネスに特化させた（図表3参照）。

F社は独自でグローバルに販売展開をしてきたが欧州と米国の販売拠点を閉鎖し、国内営業の東京支店と関西支店は残した（図表3参照）。事業領域を国内の特殊市場に絞り、売上げも70%増加させた。国内の新たな新規事業領域を模索中である。

図表 3 リーマンショック後の拠点変化

企業	海外進出の有無	営業・製造拠点の変化
A	有	国内2工場維持。ベトナムに1工場進出。
B	有	国内1工場維持。ベトナムに1工場進出。
C	無	海外進出の検討は実施。国内営業拠点を1か所増設。
D	無	海外進出の検討は実施せず。国内2工場維持。
E	無	海外進出の検討は実施。国内1工場維持。
F	無	海外2販売拠点を閉鎖。国内1工場、2営業支店維持。

(2016年12月現在)

以上のように今回の聞き取り調査企業は、(1) 新たに海外工場進出を実施して売り上げを回復させた企業 (A 社、B 社) と、(2) 海外進出の検討は実施したが結果として国内に注力して売り上げを回復させた企業 (C 社、E 社、F 社)、その他 (D 社) に層別できる。以下に (1) と (2) 企業群の特徴をまとめる。

(1) 海外進出をして成功した中小企業の特徴

1. 進出時点は現地にツテがあり、情報の入手や現地視察が容易にできた。
2. 進出国からの誘致活動があったので初期投資金額が低く抑えられた。
3. 進出国にはローカル企業で、日本品質を確保できる同業種企業が居ない。
4. 発注元は日本では無く、現地企業からの発注で現地納品としている (為替変動の影響を受けない)。
5. 民生品の部品を安定的数量で受注し、大量生産をしている。
6. 一貫生産をして完成品として発注元に納品するために (付加価値を付ける)、複数社 (前工程～後工程) で同じ場所に進出し協働している。
7. 経営者が頻繁に現場で指揮を執っている (年間のおよそ半分は現地で仕事)。
8. 国内工場の従業員に外国人を多く採用している。

(2) 国内に留まって成功した中小企業の特徴

1. 国内製造品を民生品中心から業務用中心に変更した (利益率の向上)。
2. 発注元の国内企業を増やし、発注元の技術力を自社に定着させ、更に自社技術力を磨き上げていった (技術主導型の会社)。

3. 自社の固有技術が活かせる分野に選択と集中をし、経営資源を投入している。
4. 従業員の多くが日本人であり、且つ地域密着型の経営をしている。
5. 為替変動の影響を受けない国内取引形態をしている。

また(1)(2)の企業群の経営者の特徴としては、経営者が三現主義⁽⁵⁾に徹して行動していることであった。それは、経営者が自ら海外現地のインフラや文化を体験し、発注元の工場現場を見て管理状況を把握し、自社が受注した部品だけでなく、最終完成品の使われ方まで現物で確認し、自社部品の品質改善に努めている。また、懸案事項が発生すれば経営者がその場で確認および方針決定ができる企業体質になっていることである。

なお今後の課題としては、「先行研究」をより多く調査すると共に、聞き取り調査企業数を増やさなければならぬと考える。特に①海外進出をしたが、後に海外撤退した企業 ②海外進出したが業績不振の企業 ③国内残留をしたが業績不振の企業 を今回の聞き取り調査企業の内容と対比させることにより、より確度の高い「中小企業の生き残り戦略」の分析が可能になると考えられる。

〔注記〕

- (1) Purchase Order の略。
- (2) Forecast の略。
- (3) Electronics Manufacturing Service の略。
- (4) ひとつのプレス金型の中に複数の工程を等間隔で配置し、コイル材が繋がったままの状態で各工程の加工を連続で行えるように設計されたプレス金型のこと。
- (5) 現場、現物、現実という「3つの現」を重視する考え方。

〔参考文献〕

伊丹敬之：日本企業は何で食っているのか、日本経済新聞出版社、2013,pp.13-23

中沢孝夫：中小企業の底力、筑摩書房、2014,pp.23-24

中小企業庁編：中小企業白書（2010年版）、日経印刷、2010,pp34-57

〔聞き取り調査日〕

A 社：代表取締役社長 2016年6月3日

B 社：代表取締役社長 2016年6月3日

C 社：支店長 2016年6月23日

D 社：代表取締役社長 2016年8月5日
E 社：代表取締役社長 2016年8月23日
F 社：代表取締役社長 2016年8月30日

メキシコの金融システム
－銀行部門の民営化と金融自由化の変遷－

Mexico's Financial System:
Privatization of the Banking Sector and the Transition to Financial
Liberalization

木村 剛

Tsuyoshi Kimura

柿原 智弘*

Tomohiro Kakiyara

Abstract

Though two serious financial crises hit Mexico hard, Mexico has experienced steady economic growth since the implementation of NAFTA in 1994 and the reform of its financial system. Since the 1990s, the Mexican government has devoted to rebuilding its financial system through privatization of banks, aggressive market opening and financial liberalization by allowing many foreign financial institutions to enter the Mexican market.

The purposes of this paper are to 1) trace the key events of the two financial crises and the transition of financial institutions in Mexico, 2) describe the entry of foreign financial institutions after financial liberalization, and 3) analyze the impact of this foreign entry on the Mexican economy.

The analysis has shown that the role of foreign financial institutions in rebuilding the financial system in Mexico is large; currently, they account for about 70 percent of the total assets of commercial banks. The presence of local banks in the commercial banking sector has declined gradually and their focus has turned from retail banking to providing retail financial services.

1. はじめに

メキシコは現在順調な経済発展を遂げてきており、その背景には1994年の NAFTA 加入、積極的な市場開放などの施策や、金融改革などがある。メキシコは2度の大きな金融危機を経験

し、その都度金融面でマイナスのインパクトを受け、金融システムにおいても大幅な変更を余儀なくされてきた。こうした金融危機の中で、銀行部門では民営化や国営化が繰り返され、最終的には市場開放・金融自由化政策により外資系金融機関の参入を受け入れることとなり、現在では商業銀行の主要行の多くが外資系金融機関になるに至っている。そこで本稿では、これらの背景を踏まえ金融危機後のメキシコの金融機関、特に銀行部門の変遷について整理を行うことを目的とする。具体的には、2度の金融危機についてその推移を概観し、同時にメキシコ国内銀行の統廃合の状況を整理する。次に金融自由化による外資系金融機関の参入状況について整理を行い、最後に外資系金融機関の参入によるメキシコ経済への影響について、簡単な考察を行う。

2. 債務危機（1982年）と銀行の国有化

メキシコでは1980年代以降、2度の大きな金融危機に見舞われている。最初の金融危機は1982年に発生した債務危機⁽¹⁾である。1970年代後半、メキシコでは豊富な石油資源を背景に石油開発と工業化推進を前面に押し出し、多額の資金を海外の金融機関から外貨調達という形で借り入れていた。しかし、1980年代に入り、過剰な対外債務を抱え込むことになり、米国金利の急上昇に伴って、対外債務の支払負担が急増した。加えて原油価格の下落によって、メキシコの債務返済能力は著しく低下することになり、深刻な外貨資金不足に陥った。これを受け、メキシコの債務危機が世界経済に与える影響を懸念した米国政府やIMF（国際通貨基金）などが緊急融資を実施したが、その条件として、財政赤字の削減など経済安定化政策が義務付けられることとなった。この債務危機は1989年のプレイディ・プラン⁽²⁾と呼ばれる対外債務の再編で一応の終息を見ることとなり、メキシコ側の対策としては、債務危機後のサリナス政権下で1988年～1994年にかけ積極的な経済安定化と市場自由化が実施された。この政策は先進国からはネオリベリズムに基づく経済改革⁽³⁾の優等生との評価を得ることになり、輸出の急成長と共に、海外から多額の資本を呼び込み、高い経済成長を実現するに至った。

しかしその一方で、1980年代までのメキシコを含むラテンアメリカの金融システムは未成熟であり、十分な機能を果たしていたとは言えず、銀行システムの金融仲介機能は不十分であるばかりでなく、効率性や健全性に問題を抱えていた。同時に経営基盤も脆弱であり、外生的なショックには決して頑強であるとは言えない状況であった。1982年に発生した債務危機でその脆弱性を露呈することとなる。メキシコ銀行部門では、1982年に債務危機を契機として商業銀行の国有化が実施された。債務危機当時54あった商業銀行において包括的なストラテジーによる統廃合が行われ、18行にまで統合された⁽⁴⁾。その後、経済の回復を経て、国有化されたこれらの商業銀行は1991年から1992年にかけて民間投資家へ競売されることにな

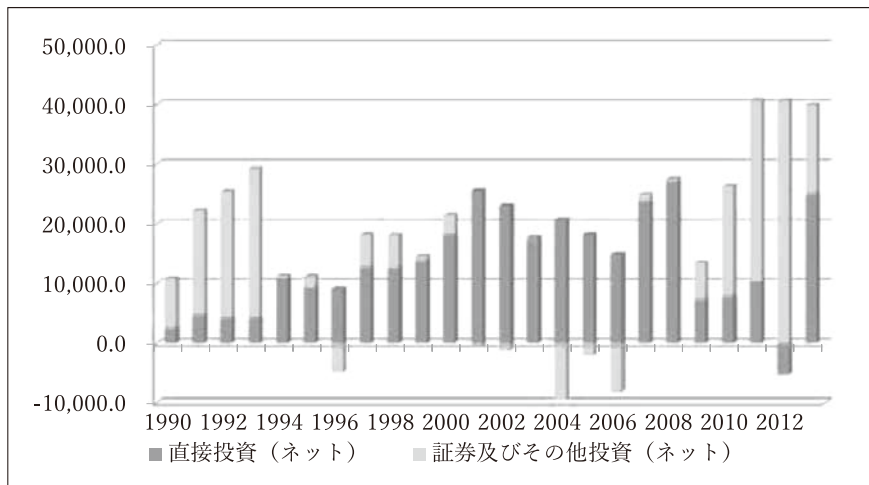
り⁽⁵⁾、政府による商業銀行の支配は一応の落ち着きを見せることになった。ただし、民営化においては、民営化される銀行の新株主や経営陣に関して適切な基準がないまま決定され、投資家の銀行株式取得のための資金調達が当該銀行や関連金融機関からの借入資本で賄われるケースがあったため、適切な自己資本の注入とらなかったなど、いくつかの問題点が指摘されている⁽⁶⁾。

3. テキーラショック（1994年）と銀行の統廃合

1982年の債務危機後、メキシコはIMFの是正勧告を受け入れる形で輸入代替工業化政策からの脱却を図り、改革・開放路線へと政策変更を実施した。1986年のGATT参加により海外からの資金を呼び込むために金利は高い水準に設定されメキシコペソは過大評価される状況になっていた。順調に経済状態の回復を実現してきた1992年12月にはNAFTA調印がなされ、安い労働力を背景に主にアメリカからの製造業をはじめとする投資が活発になり、メキシコは空前の投資ブームに沸くこととなった。

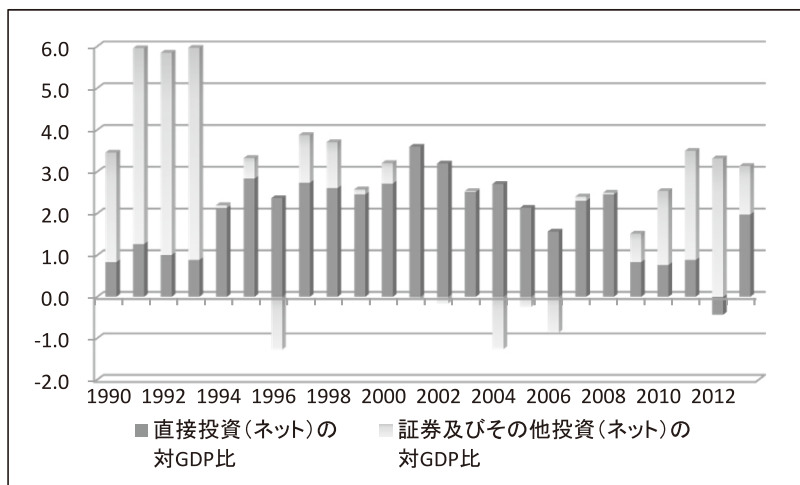
1990年～1993年の資本流入は急激に上昇し、金額ベースで見た場合、1990年の約100億ドルを皮切りに、1991年には約2倍、1993年には約3倍になっている（図1）。特徴としては、直接投資額はほぼ同一水準で推移する一方、証券及びその他投資におけるインフローが顕著に増加している。GDPベースで見た場合、1991年～1993年の資本流入額は約6%に相当しており、かなりの額が短期的に流入しているのが見てとれる（図2）。テキーラショック直前期の特徴としては、直接投資よりも短期的な証券及びその他投資が活発であり、ある種不安定な直接投資受入れ構造となっていたと言える。

図1 メキシコにおける直接投資と証券及びその他投資のインフローの推移（ネット）
（実額ベース）



（出所） Inter-American Development Bank, Latin American and Caribbean Macro Watch
 注） その他投資には、短期・長期信用供与、銀行預金、売掛け債権、買掛け債務等が含まれる。

図2 メキシコにおける直接投資と証券及びその他投資のインフローの推移（ネット）
（対 GDP ベース）



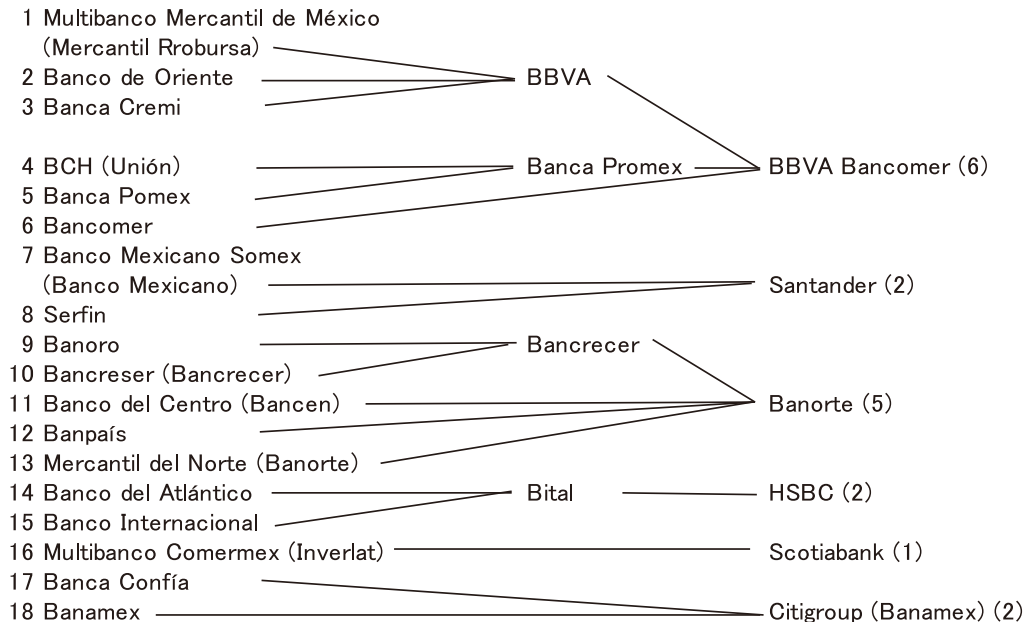
（出所） Inter-American Development Bank, Latin American and Caribbean Macro Watch
 注） その他投資には、短期・長期信用供与、銀行預金、売掛け債権、買掛け債務等が含まれる。

順調に見えたメキシコ経済ではあったが、1994年にその状況は一変する。1994年2月にメキシコ南部で先住民による武装反乱が発生し、同3月には大統領選挙の候補が暗殺されるという事件が発生した。これによりカントリーリスクの懸念が表面化することになり、また同時期の1994年11月にアメリカの公定歩合が0.75%に引き上げられたことから、カントリーリスクが潜在化するメキシコよりもアメリカへ投資するインセンティブが増加し、メキシコペソの通貨安懸念が発生することになった。1994年当時、メキシコは固定為替相場制を採用していたため、急激な資本流出が発生した場合、為替介入による固定相場維持が必要となるが、資本流出度合いによっては外貨準備が枯渇し、固定相場の維持が不可能となる可能性があった。

こうした状況を受けて、メキシコ政府は1994年12月20日に通貨切り下げをアナウンスし、その後、通貨介入によって相場維持を図ったが、投資家が一斉に投資を引き揚げたため、これに対抗する外貨準備が十分ではなかったことから、1994年12月22日に、メキシコは変動相場制へ移行することとなり、メキシコペソは大幅に減価することとなった。結果的には市場の切り下げ圧力により、1か月後には65%のメキシコペソ急落となった。この間の外貨準備は、1993年12月末の263億ドルから1994年12月末の64億ドル、1995年1月末の35億ドルにまで急落することとなり、メキシコ国債（テソボノス等）の償還問題が国際金融市場で懸念されることとなり、最終的には国際機関、米国、日米欧の民間銀行が総計500億ドルを超える緊急支援を実施したことで、危機を回避した。国際的な支援を受けたことでメキシコは、極めて厳しい財政・金融政策を強いられることとなり、1995年の経済成長率は-5.7%、インフレ率は35%を記録し、1995年～1999年までインフレ率は2桁を記録することとなる⁽⁷⁾。

1994年の金融危機後には、銀行セクターを立て直すための様々な施策が行われている。1994年には既に外資銀行の参入が可能になっていたが、金融危機後の1995年には外資規制の大幅な変更が行われ積極的な外資資本の受け入れを可能にした⁽⁸⁾。また同年には初の信用情報機関である Buró de Crédito が設立され、脆弱な情報管理システムの強化が積極的に行われた。その後も金融改革は継続的に行われ、1999年には自由貿易協定を締結した国で設立された銀行に対する外資出資比率、外資の占有率の上限が撤廃され、2000年前半にかけて市場の自由化の度合いが加速し、欧米金融グループによるメキシコ金融市場への進出が加速した⁽⁹⁾（図3）。

図3 メキシコの主要商業銀行における民営化後の合併・買収の軌跡



注) 図中の Banorte のみメキシコ資本⁽¹⁰⁾。

(出所) Chavarin [2010] Figura 3.2, p.68

4. 外資系銀行の占有とその影響

1982年以前のメキシコにおける銀行は、当局の規制により外資の参入を防ぐものであり、多くが地場銀行であったため、それぞれの資本は決して大きいものではなかった。そのため、外生的なショックには決して強靱とは言えず、操業基盤はむしろ脆弱なものであった。1982年の債務危機でその脆弱性は露見することとなり、統廃合が加速した。54行あった商業銀行は18行に統合され国有化されたものの、1994年の外資系金融機関への市場開放以降の外資系金融機関の参加により、銀行数は増加している。1992年時点では20行であった商業銀行数は、1994年の外資系金融機関への市場開放により、28行に増加している。また、1995年の外資出資比率規制の改定を背景に、日本からも当時の三菱銀行や富士銀行がメキシコ金融市場に参入し、同年の商業銀行数は一気に45行まで増加し、1994年から1995年の1年間で17行の参入があった。その後、1996年に47行まで増加したものの、1997年以降は減少し、2007年以降、再度増加に転じることとなる(表1)。

表1 メキシコの銀行数と新銀行 (1992年～2008年)

年	銀行数	新銀行	
1992	20		
1993	21	Interacciones	Quadrum
1994	28	Santander	Invex
		Inbursa	Industrial
		IXE	
		Mifel	
1995	45	J.P.Morgan	Bank of Tokyo-Mitsubishi
		Bank of America México	A.B.N.Amoro Bank
		Afirme	B.N.P
		Del Bajío	Anáhuac
		Bank of Boston	Republic National Bank of New York
		ING Bank	Société Generale
		Banregio	Fuji Bank
		Chase Manhattan	
		Dresdner Bank	
1996	47	Bansi	
		American Express	First Chicago
1997	42	Alianza	National Bank
		Comercial Bank	
1998	40	G.E.Capital	
1999	37		
2000	36	BBVA Bancomer Servicios	Deutsche Bank
		HSBC	
2001	32		
2002	33	Azteca	Azteca
2003	32		
2004	30		
2005	29		
2006	31	Compartamos	Monex
		Barclays Bank	Autofin México
2007	40	Multiva	Prudencial
		Fácil	Regional
		Amigo	Wal-Mart México Adelante
		Ahorro Famsa	UBS Bank
		Bancoppel	
2008	43	Consultoría Internacional	New York Mellon
		The Royal Bank of Scotland	Volkswagen Bank

(出所) Chavarín [2010] Cuadro 4.1, p.115

こうした一連の市場開放の影響で、外資系金融機関のメキシコ市場でのプレゼンスは飛躍的に増している。1995年以降、外資系金融機関のメキシコ金融市場への参入が加速され、特に2000年以降外資系金融機関の活動は顕著となり、その結果、総資産ベースで見た場合、2009年時点での主要10商業銀行の内5行は外資系金融機関となっている(表2)。

表2 メキシコの主要10商業銀行概要（2009年時点）

銀行名	出資国および外国銀行	総資産		貸し付け		預金		支店		自己資本比率
		金額	構成比率	金額	構成比率	金額	構成比率	数	構成比率	
BBVA Bancomer	スペイン BBVA	1,124	24	551	28	581	25	1,838	18	15.0
Banamex	アメリカ Citygroup	994	21	276	15	383	17	1,590	15	17.6
Santander Serfin	スペイン BSCH	645	14	219	12	288	13	1,054	10	13.4
Banorte	メキシコ -	541	11	220	12	269	12	1,076	10	15.6
HSBC	英国 HSBC	403	9	160	9	244	11	1,190	11	13.4
Inbrusa	メキシコ -	201	4	155	8	143	6	98	1	21.0
Scotiabank Inberlat	カナダ Scotiabank	152	3	97	5	112	5	597	6	15.9
Banco del Bajío	メキシコ -	72	2	47	3	53	2	187	2	15.7
IXE Banco	メキシコ -	67	1	21	1.1	29	1	146	1	16.7
Banco Azteca	メキシコ -	61	1	22	1	49	2	1,179	11	13.8

（出所）中畑〔2010〕 p.67

特に上位3行の外資系金融機関の総資産占有率は高く、約59%に上り、5位の HSBC 銀行、7位の Scotiabank 銀行を含めると外資系金融機関だけで約71%の総資産占有率を得ている。メキシコ系金融機関は上位10行の内5行存在するが、5行合計の総資産占有率は僅か約19%しかない。上位行で唯一のメキシコ資本である Banorte 銀行の総資産占有率は約11%となっているものの、そのプレゼンスは決して高いとは言えない。貸付額にもその特徴は表れている。上位3行の外資系金融機関の貸付額は約55%であり、5位の HSBC 銀行、7位の Scotiabank 銀行を含めると外資系金融機関だけで約69%を占めているというのが現状である。これらの数字は、メキシコ政府が銀行部門の立て直しに外資金融機関を積極的に活用した結果であり、地場銀行の脆弱さをカバーした結果と言える。外資銀行導入による銀行健全化は直近の数字にも表れている（表3）。

表3 総資産上位10行の現状（2016年6月時点）

	銀行名	総資産シェア (%)	ROA (%)	不良債権比率 (%)
1	BBVA bancomer	22.6	1.87	2.35
2	Banco Santander (México)	15.3	1.27	2.96
3	Banamex	13.5	0.95	1.47
4	Banorte	11.9	1.54	2.33
5	HSBC México	7.6	-0.18	4.20
6	Scotiabank Inverlat	4.3	1.57	2.65
7	Inbursa	4.0	1.59	2.58
8	Interacciones	2.2	1.31	0.09
9	Banco del Bajío	2.2	1.14	1.35
10	Afirme	1.7	0.18	4.19
	その他37行	14.7		

注) 図表中の網掛けは外資系金融機関

(出所) 秋山〔2016〕図表6

総資産ベースで見ると、商業銀行上位10行の内、5行を占める外資系金融機関の外資系金融機関の占有率は約73.3%であり、2009年と比較してもあまり変化は無い。注目すべきはROAの数値であり、5位のHSBC銀行を除いて概ね好調である。不良債権比率も4%台を上限に2%台が多くなっている。自己資本比率においても、概ね14 - 16%台と国際統一基準である8%を大きく上回っており、2度の金融危機を糧に安定した状況を保持している。一方で、外資系金融機関の場合、母国の状況や進出国の状況次第で業務縮小などを行う可能性があるが、IMFの見解ではメキシコの外資系金融機関が親銀行の資本に依存してない点、資金調達に占める国内預金の比率が高い点等を考慮して、そうしたリスクは低いとしている⁽¹¹⁾。

他方、貸出構造にはいくつかの課題がある。2016年7月時点での部門別貸出は、サービス業などの鉱工業以外の企業：31%、鉱工業：24%、個人：26%、不動産：20%となっている。企業融資で見た場合、メキシコでは全体の90%以上が零細企業となっており、外資系金融機関の融資対象になりづらいという背景がある。主に外資系金融機関の融資対象は小企業以上であり、企業融資の面では対象は非常に限られたものとなっている。また、個人融資に関しても、メキシコ労働者の多くが外資系金融機関の対象になりづらい状況がある。その理由は、労働者全体の約6割がインフォーマル部門に従事しており、多くが非正規雇用となっているからである（表4）。

表4メキシコの就業人口の就業形態と正規・非正規別内訳（2014年第3四半期）

就労の場・事業所		従属・報酬労働者				雇用主		自営業・専門職		無報酬労働者		小計		正規・非正規 合計
		給与労働者		非給与労働者										
		非正規	正規	非正規	正規	非正規	正規	非正規	正規	非正規	正規			
インフォーマル部門		3,758	-	777	-	803	-	7,052	-	1,113	-	13,503	-	13,503
就業人口に占める比率		7.6	-	1.6	-	1.6	-	14.2	-	2.2	-	27.2	-	27.2
インフォーマル以外	家内労働（報酬あり）	2,218	62	19	0	-	-	-	-	-	-	2,238	62	2,300
	就業人口に占める比率	4.5	0.1	0.0	0.0	-	-	-	-	-	-	4.5	0.1	4.6
	企業、政府、団体	5,323	17,635	805	182	-	977	-	1,344	656	-	6,784	20,138	26,922
	就業人口に占める比率	10.7	35.5	1.6	0.4	-	2.0	-	2.7	1.3	-	13.6	40.5	54.2
	農牧業	2,231	303	113	12.0	-	314	2,812	-	1,192	-	6,348	629	6,977
	就業人口に占める比率	4.5	0.6	0.2	0.0	-	0.6	5.7	-	2.4	-	12.8	1.3	14.0
小計		13,531	18,001	1,714	195	803	1,291	9,864	1,344	2,961	-	28,873	20,830	49,702
就業人口に占める比率		27.2	36.2	3.4	0.4	1.6	2.6	19.8	2.7	6.0	-	58.1	41.9	100
合計		31,531		1,909		2,094		11,208		2,961		49,702		-
就業人口に占める比率		63.4		3.8		4.2		22.6		6.0		100		-

（出所）ジェトロ「通商弘報」添付資料

加えてインフォーマル部門の労働者は、いわゆる社会保険に加入できておらず、賃金水準も低水準にある。メキシコでは、法定最低賃金が制定されており、毎年11月に政府、労働組合、経済界の代表により構成される国家最低賃金委員会（CONASAMI）によって決定され、翌年1月に発表される⁽¹²⁾。法定最低賃金のコンセプトは、不自由なく日常生活を過ごせる水準とされているが、実際には法定最低賃金では不十分であり、通常、法定最低賃金に乗数をかけたもので給与が算出される。国立統計地理情報院（INEGI）が実施したアンケート調査「世帯収入および支出統計2014（Encuesta nacional de ingresos y gastos de los hogares 2014）」では、収入階層別に全体を10分割したアンケート結果を公表している。これによると、世帯数別収入では、法定最低賃金の2ヶ月分⁽¹³⁾までを得ている貧困層世帯（Ⅰ～Ⅲ階層）が全体の約14%、2.01～6ヶ月分を得ている中間層世帯（Ⅳ～Ⅶ階層）が約56%、6.01ヶ月以上を得ている富裕層世帯（Ⅷ～Ⅹ階層）が約36%となっている。一方、階層別総収入額で見た場合、格差の大きさが際立っている。法定最低賃金の8.01ヶ月分以上を得ている世帯（Ⅹ階層）の割合は全体の23.6%であるが、総収入額で見ると56.5%を得ており、全体の半分以上を占めている（表5）。

表5 3か月毎収入階層別世帯数および総収入額（2014年）

収入別階層		貧困層			中間層				富裕層			合計
		0-1	1.01 -1.5	1.51-2	2.01-3	3.01-4	4.01-5	5.01-6	6.01-7	7.01-8	8.01-	
世帯数		934,423	1,519,014	1,966,873	4,691,328	4,473,136	3,782,064	2,895,551	2,243,900	1,683,568	7,481,145	31,671,002
割合		3.0%	4.8%	6.2%	14.8%	14.1%	11.9%	9.1%	7.1%	5.3%	23.6%	1
総収入額		4,068	11,164	20,120	68,630	91,456	99,482	93,227	85,359	74,061	711,115	1,258,682
割合		0.3%	0.9%	1.6%	5.5%	7.3%	7.9%	7.4%	6.8%	5.9%	56.5%	1
小計	世帯数	4,420,310			15,842,079				11,408,613			31,671,002
	割合	0			1				0			1
	総収入額	35,351			352,796				870,535			1,258,682
	割合	0			0				1			1

（出所）INEGI「Encuesta nacional de ingresos y gastos de los hogares 2014」を基に筆者作成

また、銀行口座所持率も都市圏ではある程度の水準には達しているが、メキシコ全体で見ると銀行口座を持たない者も少なくない⁽¹⁴⁾。このことから、個人貸出においても、銀行口座不所持の者は外資系金融機関での融資申請には困難が予想され、このことが個人向け銀行融資の増加を阻む要因の一つとなっている。個人向け融資で見た場合、外資系金融機関のプレゼンスは金額ベースでは大きいものの、貸出件数ではそれほど大きくない。個人向け融資の上位行を見ると、上位12行の内、4行が外資系金融機関であり、貸出総額に占める割合は約64%となっている一方、貸出件数は全体の約13%にとどまっていることから、1件当たりの貸出金額が地場銀行に比べてかなり大きくなっていることがわかる（表6）。

表6 主要金融機関別個人向け融資残高状況（2015年8月）

金融機関名	融資数	認可済み融資残高 (単位: 百万ペソ) *変化率は実質 ベース	融資のオリジネーションに対する平均額(単位: ペソ) *変化率は実質 ベース	融資平均期間 (単位: 月)	加重平均残高利率 *変化率は単純な変化の差異	平均残高分布率 *変化率は単純な変化の差異
システム全体	7,131,793	110,943	21,830	20	33.7	25
変化率(%)	-4.8	18.8	28.1	5.5	-4.8	-7.0
Santander	99,605	13,807	207,181	45	21.5	20.5
変化率(%)	1551.6	3383.7	37.9	-7.5	5.9	5.5
Inbursa	351,288	10,702	37,466	38	23	23.5
変化率(%)	115.8	118	8.5	-1.3	0.6	0
Banamex	515,940	37,121	102,314	39	23.9	23
変化率(%)	6.5	19.2	8.0	3.9	-2.4	-2.0
HSBC	71,872	3,679	68,584	34	25.6	27.1
変化率(%)	21.7	42	6.1	-2.6	-4.9	-5.8
BBVA Bancomer	261,097	16,535	88,973	57	27.5	26
変化率(%)	-4.9	-7.2	4.1	2.2	0.2	2.0
Consubanco	169,600	4,011	27,724	41	45.9	44.6
変化率(%)	4.3	15	6.9	-2.2	-3.6	-3.4
Azteca	393,493	12,541	50,36	13	53.4	55.6
変化率(%)	-15	-36.2	-12	-1.4	-3.7	-0.2
Afirme	18,482	400	26,247	25	57.2	56
変化率(%)	9.5	27.5	13.2	1	-0.7	0
Bancoppel	403,993	1,889	6,350	12	60.8	60.8
変化率(%)	28.9	36.1	11.9	0	0	0
Credito Familiar	97,704	3,173	36,114	30	62	60
変化率(%)	-6.3	8.8	15.6	7	-0.2	3.0
Compartamos	528,520	5,152	14,186	11	79.3	82
変化率(%)	29.5	33.3	2.1	-2.1	7.0	12.8
Banco Famsa	629,355	1,676	3,241	15	79.4	75
変化率(%)	-24.3	-4.9	17.8	-7.5	-7.1	-35
Dondé	23,251	36	1,773	11	92	90
変化率(%)	51.7	54.9	8.7	-9.7	11.5	9.5
Finandera Ayudamos	26,093	222	10,134	14	101	103
変化率(%)	6.9	21.7	11.3	-0.8	-2.3	-1.5

(出所) Banco de México「Indicadores Básicos de Créditos Personales : Datos a agosto de 2015」

注) 網掛けは外資系金融機関

原則として、外資系金融機関の個人向け融資の顧客は自行に口座を所持する者であり、口座の入出金の履歴を確認できる、ある程度の優良顧客が対象となっているため、融資期間も地場銀行に比べて長期となっている。一方、主要行での融資を申請できない者は地場銀行、もしくはマイクロファイナンス機関へ申請することになる。これらの者は、正規雇用には就けない者や、インフォーマル部門に従事する者が多くを占めており、デフォルトリスクは当然高まる。その為、金利水準も高まり、融資期間も比較的短く設定される傾向にある。当然のことながら、銀行側としてはある程度の安定した収入を所持する者を対象として融資を行うので、非正規やインフォーマル部門に従事する者への融資のインセンティブは現時点では高くなく、状況改善の為には就業環境や雇用契約の改善（非正規雇用から正規雇用への転換）

が必要となる。今後、外資系金融機関の個人向け融資や企業向け融資の増加に向けては、自行での努力には限界があり、政府による雇用環境の改善、経済状況の向上が必要不可欠となる。

5. 結語

本稿では、1982年に発生した債務危機後のメキシコにおける銀行再編について概観してきた。債務危機以前に操業していた50以上あったメキシコ地場銀行は、18行に統合され脆弱な操業基盤から国有化されるに至った。金融システムの健全化、操業基盤強化のためにメキシコでは外資金融機関に門戸を広げ、金融自由化を実施した結果、1994年以降多くの外資金融機関がメキシコ市場へ参入することとなった。外資金融機関の参入は更なる統廃合を呼び、現在では総資産額の70%以上を占めるに至り、メキシコ金融市場でのプレゼンスは非常に大きいものとなっている。こうした一連の流れから、外資系金融機関はメキシコの金融システム健全化に一役を買ったかたちになっており、各行とも順調にメキシコでの操業を行っている。また、外資系金融機関は本国の状況および進出国での経済状況等により、業務縮小をするインセンティブが多分にあるが、メキシコの場合、親銀行の資本に依存していない点、資金調達に占める国内預金の比率が高い点等から、早急に資本の引き上げ、活動の縮小のリスクは低いと見られている。一方、貸出行動においては若干の課題を残している。企業融資に関しては、メキシコでは多くが零細企業となっているため、外資系金融機関が融資を促進するインセンティブに欠けている。また、契約形態、インフォーマル部門従事者の割合が高いことから、個人向け融資に関してもある程度慎重にならざるを得ない状況にある。これらの者には、地場銀行やマイクロファイナンス機関が補完をしているが、金利負担や融資期間を考えると、安定した資金供給の為に更なる外資系金融機関による対処が望ましい。ただし、リスクテイクの観点からは、現在の外資系金融機関の活動はある種正当なものであり、融資環境改善の為に、政府による雇用環境や契約形態の改善が必要である。これらの点については今後の研究課題である。現時点では、外資系金融機関のプレゼンスは大きいものであり、短期間でこの構造が変化する可能性は高くなく、今後もメキシコ金融市場は外資系金融機関に依存した形になる。メキシコ経済向上の為に、これらの金融機関が融資や投資をしやすい環境整備が望まれる。

〔注記〕

- (1) メキシコでは1982年の債務危機の影響は大きく、大幅なインフレを記録している。特に影響が大きかったのは1983年：101%、1987年：131%、1988年：113%、となっている。(IMF-World Economic Outlook Databases)

- (2) 当時のブレディ米国財務長官が呼びかけた、ラテンアメリカ対外債務危機解決策であり、主に、①債権銀行による債権償却、②長期債への債権組換え、③低金利によるニューマネー供与等の3選択肢を推進する政策,がある。
- (3) 具体的には、国営企業の民営化・売却、金融制度の自由化、インフラ整備等を実施し、国内経済の自由化を推進し、1994年のNAFTA（北米自由貿易協定）発効の基礎を築いた。
- (4) World Bank [1988] p.108, OECD [1992] pp.170, 239.
- (5) 競売による売却収入は130億を超えており、この額は各銀行の平均値で、簿価の約3倍で売却されたことを示している。Reynolds,C. [1994] pp.539-540, 548.
- (6) 棟近 [1999] p.112
- (7) IMF-World Economic Outlook Databases
- (8) 外資出資比率の上限が、30%から49%へ引き上げられ、外資銀行の資本ベースの占有率が、1行当たり1.5%から6%へ引き上げられた。
- (9) 外資銀行の総資産ベースの占有率は、1993年：0.5%、1998年：24%、2002年：82%と推移している（秋山 [2016] p.2）
- (10) BBVA Bancomer：スペイン資本、Santander：スペイン資本、HSBC：イギリス資本、Scotiabank：カナダ資本、Citigroup (Banamex)：アメリカ資本となっている。
- (11) 秋山 [2016] p.3
- (12) 2017年の法定最低賃金は日額80.04ペソとなっている。（2017年4月1日のレート“1ペソ＝5.95円”で換算した場合、80.04ペソは約476円となる）
- (13) ここで言う法定最低賃金の2ヶ月分とは、日額に60をかけたものになる。具体的には、法定最低賃金を日額80ペソとした場合、1か月分は80ペソ×30日＝2,400ペソとなる。2ヶ月分は、80ペソ×60日＝4,800ペソとなる。1ペソ＝5.95円（2017年4月1日現在）で換算した場合、1か月分（2,400ペソ）＝14,280円、2ヶ月分（4,800ペソ）＝28,560円となる。
- (14) メキシコでは、過去の金融危機の経験から銀行に不信感を持つ者も少なくなく、銀行口座を所持しない者も多数存在する。また、給与支払いが伝統的に小切手支払となっており、近年口座振り込みを活用する企業等が増えてきたものの、未だに小切手で受け取る者も多い。個人的な事情としては、非正規労働契約の労働者が多数いることから、例えば、割賦で購入した代金の支払いを口座引き落としにした場合、失業や転職をした場合に過去の賃金水準を維持できないケースが考えられ、割賦金の引き落としにより生活費が不足する事態が想定されている。その為、銀行引き落としではなく、その都度振り込みによる支払いを選択するインセンティブが生じ、銀行振り込みによる給与受け取りを選択しない者が多数存在する。これらの事が、銀行口座開設、活用にマイナスの影響を及ぼしていることは十分に考えられる。

〔参考文献〕

- 秋山文子 「メキシコ銀行セクターの概観」、国際金融トピックス、No.290、国際通貨研究所、2016年、pp.1-5
- 中畑貴雄 『メキシコ経済の基礎知識』、ジェトロ、2010年3月
- 西島章次「第4章ラテンアメリカの金融システムと経済発展」、『神戸大学経済経営研究所双書』、No.62、神戸大学経済経営研究所、2002年、pp.1-20
- 久松佳彰・佐藤桃「メキシコ銀行部門の再編」、『ラテンアメリカ論集』、36号、ラテン・アメリカ政経学会、2002年、pp.17-32
- 棟近みどり「メキシコ危機における銀行システム不安」、『経済論集』、24巻、2号、東洋大学、1999年、pp.99-128
- Chavarín, R. *Banca, Grupos económicos y gobierno corporativo en México*, Centro de Estudios Espinosa Yglesias, 2010
- Ferreiro, J., Gómez, C., Rodríguez, C., and Correa, A. "Liberalización financiera en América Latina : efectos sobre los mercados financieros locales" , *Economiaz*, No.66, Eusko Jaurlaritza Gobierno Vasco, 2007, pp.266-293
- Gruben, W., and Robert, M. "Liberalization, privatization and crash : Mexico's banking system in the 1990s" , *Federal Reserve Bank of Dallas Economic Review*, First Quarter, 1997, pp.21-30,
- Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI) "Encuesta nacional de ingresos y gastos de los hogares 2014" , 2015
- Musacchio, A. "Mexico's financial crisis of 1994-1995" , *Harvard Business School Working Paper*, No. 12-101, May 2012
- OECD "OECD Economic Surveys : Mexico 1991/1992" ,1992
- Reynolds, C. "The Reprivatization of Banking in Mexico" , in Aoki, Masahiko and Hugh Patrick eds. *The Japanese main bank system : its relevance for developing and transforming economies*, *Oxford University Press*, 1994, pp.524-551,
- Salgado, M. and Miranda, S. "Reformas financieras en México y su efecto limitado sobre la intermediación financiera" , *Economía actual*, Vol. VI, Núm. 3, Universidad Autónoma del Estado de México, 2013, pp.33-36,
- Tornell, A., Westermann, F. and Martínez, L. "Liberalization, growth and financial crises : Lessons from Mexico and the developing world" , *Bookings Papers on Economic Activity* , No.2, 2003, pp.1-69
- Turrent, E. "Historia sintética de la banca en México" , Banco de México, 2007

メキシコの金融システム　－銀行部門の民営化と金融自由化の変遷－

World Bank “Mexico : towards growth, structural reform and macroeconomic stability in Mexico” , two vols., report no. 7525-ME, december 1988

執筆者紹介（掲載順）

2017年9月現在

手代木 琢 磨	産業能率大学情報マネジメント学部 元教授
勝 間 豊	産業能率大学情報マネジメント学部 准教授
三 村 孝 雄	産業能率大学経営学部 教授
木 村 剛	産業能率大学経営学部 准教授
柿 原 智 弘	グアダラハラ大学経済経営学部 教授

ご協力いただいた査読者の方々にお礼申し上げます。

産業能率大学 紀要

第38巻1号（通巻72号）

2017年9月30日 発行

編 集 産業能率大学紀要審査委員会

発 行 産業能率大学

〒158-8630 東京都世田谷区等々力6-39-15

経営学部 現代ビジネス学科

マーケティング学科

〒259-1197 神奈川県伊勢原市上粕屋1573

情報マネジメント学部

現代マネジメント学科

発行事務局 産業能率大学 自由が丘キャンパス図書館

〒158-8630 東京都世田谷区等々力6-39-15

T E L 03 (3704) 7653

印 刷 渡辺印刷株式会社

〒152-0031 東京都目黒区中根2-7-1

T E L 03 (3718) 2161

SANNO University Bulletin

School of Information-Oriented Management
School of Management

Vol. 38 No.1 September 2017

Research Note

The Report on Fundamental Style of Chebyshev Polynomials

Takuma Teshirogi

Yutaka Katuma 1

A Study on Survival Strategies of Small and Medium Enterprises:
Should the SMEs expand their business overseas or remain in Japan?

Takao Mimura29

Mexico's Financial System:
Privatization of the Banking Sector and the Transition to Financial
Liberalization

Tsuyoshi Kimura

Tomohiro Kakiyara 47