［研究ノート］

Sanno University Bulletin Vol. 38 No. 1 September 2017

チェビシェフ多項式の基本型について

The Report on Fundamental Style of Chebyshev Polynomials

手代木　琢磨

Takuma Teshirogi

勝間　豊

Yutaka Katuma

Abstract

In our previous paper, the secular equation of quantum chemistry was extended to the special determinants, and the determinants are related to the first and the second Chebyshev polynomials . In this paper, the fundamental style of Chebyshev polynomials are defined, and new functions derived from the fundamental style are discussed.

1. 序　論

前報（手代木＆勝間2016）において、量子化学の単純ヒュッケル法で使われる永年方程式から誘導される二種類の行列式がチェビシェフの第一種および第二種の多項式と深く関係していることを報告した。現報では第一種および第二種チェビシェフ多項式基本型を定義し、この基本型から誘導されるいくつかの関数の性質を明らかにする。

2. チェビシェフ多項式基本型の定義

前報（ 手代木＆勝間 2016）において、第一種の行列式 $\left|\mathbf{X_N}\right| = \prod_{k=1}^{N}\left(x - 2\sqrt{ab}\cdot\cos\frac{k}{N+1}\pi\right)$ は

$2\sqrt{ab} = 1$ とおけば、第二種のチェビシェフ多項式 $U_N(x)$ と

$U_N(x) = 2^N \cdot \left|\mathbf{U_N}\right| = 2^N \cdot \prod_{k=1}^{N}\left(x - \cos\frac{k}{N+1}\pi\right)$ なる関係があることを報告した。

2017年1月23日　受理

また第一種のチェビシェフ多項式 $T_N(x)$ は $T_N(x) = 2^{N-1} \cdot \prod_{k=1}^{N} \left(x - \cos \frac{2k-1}{2N} \pi \right)$ となることも報告した。そこで $2\sqrt{ab} = \gamma$ とおいた関数を第一種のチェビシェフ多項式基本型 ${}_0T_N(x)$、および第二種のチェビシェフ多項式基本型 ${}_0U_N(x)$ と定義する。

$$\begin{cases} {}_0T_N(x) = 2^{N-1} \cdot \prod_{k=1}^{N} \left(x - \gamma \cos \frac{2k-1}{2N} \pi \right) & (N \geq 2) \\ {}_0U_N(x) = 2^{N} \cdot \prod_{k=1}^{N} \left(x - \gamma \cos \frac{k}{N+1} \pi \right) & (N \geq 2) \end{cases}$$

例えば第一種のチェビシェフ多項式基本型 ${}_0T_N(x)$ は次のようになる。ただし $\gamma \neq 0$ で、この基本型の間には ${}_0T_{2N}(x) + \gamma^{2N} = 2\{ {}_0T_N(x) \}^2$ の関係があり、$\gamma^2 = -1$ でも成立する。

$${}_0T_2(x) = 2x^2 - \gamma^2 \qquad {}_0T_3(x) = 4x^3 - 3\gamma^2 x$$

$${}_0T_4(x) = 8x^4 - 8\gamma^2 x^2 + \gamma^4 \qquad {}_0T_5(x) = 16x^5 - 20\gamma^2 x^3 + 5\gamma^4 x$$

$${}_0T_6(x) = 32x^6 - 48\gamma^2 x^4 + 18\gamma^4 x^2 - \gamma^6 \qquad {}_0T_7(x) = 64x^7 - 112\gamma^2 x^5 + 56\gamma^4 x^3 - 7\gamma^6 x$$

$${}_0T_8(x) = 128x^8 - 256\gamma^2 x^6 + 160\gamma^4 x^4 - 32\gamma^6 x^2 + \gamma^8$$

$${}_0T_9(x) = 256x^9 - 576\gamma^2 x^7 + 432\gamma^4 x^5 - 120\gamma^6 x^3 + 9\gamma^8 x$$

$${}_0T_{10}(x) = 512x^{10} - 1280\gamma^2 x^8 + 1120\gamma^4 x^6 - 400\gamma^6 x^4 + 50\gamma^8 x^2 - \gamma^{10}$$

$${}_0T_{11}(x) = 1024x^{11} - 2816\gamma^2 x^9 + 2816\gamma^4 x^7 - 1232\gamma^6 x^5 + 220\gamma^8 x^3 - 11\gamma^{10} x$$

$${}_0T_{12}(x) = 2048x^{12} - 6144\gamma^2 x^{10} + 6912\gamma^4 x^8 - 3584\gamma^6 x^6 + 840\gamma^8 x^4 - 72\gamma^{10} x^2 + \gamma^{12}$$

また第二種のチェビシェフ多項式基本型 ${}_{0}U_{N}(x)$ は次のようになる。ただし $\gamma \neq 0$ である。

$${}_{0}U_{2}(x) = 4x^{2} - \gamma^{2} \qquad {}_{0}U_{3}(x) = 8x^{3} - 4\gamma^{2}x$$

$${}_{0}U_{4}(x) = 16x^{4} - 12\gamma^{2}x^{2} + \gamma^{4} \qquad {}_{0}U_{5}(x) = 32x^{5} - 32\gamma^{2}x^{3} + 6\gamma^{4}x$$

$${}_{0}U_{6}(x) = 64x^{6} - 80\gamma^{2}x^{4} + 24\gamma^{4}x^{2} - \gamma^{6} \qquad {}_{0}U_{7}(x) = 128x^{7} - 192\gamma^{2}x^{5} + 80\gamma^{4}x^{3} - 8\gamma^{6}x$$

$${}_{0}U_{8}(x) = 256x^{8} - 448\gamma^{2}x^{6} + 240\gamma^{4}x^{4} - 40\gamma^{6}x^{2} + \gamma^{8}$$

$${}_{0}U_{9}(x) = 512x^{9} - 1024\gamma^{2}x^{7} + 672\gamma^{4}x^{5} - 160\gamma^{6}x^{3} + 10\gamma^{8}x$$

$${}_{0}U_{10}(x) = 1024x^{10} - 2304\gamma^{2}x^{8} + 1792\gamma^{4}x^{6} - 560\gamma^{6}x^{4} + 60\gamma^{8}x^{2} - \gamma^{10}$$

$${}_{0}U_{11}(x) = 2048x^{11} - 5120\gamma^{2}x^{9} + 4608\gamma^{4}x^{7} - 1792\gamma^{6}x^{5} + 280\gamma^{8}x^{3} - 12\gamma^{10}x$$

$${}_{0}U_{12}(x) = 4096x^{12} - 11264\gamma^{2}x^{10} + 11520\gamma^{4}x^{8} - 5376\gamma^{6}x^{6} + 1120\gamma^{8}x^{4} - 84\gamma^{10}x^{2} + \gamma^{12}$$

両関数の関係は ${}_{0}T_{N}(x) = \dfrac{{}_{0}U_{N}(x) - \gamma^{2} \cdot {}_{0}U_{N-2}(x)}{2}$ 、 $\dfrac{d}{dx}\left[{}_{0}T_{N}(x)\right] = N \cdot {}_{0}U_{N-1}(x)$ および ${}_{0}T_{N}(x) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{{}_{0}U_{2N-1}(x)}{{}_{0}U_{N-1}(x)}$ となる。また $\{ {}_{0}T_{N+1}(x) \}^{2} + (\gamma^{2} - x^{2}) \cdot \{ {}_{0}U_{N}(x) \}^{2} = \gamma^{2(N+1)}$ を利用して $\{ {}_{0}T_{N+1}(x) \}^{2} + (x^{2} - \gamma^{2}) \cdot \{ {}_{0}U_{N}(x) \}^{2} = {}_{0}T_{2N+2}(x)$ となり、$\gamma^{2} = -1$ でも成立する。

3. チェビシェフ多項式基本型の微分方程式

3. 1 第一種のチェビシェフ多項式基本型の微分方程式

第一種のチェビシェフ多項式の基本型は次のようになり、この関数の微分方程式を求める。

$${}_{0}T_{N}(x) = \frac{N}{2} \cdot \sum_{k=0} \left\{ (-\gamma^{2})^{k} \cdot \frac{{}_{N-k}C_{k}}{N-k} \cdot (2x)^{N-2k} \right\} \quad (N - 2k \geq 0)$$

第一種のチェビシェフ多項式基本型の一階微分および二階微分は次のようになる。

$$\begin{cases} {}_{0}T_{N}(x)' = N \cdot \displaystyle\sum_{k=0} \left\{ (-\gamma^{2})^{k} \cdot {}_{N-1-k}C_{k} \cdot (2x)^{N-2k-1} \right\} & (N - 2k - 1 \geq 0) \\ {}_{0}T_{N}(x)'' = 2N \cdot \displaystyle\sum_{k=0} \left\{ (-\gamma^{2})^{k} \cdot (k+1) \cdot {}_{N-1-k}C_{k+1} \cdot (2x)^{N-2k-2} \right\} & (N - 2k - 2 \geq 0) \end{cases}$$

この結果と第一種のチェビシェフ多項式の微分方程式の類推から、 第一種のチェビシェフ多項式基本型

$$ {}_{0}T_N(x) = \frac{N}{2}\cdot\sum_{k=0}\left\{(-\gamma^2)^k\cdot\frac{{}_{N-k}C_k}{N-k}\cdot(2x)^{N-2k}\right\} = 2^{N-1}\cdot\prod_{k=1}^{N}\left(x-\gamma\cos\frac{2k-1}{2N}\pi\right) $$

の微分方程式は

$$ (1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_{0}T_N(x)'' - \frac{x}{\gamma^2}\cdot {}_{0}T_N(x)' + \frac{N^2}{\gamma^2}\cdot {}_{0}T_N(x) = 0 $$

となり $\gamma^2=-1$ でも成立する。

3. 2　第二種のチェビシェフ多項式基本型の微分方程式

第二種のチェビシェフ多項式の基本型は次のようになり、この関数の微分方程式を求める。

$$ {}_{0}U_N(x) = \sum_{k=0}\left\{(-\gamma^2)^k\cdot {}_{N-k}C_k\cdot(2x)^{N-2k}\right\} \qquad (\ N-2k\geq 0\ ) $$

第二種のチェビシェフ多項式基本型の一階微分および二階微分は次のようになる。

$$ \begin{cases} {}_{0}U_N(x)' = 2\cdot\sum_{k=0}\left\{(-\gamma^2)^k\cdot(k+1)\cdot {}_{N-k}C_{k+1}\cdot(2x)^{N-2k-1}\right\} & (\ N-2k-1\geq 0\ ) \\ {}_{0}U_N(x)'' = 4\cdot\sum_{k=0}\left\{(-\gamma^2)^k\cdot(k+1)(k+2)\cdot {}_{N-k}C_{k+2}\cdot(2x)^{N-2k-2}\right\} & (\ N-2k-2\geq 0\ ) \end{cases} $$

この結果と第二種のチェビシェフ多項式の微分方程式の類推から、 第二種のチェビシェフ多項式基本型

$$ {}_{0}U_N(x) = \sum_{k=0}\left\{(-\gamma^2)^k\cdot {}_{N-k}C_k(2x)^{N-2k}\right\} = 2^N\cdot\prod_{k=1}^{N}\left(x-\gamma\cos\frac{k}{N+1}\pi\right) $$

の微分方程式は

$$ (1-\frac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_{0}U_N(x)'' - \frac{3x}{\gamma^2}\cdot {}_{0}U_N(x)' + \frac{N(N+2)}{\gamma^2}\cdot {}_{0}U_N(x) = 0 $$

となり、$\gamma^2=-1$ でも成立する。

4. チェビシェフ多項式基本型拡張関数の微分方程式

4. 1　第一種のチェビシェフ多項式基本型拡張関数の微分方程式

偶数次の第一種のチェビシェフ多項式基本型 、例えば ${}_{0}T_4(x) = 8x^4 - 8\gamma^2x^2 + \gamma^4$ の場合は

${}_{0}T_4^{-1}(X) = X^4 - \dfrac{8}{\gamma^2}X^2 + \dfrac{8}{\gamma^4}$ を導入する。一般に ${}_{0}T_{2N}(x) = N\cdot\sum_{k=0}^{N}\left\{(-\gamma^2)^k\cdot\dfrac{{}_{2N-k}C_k}{2N-k}\cdot(2x)^{2(N-k)}\right\}$

から ${}_{0}T_{2N}^{-1}(X) = N\cdot\sum_{k=0}^{N}\left\{(-\dfrac{4}{\gamma^2})^k\cdot\dfrac{{}_{N+k}C_{N-k}}{N+k}\cdot X^{2(N-k)}\right\}$ が得られる。

この多項式の微分方程式を求める。${}_{0}T_{2N}(x)=(-\gamma^2)^N X^{-2N}\cdot {}_{0}T_{2N}^{-1}(X)$ であるが、係数を無視し、

${}_{0}T_{2N}(x)=X^{-2N}\cdot {}_{0}T_{2N}^{-1}(X)$ として計算する。$x=\dfrac{1}{X}$ とおくと、$\dfrac{dX}{dx}=-X^2$ となるので

$$\frac{d}{dx}[\,{}_{0}T_{2N}(x)\,]=X^{-2N+1}\cdot\left\{2N\cdot {}_{0}T_{2N}^{-1}(X)-X\cdot {}_{0}T_{2N}^{-1}(X)'\right\}$$ この式をもう一度微分して、

$$\frac{d^2}{dx^2}[\,{}_{0}T_{2N}(x)\,]=X^{-2N+2}\left\{X^2\cdot {}_{0}T_{2N}^{-1}(X)''-2(2N-1)\cdot X\cdot {}_{0}T_{2N}^{-1}(X)'+2N(2N-1)\cdot {}_{0}T_{2N}^{-1}(X)\right\}$$

これらの式を $(1-\dfrac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_{0}T_{2N}(x)''-\dfrac{x}{\gamma^2}\cdot {}_{0}T_{2N}(x)'+\dfrac{4N^2}{\gamma^2}\cdot {}_{0}T_{2N}(x)=0$ に代入して、

$$(X^2-\frac{1}{\gamma^2})\cdot {}_{0}T_{2N}^{-1}(X)''-\left\{2(2N-1)X-\frac{4N-1}{\gamma^2}\cdot\frac{1}{X}\right\}\cdot {}_{0}T_{2N}^{-1}(X)'+2N(2N-1)\cdot {}_{0}T_{2N}^{-1}(X)=0$$

奇数次の第一種のチェビシェフ多項式基本型、例えば ${}_{0}T_{5}(x)=16x^5-20\gamma^2x^3+5\gamma^4x$ の場合は、

${}_{0}T_{5}^{-1}(X)=X^4-\dfrac{4}{\gamma^2}X^2+\dfrac{16}{5\gamma^4}$ で、一般に ${}_{0}T_{2N+1}(x)=\dfrac{2N+1}{2}\cdot\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\left\{(-\gamma^2)^k\cdot\frac{{}_{2N+1-k}C_k}{2N+1-k}\cdot(2x)^{2(N-k)+1}\right\}$

から ${}_{0}T_{2N+1}^{-1}(X)=\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\left\{(-\frac{4}{\gamma^2})^k\cdot\frac{{}_{N+k+1}C_{N-k}}{N+1+k}\cdot X^{2(N-k)}\right\}$ が得られる。

この多項式の微分方程式を求める。${}_{0}T_{2N+1}(x)=(-\gamma^2)^N(2N+1)\cdot X^{-2N-1}\cdot {}_{0}T_{2N+1}^{-1}(X)$ であるが、

係数を無視して ${}_{0}T_{2N+1}(x)=X^{-2N-1}\cdot {}_{0}T_{2N+1}^{-1}(X)$ として計算する。

$$\frac{d}{dx}[\,{}_{0}T_{2N+1}(x)\,]=X^{-2N}\cdot\left\{(2N+1)\cdot {}_{0}T_{2N+1}^{-1}(X)-X\cdot {}_{0}T_{2N+1}^{-1}(X)'\right\}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}[\,{}_{0}T_{2N+1}(x)\,]=X^{-2N+1}\left\{X^2\cdot {}_{0}T_{2N+1}(X)''-4N\cdot X\cdot {}_{0}T_{2N+1}(X)'+2N(2N+1)\cdot {}_{0}T_{2N+1}(X)\right\}$$

これらの式を $(1-\dfrac{x^2}{\gamma^2})\cdot {}_{0}T_{2N+1}(x)''-\dfrac{x}{\gamma^2}\cdot {}_{0}T_{2N+1}(x)'+\dfrac{(2N+1)^2}{\gamma^2}\cdot {}_{0}T_{2N+1}(x)=0$ に代入し、

$$(X^2-\frac{1}{\gamma^2})\cdot {}_{0}T_{2N+1}^{-1}(X)''-(4N\cdot X-\frac{4N+1}{\gamma^2}\cdot\frac{1}{X})\cdot {}_{0}T_{2N+1}^{-1}(X)'+2N(2N+1)\cdot {}_{0}T_{2N+1}^{-1}(X)=0$$

N が偶数でも奇数でも ${}_0T_N^{-1}(X)$ は同じ微分方程式となるので、まず ${}_0T_N^{-1}(X)$ を列挙する。

$${}_0T_2^{-1}(X) = X^2 - \frac{1}{2\gamma^2} \qquad {}_0T_3^{-1}(X) = X^2 - \frac{4}{3\gamma^2}$$

$${}_0T_4^{-1}(X) = X^4 - \frac{8}{\gamma^2}X^2 + \frac{8}{\gamma^4} \qquad {}_0T_5^{-1}(X) = X^4 - \frac{4}{\gamma^2}X^2 + \frac{16}{5\gamma^4}$$

$${}_0T_6^{-1}(X) = X^6 - \frac{18}{\gamma^2}X^4 + \frac{48}{\gamma^4}X^2 - \frac{32}{\gamma^6} \qquad {}_0T_7^{-1}(X) = X^6 - \frac{8}{\gamma^2}X^4 + \frac{16}{\gamma^4}X^2 - \frac{64}{7\gamma^6}$$

$${}_0T_8^{-1}(X) = X^8 - \frac{32}{\gamma^2}X^6 + \frac{160}{\gamma^4}X^4 - \frac{256}{\gamma^6}X^2 + \frac{128}{\gamma^8}$$

$${}_0T_9^{-1}(X) = X^8 - \frac{40}{3\gamma^2}X^6 + \frac{48}{\gamma^4}X^4 - \frac{64}{\gamma^6}X^2 + \frac{256}{9\gamma^8}$$

$${}_0T_{10}^{-1}(X) = X^{10} - \frac{50}{\gamma^2}x^8 + \frac{400}{\gamma^4}x^6 - \frac{1120}{\gamma^6}X^4 + \frac{1280}{\gamma^8}X^2 - \frac{512}{\gamma^{10}}$$

$${}_0T_{11}^{-1}(X) = X^{10} - \frac{20}{\gamma^2}X^8 + \frac{112}{\gamma^4}X^6 - \frac{256}{\gamma^6}X^4 + \frac{256}{\gamma^8}X^2 - \frac{1024}{11\gamma^{10}}$$

$${}_0T_{12}^{-1}(X) = X^{12} - \frac{72}{\gamma^2}X^{10} + \frac{840}{\gamma^4}X^8 - \frac{3584}{\gamma^6}X^6 + \frac{6912}{\gamma^8}X^4 - \frac{6144}{\gamma^{10}}X^2 + \frac{2048}{\gamma^{12}}$$

この関数の微分方程式は次のようになる。この式は $\gamma^2 = -1$ でも成立する。

$$(X^2 - \frac{1}{\gamma^2}) \cdot {}_0T_N^{-1}(X)'' - \left\{ 2(N-1) \cdot X - \frac{2N-1}{\gamma^2} \cdot \frac{1}{X} \right\} \cdot {}_0T_N^{-1}(X)' + N(N-1) \cdot {}_0T_N^{-1}(X) = 0$$

この関数の因数分解は ${}_0T_N^{-1}(X) = \prod_{k=1}^{N} \left(X - \frac{1}{\gamma \cos \frac{2k-1}{2N}\pi} \right)$ $(N \geq 2\ , k \neq \frac{N+1}{2})$ となる。

また余弦の性質から $_0T_N^{-1}(X)=\prod_{k=1}\left(X^2-\dfrac{1}{\gamma^2\cos^2\dfrac{2k-1}{2N}\pi}\right)=\prod_{k=1}\left(X^2-\dfrac{1}{\gamma^2}-\dfrac{\tan^2\dfrac{2k-1}{2N}\pi}{\gamma^2}\right)$

となり、$_0T_N^{-1}(X)$ の X^2 に $X^2=Y^2+\dfrac{1}{\gamma^2}$ を代入し、得られる関数 $_0V^{-1}(Y)$ を下にまとめる。

$$_0V_2^{-1}(Y)=Y^2-\frac{1}{\gamma^2} \qquad _0V_3^{-1}(Y)=Y^2-\frac{1}{3\gamma^2}$$

$$_0V_4^{-1}(Y)=Y^4-\frac{6}{\gamma^2}Y^2+\frac{1}{\gamma^4} \qquad _0V_5^{-1}(Y)=Y^4-\frac{2}{\gamma^2}Y^2+\frac{1}{5\gamma^4}$$

$$_0V_6^{-1}(Y)=Y^6-\frac{15}{\gamma^2}Y^4+\frac{15}{\gamma^4}Y^2-\frac{1}{\gamma^6} \qquad _0V_7^{-1}(Y)=Y^6-\frac{5}{\gamma^2}Y^4+\frac{3}{\gamma^4}Y^2-\frac{1}{7\gamma^6}$$

$$_0V_8^{-1}(Y)=Y^8-\frac{28}{\gamma^2}Y^6+\frac{70}{\gamma^4}Y^4-\frac{28}{\gamma^6}Y^2+\frac{1}{\gamma^8}$$

$$_0V_9^{-1}(Y)=Y^8-\frac{28}{3\gamma^2}Y^6+\frac{14}{\gamma^4}Y^4-\frac{4}{\gamma^6}Y^2+\frac{1}{9\gamma^8}$$

$$_0V_{10}^{-1}(Y)=Y^{10}-\frac{45}{\gamma^2}Y^8+\frac{210}{\gamma^4}Y^6-\frac{210}{\gamma^6}Y^4+\frac{45}{\gamma^8}Y^2-\frac{1}{\gamma^{10}}$$

$$_0V_{11}^{-1}(Y)=Y^{10}-\frac{15}{\gamma^2}Y^8+\frac{42}{\gamma^4}Y^6-\frac{30}{\gamma^6}Y^4+\frac{5}{\gamma^8}Y^2-\frac{1}{11\gamma^{10}}$$

$$_0V_{12}^{-1}(Y)=Y^{12}-\frac{66}{\gamma^2}Y^{10}+\frac{495}{\gamma^4}Y^8-\frac{924}{\gamma^6}Y^6+\frac{495}{\gamma^8}Y^4-\frac{66}{\gamma^{10}}Y^2+\frac{1}{\gamma^{12}}$$

一般にこれらの関数は次式で表される。

$$\begin{cases} _0V_{2N}^{-1}(Y)=\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\left\{\left(-\frac{1}{\gamma^2}\right)^k\cdot{}_{2N}C_{2k}\cdot Y^{2(N-k)}\right\}=\prod_{k=1}^{N}\left(Y^2-\frac{\tan^2\frac{2k-1}{4N}\pi}{\gamma^2}\right)=\prod_{i=1}^{2N}\left(Y-\frac{\tan\frac{2i-1}{4N}\pi}{\gamma}\right) \\ _0V_{2N+1}^{-1}(Y)=\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\left\{\left(-\frac{1}{\gamma^2}\right)^k\cdot\frac{_{2N}C_{2k}}{2k+1}\cdot Y^{2(N-k)}\right\}=\prod_{k=1}^{N}\left(Y^2-\frac{\tan^2\frac{2k-1}{4N+2}\pi}{\gamma^2}\right)=\prod_{i=1}^{2N+1}\left(Y-\frac{\tan\frac{2i-1}{4N+2}\pi}{\gamma}\right) \end{cases}$$

ただし $_0V_{2N+1}^{-1}(Y)$ の場合は $i=N+1$ を除く。因みに次式が成立する。

$$\frac{d}{dY}\left[\,_{\mathbf{0}}V_{\mathbf{2N+1}}^{-1}(Y)\right]=\frac{d}{dY}\left[\sum_{k=0}^{N}\left\{(-\frac{1}{\gamma^2})^k\cdot\frac{_{\mathbf{2N}}C_{\mathbf{2k}}}{2k+1}\cdot Y^{2(N-k)}\right\}\right]=\sum_{k=0}^{N-1}\left\{(-\frac{1}{\gamma^2})^k\cdot{}_{\mathbf{2N}}C_{\mathbf{2k+1}}\cdot Y^{2(N-k)-1}\right\}$$

ここから $\gamma^2=-1$ のとき $\frac{d}{dY}\left[\,_{\mathbf{0}}V_{\mathbf{2N+1}}^{-1}(Y)\right]+{}_{\mathbf{0}}V_{\mathbf{2N}}^{-1}(Y)=(Y+1)^{2N}$

この関数の微分方程式を求める。$X^2=Y^2+\frac{1}{\gamma^2}$ から $\frac{dY}{dX}=\frac{\sqrt{\gamma^2Y^2+1}}{\gamma Y}$

$$\frac{d}{dX}\left[\,_{\mathbf{0}}T_N^{-1}(X)\right]=\frac{d}{dY}\left[\,_{\mathbf{0}}V_N^{-1}(Y)\right]\cdot\left(\frac{dY}{dX}\right)=\frac{\sqrt{\gamma^2Y^2+1}}{\gamma Y}\cdot{}_{\mathbf{0}}V_N^{-1}(Y)'$$

$$\frac{d^2}{dX^2}\left[\,_{\mathbf{0}}T_N^{-1}(X)\right]=\frac{\gamma^2Y^2+1}{\gamma^2Y^2}\cdot{}_{\mathbf{0}}V_N^{-1}(Y)''-\frac{1}{\gamma^2Y^3}\cdot{}_{\mathbf{0}}V_N^{-1}(Y)'$$

これらの式を $_{\mathbf{0}}T_N^{-1}(X)$ の微分方程式に代入して次式を得る。この式は $\gamma^2=-1$ でも成立する。

$$(Y^2+\frac{1}{\gamma^2})\cdot{}_0V_N^{-1}(Y)''-2(N-1)\cdot Y\cdot{}_0V_N^{-1}(Y)'+N(N-1)\cdot{}_0V_N^{-1}(Y)=0$$

一方 $_{\mathbf{0}}T_N(x)$ の対数を取って微分して得られる関数 $_{\mathbf{0}}F_N(x)$ の微分方程式を求める。

$_{\mathbf{0}}T_N(x)=2^{N-1}\cdot\prod_{k=1}^{N}\left(x-\gamma\cos\frac{2k-1}{2N}\pi\right)$ の対数を微分して次式が得られる。

$$\ln\{\,_{\mathbf{0}}T_N(x)\}=\ln(2^{N-1})+\sum_{k=1}^{N}\left\{\ln\left(x-\gamma\cos\frac{2k-1}{2N}\pi\right)\right\}$$

$$_{\mathbf{0}}F_N(x)=\frac{_{\mathbf{0}}T_N(x)'}{_{\mathbf{0}}T_N(x)}=N\cdot\frac{_{\mathbf{0}}U_{N-1}(x)}{_{\mathbf{0}}T_N(x)}=\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{x-\gamma\cos\frac{2k-1}{2N}\pi}\right)$$

$N=2$ から $N=12$ までの関数 ${}_0F_N(x)$ は次のようになる。

$${}_0F_N(x) = \frac{{}_0T_N(x)'}{{}_0T_N(x)} = N \cdot \frac{{}_0U_{N-1}(x)}{{}_0T_N(x)}$$

$${}_0F_2(x) = 2 \cdot \frac{2x}{2x^2 - \gamma^2} \qquad {}_0F_3(x) = 3 \cdot \frac{4x^2 - \gamma^2}{4x^3 - 3\gamma^2 x}$$

$${}_0F_4(x) = 4 \cdot \frac{8x^3 - 4\gamma^2 x}{8x^4 - 8\gamma^2 x^2 + \gamma^4} \qquad {}_0F_5(x) = 5 \cdot \frac{16x^4 - 12\gamma^2 x^2 + \gamma^4}{16x^5 - 20\gamma^2 x^3 + 5\gamma^4 x}$$

$${}_0F_6(x) = 6 \cdot \frac{32x^5 - 32\gamma^2 x^3 + 6\gamma^4 x}{32x^6 - 48\gamma^2 x^4 + 18\gamma^4 x^2 - \gamma^6} \qquad {}_0F_7(x) = 7 \cdot \frac{64x^6 - 80\gamma^2 x^4 + 24\gamma^4 x^2 - \gamma^6}{64x^7 - 112\gamma^2 x^5 + 56\gamma^4 x^3 - 7\gamma^6 x}$$

$${}_0F_8(x) = 8 \cdot \frac{128x^7 - 192\gamma^2 x^5 + 80\gamma^4 x^3 - 8\gamma^6 x}{128x^8 - 256\gamma^2 x^6 + 160\gamma^4 x^4 - 32\gamma^6 x^2 + \gamma^8}$$

$${}_0F_9(x) = 9 \cdot \frac{256x^8 - 448\gamma^2 x^6 + 240\gamma^4 x^4 - 40\gamma^6 x^2 + \gamma^8}{256x^9 - 576\gamma^2 x^7 + 432\gamma^4 x^5 - 120\gamma^6 x^3 + 9\gamma^8 x}$$

$${}_0F_{10}(x) = 10 \cdot \frac{512x^9 - 1024\gamma^2 x^7 + 672\gamma^4 x^5 - 160\gamma^6 x^3 + 10\gamma^8 x}{512x^{10} - 1280\gamma^2 x^8 + 1120\gamma^4 x^6 - 400\gamma^6 x^4 + 50\gamma^8 x^2 - \gamma^{10}}$$

$${}_0F_{11}(x) = 11 \cdot \frac{1024x^{10} - 2304\gamma^2 x^8 + 1792\gamma^4 x^6 - 560\gamma^6 x^4 + 60\gamma^8 x^2 - \gamma^{10}}{1024x^{11} - 2816\gamma^2 x^9 + 2816\gamma^4 x^7 - 1232\gamma^6 x^5 + 220\gamma^8 x^3 - 11\gamma^{10} x}$$

$${}_0F_{12}(x) = 12 \cdot \frac{2048x^{11} - 5120\gamma^2 x^9 + 4608\gamma^4 x^7 - 1792\gamma^6 x^5 + 280\gamma^8 x^3 - 12\gamma^{10} x}{2048x^{12} - 6144\gamma^2 x^{10} + 6912\gamma^4 x^8 - 3584\gamma^6 x^6 + 840\gamma^8 x^4 - 72\gamma^{10} x^2 + \gamma^{12}}$$

この ${}_0F_N(x)$ をもう一度微分して ${}_0F_N(x)'$ 、および $\dfrac{{}_0T_N(x)''}{{}_0T_N(x)}$ が得られる。

$${}_0F_N(x)' = \sum_{k=1}^{N} \left\{ \frac{-1}{(x - \gamma\cos\frac{2k-1}{2N}\pi)^2} \right\}$$

$$\frac{{}_0T_N(x)''}{{}_0T_N(x)} = \{\, {}_0F_N(x) \,\}^2 + {}_0F_N(x)'$$

$$= \left\{ \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{x - \gamma\cos\frac{2k-1}{2N}\pi} \right) \right\}^2 - \sum_{k=1}^{N} \left\{ \frac{1}{(x - \gamma\cos\frac{2k-1}{2N}\pi)^2} \right\}$$

$$= \sum_{i,j} \left\{ \frac{2}{(x - \gamma\cos\frac{2i-1}{2N}\pi)(x - \gamma\cos\frac{2j-1}{2N}\pi)} \right\} \quad (1 \le i < j \le N)$$

これらの式を ${}_0T_N(x)$ の微分方程式に代入し次式を得る。ただし $1 \le i < j \le N$ である。

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{x}{x-\gamma\cos\frac{2k-1}{2N}\pi}\right)+\sum_{i,j}\left\{\frac{2(x^2-\gamma^2)}{(x-\gamma\cos\frac{2i-1}{2N}\pi)(x-\gamma\cos\frac{2j-1}{2N}\pi)}\right\}=N^2$$

さらに $\ln\{{}_0T_N(x)'\}$ の微分 $\dfrac{{}_0T_N(x)''}{{}_0T_N(x)'}$ は次式となる。

$$\frac{d}{dx}\left[\ln\{{}_0T_N(x)'\}\right]=\frac{{}_0T_N(x)''}{{}_0T_N(x)'}=\frac{\sum_{i,j}\left\{\frac{2}{(x-\gamma\cos\frac{2i-1}{2N}\pi)(x-\gamma\cos\frac{2j-1}{2N}\pi)}\right\}}{\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{x-\gamma\cos\frac{2k-1}{2N}\pi}\right)}\quad(1\le i<j\le N)$$

一方 ${}_0T_N(x)'={}_0T_N(x)\cdot{}_0F_N(x)$ と ${}_0T_N(x)''={}_0T_N(x)\cdot\left[{}_0F_N(x)'+\{{}_0F_N(x)\}^2\right]$ を

${}_0T_N(x)$ の微分方程式に代入して $N^2=x\cdot{}_0F_N(x)+(x^2-\gamma^2)\cdot\left[{}_0F_N(x)'+\{{}_0F_N(x)\}^2\right]$ を得る。

この式をもう一度微分してさらに整理すると

$$(x^2-\gamma^2)\cdot{}_0F_N(x)''+3x\cdot{}_0F_N(x)'+\left[2N^2+1-2(x^2-\gamma^2)\cdot\{{}_0F_N(x)\}^2\right]\cdot{}_0F_N(x)=0$$

この式の最終項の $\left[2N^2+1-2(x^2-\gamma^2)\cdot\{{}_0F_N(x)\}^2\right]$ のみを計算するために、

$$\{{}_0F_N(x)\}^2=\left\{\frac{{}_0T_N(x)'}{{}_0T_N(x)}\right\}^2=\left\{\frac{N\cdot{}_0U_{N-1}(x)}{{}_0T_N(x)}\right\}^2=N^2\cdot\left\{\frac{{}_0U_{N-1}(x)}{{}_0T_N(x)}\right\}^2$$ と

$\{{}_0T_N(x)\}^2+(\gamma^2-x^2)\cdot\{{}_0U_{N-1}(x)\}^2=\gamma^{2N}$ を利用すると次式が得られるので、

$$2N^2+1-2(x^2-\gamma^2)\cdot\{{}_0F_N(x)\}^2$$

$$=1+2N^2-2N^2\cdot(x^2-\gamma^2)\cdot\left\{\frac{{}_0U_{N-1}(x)}{{}_0T_N(x)}\right\}^2=1+2N^2\cdot\frac{\gamma^{2N}}{\{{}_0T_N(x)\}^2}$$

ここから $_{\mathbf{0}}F_N(x)$ の微分方程式は次式のようにも表される。

$$(x^2-\gamma^2)\cdot {}_{\mathbf{0}}F_N(x)''+3x\cdot {}_{\mathbf{0}}F_N(x)'+\left[1+\frac{2N^2\cdot\gamma^{2N}}{\{{}_{\mathbf{0}}T_N(x)\}^2}\right]\cdot {}_{\mathbf{0}}F_N(x)=0$$

この微分方程式の解は $_{\mathbf{0}}F_N(x)=\sum_{k=1}^{N}\left(\dfrac{1}{x-\gamma\cos\dfrac{2k-1}{2N}\pi}\right)$ である。

4．2　第二種のチェビシェフ多項式基本型拡張関数の微分方程式

偶数次の第二種のチェビシェフ多項式基本型、例えば $_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{4}}(x)=16x^4-12\gamma^2x^2+\gamma^4$ から

$_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{4}}^{-1}(X)=X^4-\dfrac{12}{\gamma^2}X^2+\dfrac{16}{\gamma^4}$ を導入する。一般に $_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{2N}}(x)=\sum_{k=0}^{N}\left\{(-\gamma^2)^k\cdot {}_{2N-k}C_k(2x)^{2(N-k)}\right\}$

から $_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{2N}}^{-1}(X)=\sum_{k=0}^{N}\left\{(-\dfrac{4}{\gamma^2})^k\cdot {}_{\boldsymbol{N+k}}C_{\boldsymbol{N-k}}\cdot X^{2(N-k)}\right\}$ が得られる。

この多項式の微分方程式を求める。 $_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{2N}}(x)=(-\gamma^2)^N X^{-2N}\cdot {}_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{2N}}^{-1}(X)$ であるが、

係数を無視して、 $_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{2N}}(x)=X^{-2N}\cdot {}_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{2N}}^{-1}(X)$ として計算する。

$$\frac{d}{dx}\left[{}_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{2N}}(x)\right]=X^{-2N+1}\left\{2N\cdot {}_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{2N}}^{-1}(X)-X\cdot {}_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{2N}}^{-1}(X)'\right\}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[{}_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{2N}}(x)\right]=X^{-2N+2}\left\{X^2\cdot {}_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{2N}}^{-1}(X)''-2(2N-1)\cdot X\cdot {}_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{2N}}^{-1}(X)'+2N(2N-1)\cdot {}_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{2N}}^{-1}(X)\right\}$$

以上の三式を $_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{2N}}(X)$ の微分方程式に代入して、 $_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{2N}}^{-1}(X)$ の微分方程式を得る。

$$(X^2-\frac{1}{\gamma^2})\cdot {}_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{2N}}^{-1}(X)''-\left\{2(2N-1)\cdot X-\frac{4N+1}{\gamma^2}\cdot\frac{1}{X}\right\}\cdot {}_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{2N}}^{-1}(X)'+2N(2N-1)\cdot {}_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{2N}}^{-1}(X)=0$$

奇数次の第二種のチェビシェフ多項式基本型、例えば $_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{5}}(x)=32x^5-32\gamma^2x^3+6\gamma^4x$ は ,

$_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{5}}^{-1}(X)=X^4-\dfrac{16}{3\gamma^2}X^2+\dfrac{16}{3\gamma^4}$ を考える。一般に $_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{2N+1}}(x)=\sum_{k=0}^{N}\left\{(-\gamma^2)^k\cdot {}_{2N+1-k}C_k(2x)^{2(N-k)+1}\right\}$

から $_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{2N+1}}^{-1}(X)=\dfrac{1}{N+1}\cdot\sum_{k=0}^{N}\left\{(-\dfrac{4}{\gamma^2})^k\cdot {}_{\boldsymbol{N+k+1}}C_{\boldsymbol{N-k}}\cdot X^{2(N-k)}\right\}$ を導入する。

この多項式の微分方程式を求める。 ${}_0U_{\mathbf{2N+1}}(x) = (-\gamma^2)^N(2N+2)\cdot X^{-2N-\mathbf{1}}\cdot{}_0U_{\mathbf{2N+1}}^{\mathbf{-1}}(X)$ であるが、

係数を無視して ${}_0U_{\mathbf{2N+1}}(x) = X^{-2N-\mathbf{1}}\cdot{}_0U_{\mathbf{2N+1}}^{\mathbf{-1}}(X)$ として計算する。

$$\frac{d}{dx}\left[{}_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{2N+1}}(x)\right] = X^{-2N}\cdot\left\{(2N+1)\cdot{}_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{2N+1}}^{\mathbf{-1}}(X) - X\cdot{}_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{2N+1}}^{\mathbf{-1}}(X)'\right\}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[{}_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{2N+1}}(x)\right] = X^{-2N+1}\left\{X^2\cdot{}_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{2N+1}}(X)'' - 4N\cdot X\cdot{}_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{2N+1}}(X)' + 2N(2N+1)\cdot{}_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{2N+1}}(X)\right\}$$

以上の三式を ${}_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{2N+1}}(x)$ の微分方程式に代入して ${}_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{2N+1}}^{\mathbf{-1}}(X)$ の微分方程式を得る。

$$(X^2 - \frac{1}{\gamma^2})\cdot{}_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{2N+1}}^{\mathbf{-1}}(X)'' - \left\{4N\cdot X - \frac{4N+3}{\gamma^2}\cdot\frac{1}{X}\right\}\cdot{}_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{2N+1}}^{\mathbf{-1}}(X)' + 2N(2N+1)\cdot{}_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{2N+1}}^{\mathbf{-1}}(X) = 0$$

N が偶数でも奇数でも ${}_0U_N^{\mathbf{-1}}(X)$ は同じ微分方程式となるので、まず ${}_0U_N^{\mathbf{-1}}(X)$ を列挙する。

$${}_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{2}}^{-1}(X) = X^2 - \frac{4}{\gamma^2} \qquad {}_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{3}}^{-1}(X) = X^2 - \frac{2}{\gamma^2}$$

$${}_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{4}}^{-1}(X) = X^4 - \frac{12}{\gamma^2}X^2 + \frac{16}{\gamma^4} \qquad {}_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{5}}^{-1}(X) = X^4 - \frac{16}{3\gamma^2}X^2 + \frac{16}{3\gamma^4}$$

$${}_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{6}}^{-1}(X) = X^6 - \frac{24}{\gamma^2}X^4 + \frac{80}{\gamma^4}X^2 - \frac{64}{\gamma^6} \qquad {}_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{7}}^{-1}(X) = X^6 - \frac{10}{\gamma^2}X^4 + \frac{24}{\gamma^4}X^2 - \frac{16}{\gamma^6}$$

$${}_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{8}}^{-1}(X) = X^8 - \frac{40}{\gamma^2}X^6 + \frac{240}{\gamma^4}X^4 - \frac{448}{\gamma^6}X^2 + \frac{256}{\gamma^8}$$

$${}_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{9}}^{-1}(X) = X^8 - \frac{16}{\gamma^2}X^6 + \frac{336}{5\gamma^4}X^4 - \frac{512}{5\gamma^6}X^2 + \frac{256}{5\gamma^8}$$

$${}_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{10}}^{-1}(X) = X^{10} - \frac{60}{\gamma^2}X^8 + \frac{560}{\gamma^4}X^6 - \frac{1792}{\gamma^6}X^4 + \frac{2304}{\gamma^8}X^2 - \frac{1024}{\gamma^{10}}$$

$${}_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{11}}^{-1}(X) = X^{10} - \frac{70}{3\gamma^2}X^8 + \frac{448}{3\gamma^4}X^6 - \frac{384}{\gamma^6}X^4 + \frac{1280}{3\gamma^8}X^2 - \frac{512}{3\gamma^{10}}$$

$${}_{\mathbf{0}}U_{\mathbf{12}}^{-1}(X) = X^{12} - \frac{84}{\gamma^2}X^{10} + \frac{1120}{\gamma^4}X^8 - \frac{5376}{\gamma^6}X^6 + \frac{11520}{\gamma^8}X^4 - \frac{11264}{\gamma^{10}}X^2 + \frac{4096}{\gamma^{12}}$$

この関数の微分方程式は次のようになり、この式は $\gamma^2 = -1$ でも成立する。

$$(X^2 - \frac{1}{\gamma^2})\cdot{}_{\mathbf{0}}U_N^{\mathbf{-1}}(X)'' - \left\{2(N-1)X - \frac{2N+1}{\gamma^2}\cdot\frac{1}{X}\right\}\cdot{}_{\mathbf{0}}U_N^{\mathbf{-1}}(X)' + N(N-1)\cdot{}_{\mathbf{0}}U_N^{\mathbf{-1}}(X) = 0$$

この解の因数分解は次式になる。$_{\mathbf{0}}U_N^{-1}(X)=\prod_{k=1}^{N}\Bigl(X-\dfrac{1}{\gamma\cos\dfrac{k}{N+1}\pi}\Bigr)$ 　$(N\geq 2\ ,\ k\neq\dfrac{N+1}{2}\ )$

さらに $_{\mathbf{0}}U_N^{-1}(X)=\prod_{k=1}\Bigl(X^2-\dfrac{1}{\gamma^2\cos^2\dfrac{k}{N+1}\pi}\Bigr)=\prod_{k=1}\Bigl(X^2-\dfrac{1}{\gamma^2}-\dfrac{\tan^2\dfrac{k}{N+1}\pi}{\gamma^2}\Bigr)$ となるので、

$_{\mathbf{0}}U_N^{-1}(X)$ の X^2 に $X^2=Y^2+\dfrac{1}{\gamma^2}$ を代入し、得られる関数を $_{\mathbf{0}}W_N^{-1}(Y)$ として下にまとめる。

$$_{\mathbf{0}}W_2^{-1}(Y)=Y^2-\frac{3}{\gamma^2}\qquad\qquad _{\mathbf{0}}W_3^{-1}(Y)=Y^2-\frac{1}{\gamma^2}$$

$$_{\mathbf{0}}W_4^{-1}(Y)=Y^4-\frac{10}{\gamma^2}Y^2+\frac{5}{\gamma^4}\qquad\qquad _{\mathbf{0}}W_5^{-1}(Y)=Y^4-\frac{10}{3\gamma^2}Y^2+\frac{1}{\gamma^4}$$

$$_{\mathbf{0}}W_6^{-1}(Y)=Y^6-\frac{21}{\gamma^2}Y^4+\frac{35}{\gamma^4}Y^2-\frac{7}{\gamma^6}\qquad\qquad _{\mathbf{0}}W_7^{-1}(Y)=Y^6-\frac{7}{\gamma^2}Y^4+\frac{7}{\gamma^4}Y^2-\frac{1}{\gamma^6}$$

$$_{\mathbf{0}}W_8^{-1}(Y)=Y^8-\frac{36}{\gamma^2}Y^6+\frac{126}{\gamma^4}Y^4-\frac{84}{\gamma^6}Y^2+\frac{9}{\gamma^8}$$

$$_{\mathbf{0}}W_9^{-1}(Y)=Y^8-\frac{12}{\gamma^2}Y^6+\frac{126}{5\gamma^4}Y^4-\frac{12}{\gamma^6}Y^2+\frac{1}{\gamma^8}$$

$$_{\mathbf{0}}W_{10}^{-1}(Y)=Y^{10}-\frac{55}{\gamma^2}Y^8+\frac{330}{\gamma^4}Y^6-\frac{462}{\gamma^6}Y^4+\frac{165}{\gamma^8}Y^2-\frac{11}{\gamma^{10}}$$

$$_{\mathbf{0}}W_{11}^{-1}(Y)=Y^{10}-\frac{55}{3\gamma^2}Y^8+\frac{66}{\gamma^4}Y^6-\frac{66}{\gamma^6}Y^4+\frac{55}{3\gamma^8}Y^2-\frac{1}{\gamma^{10}}$$

$$_{\mathbf{0}}W_{12}^{-1}(Y)=Y^{12}-\frac{78}{\gamma^2}Y^{10}+\frac{715}{\gamma^4}Y^8-\frac{1716}{\gamma^6}Y^6+\frac{1287}{\gamma^8}Y^4-\frac{286}{\gamma^{10}}Y^2+\frac{13}{\gamma^{12}}$$

この関数を一般的に表すと、

$$\begin{cases} _{\mathbf{0}}W_{2N}^{-1}(Y)=\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\Bigl\{\Bigl(-\frac{1}{\gamma^2}\Bigr)^k\cdot{}_{2N+1}C_{2k}\cdot Y^{2(N-k)}\Bigr\}=\prod_{k=1}^{N}\Bigl(Y^2-\frac{\tan^2\frac{k}{2N+1}\pi}{\gamma^2}\Bigr)=\prod_{i=1}^{2N}\Bigl(Y-\frac{\tan\frac{i}{2N+1}\pi}{\gamma}\Bigr) \\ _{\mathbf{0}}W_{2N+1}^{-1}(Y)=\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\Bigl\{\Bigl(-\frac{1}{\gamma^2}\Bigr)^k\cdot\frac{_{2N+1}C_{2k}}{2k+1}\cdot Y^{2(N-k)}\Bigr\}=\prod_{k=1}^{N}\Bigl(Y^2-\frac{\tan^2\frac{k}{2N+2}\pi}{\gamma^2}\Bigr)=\prod_{i=1}^{2N+1}\Bigl(Y-\frac{\tan\frac{i}{2N+2}\pi}{\gamma}\Bigr) \end{cases}$$

ただし $_{\mathbf{0}}W_{2N+1}^{-1}(Y)$ の場合は $i=N+1$ を除く。

この関数の微分方程式を求める。$X^2 = Y^2 + \dfrac{1}{\gamma^2}$ から $\dfrac{dY}{dX} = \dfrac{\sqrt{\gamma^2 Y^2 + 1}}{\gamma Y}$

$$\frac{d}{dX}\left[{}_{\mathbf{0}}U_N^{-1}(X)\right] = \frac{d}{dY}\left[{}_{\mathbf{0}}W_N^{-1}(Y)\right]\cdot(\frac{dY}{dX}) = \frac{\sqrt{\gamma^2 Y^2 + 1}}{\gamma Y}\cdot {}_{\mathbf{0}}W_N^{-1}(Y)'$$

$$\frac{d^2}{dX^2}\left[{}_{\mathbf{0}}U_N^{-1}(X)\right] = \frac{\gamma^2 Y^2 + 1}{\gamma^2 Y^2}\cdot {}_{\mathbf{0}}W_N^{-1}(Y)'' - \frac{1}{\gamma^2\, Y^3}\cdot {}_{\mathbf{0}}W_N^{-1}(Y)'$$

これらの式を ${}_{\mathbf{0}}U_N^{-1}(X)$ の微分方程式に代入して、${}_{\mathbf{0}}W_N^{-1}(Y)$ の微分方程式を得る。

$$(Y^2 + \frac{1}{\gamma^2})\cdot {}_{\mathbf{0}}W_N^{-1}(Y)'' - 2\{(N-1)\cdot Y - \frac{1}{\gamma^2}\cdot\frac{1}{Y}\}\cdot {}_{\mathbf{0}}W_N^{-1}(Y)' + N(N-1)\cdot {}_{\mathbf{0}}W_N^{-1}(Y) = 0$$

この式は $\gamma^2 = -1$ でも成立する。

さらに ${}_{\mathbf{0}}U_N(x)$ の対数を取って微分して得られる関数 ${}_{\mathbf{0}}G_N(x)$ の微分方程式を求める。

${}_{\mathbf{0}}U_N(x) = 2^N \cdot \prod_{k=1}^{N}\left(x - \gamma\cos\frac{k}{N+1}\pi \right)$ の対数を微分して次式が得られる。

$$\ln\left\{ {}_{\mathbf{0}}U_N(x) \right\} = \ln(2^N) + \sum_{k=1}^{N}\left\{ \ln\left(x - \gamma\cos\frac{k}{N+1}\pi\right)\right\}$$

$${}_{\mathbf{0}}G_N(x) = \frac{{}_{\mathbf{0}}U_N(x)'}{{}_{\mathbf{0}}U_N(x)} = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{x - \gamma\cos\frac{k}{N+1}\pi}\right)$$

$N=2$ から $N=12$ までの関数 ${}_0G_N(x)$ は次のようになる。

$${}_0G_N(x)=\frac{{}_0U_N(x)'}{{}_0U_N(x)}$$

$${}_0G_2(x)=\frac{8x}{4x^2-\gamma^2} \qquad {}_0G_3(x)=\frac{24x^2-4\gamma^2}{8x^3-4\gamma^2x}$$

$${}_0G_4(x)=\frac{64x^3-24\gamma^2x}{16x^4-12\gamma^2x^2+\gamma^4} \qquad {}_0G_5(x)=\frac{160x^4-96\gamma^2x^2+6\gamma^4}{32x^5-32\gamma^2x^3+6\gamma^4x}$$

$${}_0G_6(x)=\frac{384x^5-320\gamma^2x^3+48\gamma^4x}{64x^6-80\gamma^2x^4+24\gamma^4x^2-\gamma^6} \qquad {}_0G_7(x)=\frac{896x^6-960\gamma^2x^4+240\gamma^4x^2-8\gamma^6}{128x^7-192\gamma^2x^5+80\gamma^4x^3-8\gamma^6x}$$

$${}_0G_8(x)=\frac{2048x^7-2688\gamma^2x^5+960\gamma^4x^3-80\gamma^6x}{256x^8-448\gamma^2x^6+240\gamma^4x^4-40\gamma^6x^2+\gamma^8}$$

$${}_0G_9(x)=\frac{4608x^8-7168\gamma^2x^6+3360\gamma^4x^4-480\gamma^6x^2+10\gamma^8}{512x^9-1024\gamma^2x^7+672\gamma^4x^5-160\gamma^6x^3+10\gamma^8x}$$

$${}_0G_{10}(x)=\frac{10240x^9-18432\gamma^2x^7+10752\gamma^4x^5-2240\gamma^6x^3+120\gamma^8x}{1024x^{10}-2304\gamma^2x^8+1792\gamma^4x^6-560\gamma^6x^4+60\gamma^8x^2-\gamma^{10}}$$

$${}_0G_{11}(x)=\frac{22528x^{10}-46080\gamma^2x^8+32256\gamma^4x^6-8960\gamma^6x^4+840\gamma^8x^2-12\gamma^{10}}{2048x^{11}-5120\gamma^2x^9+4608\gamma^4x^7-1792\gamma^6x^5+280\gamma^8x^3-12\gamma^{10}x}$$

$${}_0G_{12}(x)=\frac{49152x^{11}-112640\gamma^2x^9+92160\gamma^4x^7-32256\gamma^6x^5+4480\gamma^8x^3-168\gamma^{10}x}{4096x^{12}-11264\gamma^2x^{10}+11520\gamma^4x^8-5376\gamma^6x^6+1120\gamma^8x^4-84\gamma^{10}x^2+\gamma^{12}}$$

さらに $\dfrac{{}_0T_N(x)''}{{}_0T_N(x)'}=\dfrac{\{N\cdot{}_0U_{N-1}(x)\}'}{N\cdot{}_0U_{N-1}(x)}=\dfrac{{}_0U_{N-1}(x)'}{{}_0U_{N-1}(x)}={}_0G_{N-1}(x)$ から次式が成立する。

$$\sum_{i,j}\left\{\frac{2}{(x-\gamma\cos\frac{2i-1}{2N}\pi)(x-\gamma\cos\frac{2j-1}{2N}\pi)}\right\}=\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{x-\gamma\cos\frac{2k-1}{2N}\pi}\right)\cdot\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{1}{x-\gamma\cos\frac{k}{N}\pi}\right)$$

ただし $1\le i<j\le N$ である。

さらに ${}_0G_N(x)$ をもう一度微分して ${}_0G_N(x)'=\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\left\{\frac{-1}{(x-\gamma\cos\frac{k}{N+1}\pi)^2}\right\}$ が得られる。

また　$_{\mathbf{0}}G_N(x)' = \dfrac{_{\mathbf{0}}U_N(x)''}{_{\mathbf{0}}U_N(x)} - \left\{\dfrac{_{\mathbf{0}}U_N(x)'}{_{\mathbf{0}}U_N(x)}\right\}^2$　なので

$$\frac{_{\mathbf{0}}U_N(x)''}{_{\mathbf{0}}U_N(x)} = \sum_{i,j}\left\{\frac{2}{(x-\gamma\cos\frac{i}{N+1}\pi)(x-\gamma\cos\frac{j}{N+1}\pi)}\right\}\ (1 \le i < j \le N)$$

これらの式を　$_{\mathbf{0}}U_N(x)$　の微分方程式に代入し次式を得る。ただし　$1 \le i < j \le N$　である。

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{3x}{x-\gamma\cos\frac{k}{N+1}\pi}\right) + \sum_{i,j}\left\{\frac{2(x^2-\gamma^2)}{(x-\gamma\cos\frac{i}{N+1}\pi)(x-\gamma\cos\frac{j}{N+1}\pi)}\right\} = N(N+2)$$

さらに　$\ln\left\{{}_{\mathbf{0}}U_N(x)'\right\}$　の微分　$\dfrac{_{\mathbf{0}}U_N(x)''}{_{\mathbf{0}}U_N(x)'}$　は次式となる。

$$\frac{d}{dx}\left[\ln\left\{{}_{\mathbf{0}}U_N(x)'\right\}\right] = \frac{_{\mathbf{0}}U_N(x)''}{_{\mathbf{0}}U_N(x)'} = \frac{\displaystyle\sum_{i,j}\left\{\frac{2}{(x-\gamma\cos\frac{i}{N+1}\pi)\,(x-\gamma\cos\frac{j}{N+1}\pi)}\right\}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{x-\gamma\cos\frac{k}{N+1}\pi}\right)}\ (1 \le i < j \le N)$$

一方 $_{\mathbf{0}}U_N(x)' = {}_{\mathbf{0}}U_N(x) \cdot {}_{\mathbf{0}}G_N(x)$　と $_{\mathbf{0}}U_N(x)'' = {}_{\mathbf{0}}U_N(x) \cdot \left[{}_{\mathbf{0}}G_N(x)' + \left\{{}_{\mathbf{0}}G_N(x)\right\}^2\right]$　を

$_{\mathbf{0}}U_N(x)$　の微分方程式に代入し、$N(N+2) = 3x \cdot {}_{\mathbf{0}}G_N(x) + (x^2-\gamma^2) \cdot \left[{}_{\mathbf{0}}G_N(x)' + \left\{{}_{\mathbf{0}}G_N(x)\right\}^2\right]$

を得る。この式をもう一度微分してさらに整理すると　$_{\mathbf{0}}G_N(x)$　の微分方程式が得られる。

$$(x^2-\gamma^2) \cdot {}_{\mathbf{0}}G_N(x)'' + 5x \cdot {}_{\mathbf{0}}G_N(x)'$$
$$+\left[2(N+1)^2 + 1 - 4x \cdot {}_{\mathbf{0}}G_N(x) - 2(x^2-\gamma^2) \cdot \left\{{}_{\mathbf{0}}G_N(x)\right\}^2\right] \cdot {}_{\mathbf{0}}G_N(x) = 0$$

この式が　$_{\mathbf{0}}G_N(x) = \dfrac{_{\mathbf{0}}U_N(x)'}{_{\mathbf{0}}U_N(x)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{x-\gamma\cos\frac{k}{N+1}\pi}\right)$　の微分方程式である。

5. チェビシェフ多項式基本型混合関数の微分方程式

5. 1 第一種のチェビシェフ多項式基本型と第二種のチェビシェフ多項式基本型の比

第一種および第二種のチェビシェフ多項式基本型の比からなる ${}_0H_N(x)$ を定義し、その性質を検討する。

$$ {}_0H_N(x) = \frac{{}_0T_{N+1}(x)}{{}_0U_N(x)} = \frac{N+1}{{}_0F_{N+1}(x)} = x - \gamma^2 \cdot \frac{{}_0U_{N-1}(x)}{{}_0U_N(x)} $$

$$ {}_0H_2(x) = x - \gamma^2 \cdot \frac{2x}{4x^2-\gamma^2} \qquad {}_0H_3(x) = x - \gamma^2 \cdot \frac{4x^2-\gamma^2}{8x^3-4\gamma^2 x} $$

$$ {}_0H_4(x) = x - \gamma^2 \cdot \frac{8x^3-4\gamma^2 x}{16x^4-12\gamma^2x^2+\gamma^4} \qquad {}_0H_5(x) = x - \gamma^2 \cdot \frac{16x^4-12\gamma^2x^2+\gamma^4}{32x^5-32\gamma^2x^3+6\gamma^4x} $$

$$ {}_0H_6(x) = x - \gamma^2 \cdot \frac{32x^5-32\gamma^2x^3+6\gamma^4x}{64x^6-80\gamma^2x^4+24\gamma^4x^2-\gamma^6} $$

$$ {}_0H_7(x) = x - \gamma^2 \cdot \frac{64x^6-80\gamma^2x^4+24\gamma^4x^2-\gamma^6}{128x^7-192\gamma^2x^5+80\gamma^4x^3-8\gamma^6x} $$

$$ {}_0H_8(x) = x - \gamma^2 \cdot \frac{128x^7-192\gamma^2x^5+80\gamma^4x^3-8\gamma^6x}{256x^8-448\gamma^2x^6+240\gamma^4x^4-40\gamma^6x^2+\gamma^8} $$

$$ {}_0H_9(x) = x - \gamma^2 \cdot \frac{256x^8-448\gamma^2x^6+240\gamma^4x^4-40\gamma^6x^2+\gamma^8}{512x^9-1024\gamma^2x^7+672\gamma^4x^5-160\gamma^6x^3+10\gamma^8x} $$

$$ {}_0H_{10}(x) = x - \gamma^2 \cdot \frac{512x^9-1024\gamma^2x^7+672\gamma^4x^5-160\gamma^6x^3+10\gamma^8x}{1024x^{10}-2304\gamma^2x^8+1792\gamma^4x^6-560\gamma^6x^4+60\gamma^8x^2-\gamma^{10}} $$

$$ {}_0H_{11}(x) = x - \gamma^2 \cdot \frac{1024x^{10}-2304\gamma^2x^8+1792\gamma^4x^6-560\gamma^6x^4+60\gamma^8x^2-\gamma^{10}}{2048x^{11}-5120\gamma^2x^9+4608\gamma^4x^6-1792\gamma^6x^4+280\gamma^8x^3-12\gamma^{10}x} $$

$$ {}_0H_{12}(x) = x - \gamma^2 \cdot \frac{2048x^{11}-5120\gamma^2x^9+4608\gamma^4x^6-1792\gamma^6x^4+280\gamma^8x^3-12\gamma^{10}x}{4096x^{12}-11264\gamma^2x^{10}+11520\gamma^4x^8-5376\gamma^6x^6+1120\gamma^8x^4-84\gamma^{10}x^2+\gamma^{12}} $$

${}_0H_N(x)$ に関してまず次式が成立する。

$$ {}_0H_N(x) = \frac{\prod_{k=1}^{N+1}\left(x - \gamma\cos\frac{2k-1}{2N+2}\pi\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(x - \gamma\cos\frac{k}{N+1}\pi\right)} $$

さらに　　$\{ {}_0T_{N+1}(x) \}^2 + (\gamma^2 - x^2)\cdot\{ {}_0U_N(x) \}^2 = \gamma^{2(N+1)}$　から

$$\left\{ \frac{{}_0T_{N+1}(x)}{{}_0U_N(x)} \right\}^2 + (\gamma^2 - x^2) = \{ {}_0H_N(x) \}^2 + (\gamma^2 - x^2) = \frac{\gamma^{2(N+1)}}{\{ {}_0U_N(x) \}^2}$$

一方　${}_0T_N(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{{}_0U_{2N-1}(x)}{{}_0U_{N-1}(x)}$　を利用して　$2\cdot\frac{{}_0T_{N+1}(x)}{{}_0U_N(x)} = 2\cdot{}_0H_N(x) = \frac{{}_0U_{2N+1}(x)}{\{{}_0U_N(x)\}^2}$

この式を上の式に代入して、$\{ {}_0H_N(x) \}^2 - 2\cdot\frac{\gamma^{2(N+1)}}{{}_0U_{2N+1}(x)}\cdot{}_0H_N(x) + (\gamma^2 - x^2) = 0$

この式を解いて、　$${}_0H_N(x) = \frac{\gamma^{2(N+1)} + {}_0T_{2N+2}(x)}{{}_0U_{2N+1}(x)} = \frac{\gamma^{2(N+1)}}{{}_0U_{2N+1}(x)} + {}_0H_{2N+1}(x)$$

ただし次式を利用し、${}_0H_N(x)$　は正をとった。

$$\left\{ \frac{{}_0T_{2N+2}(x)}{{}_0U_{2N+1}(x)} \right\}^2 + (\gamma^2 - x^2) = \{ {}_0H_{2N+1}(x) \}^2 + (\gamma^2 - x^2) = \frac{\gamma^{4(N+1)}}{\{ {}_0U_{2N+1}(x) \}^2}$$

この関数の微分方程式を求める。

まず　$\{ {}_0T_{N+1}(x) \}^2 + (\gamma^2 - x^2)\cdot\{ {}_0U_N(x) \}^2 = \gamma^{2(N+1)}$　を微分して

$(N+1)\cdot{}_0T_{N+1}(x) - x\cdot{}_0U_N(x) + (\gamma^2 - x^2)\cdot{}_0U_N(x)' = 0$　が得られ 、整理すると

$$(x^2 - \gamma^2)\cdot\frac{{}_0U_N(x)'}{{}_0U_N(x)} + x = (x^2 - \gamma^2)\cdot{}_0G_N(x) + x = (N+1)\cdot\frac{{}_0T_{N+1}(x)}{{}_0U_N(x)} = (N+1)\cdot{}_0H_N(x)$$

つぎに　${}_0T_{N+1}(x) = {}_0H_N(x)\cdot{}_0U_N(x)$　を微分して、

$(N+1)\cdot{}_0U_N(x) = {}_0H_N(x)'\cdot{}_0U_N(x) + {}_0H_N(x)\cdot{}_0U_N(x)'$　を得、整理して

$${}_0H_N(x)' = (N+1) - {}_0H_N(x)\cdot\frac{{}_0U_N(x)'}{{}_0U_N(x)} = (N+1) - {}_0H_N(x)\cdot{}_0G_N(x)$$

この式に　$(x^2 - \gamma^2)$　をかけて整理すると、

$$(x^2 - \gamma^2)\cdot{}_0H_N(x)' = (N+1)(x^2 - \gamma^2) - {}_0H_N(x)\cdot(x^2 - \gamma^2)\cdot{}_0G_N(x)$$
$$= (N+1)(x^2 - \gamma^2) + x\cdot{}_0H_N(x) - (N+1)\cdot\{ {}_0H_N(x) \}^2$$

この式を微分して整理し、 ${}_0H_N(x)$ の微分方程式を得る。

$$(x^2-\gamma^2)\cdot {}_0H_N(x)''+\{2(N+1)\cdot {}_0H_N(x)+x\}\cdot {}_0H_N(x)'-\{{}_0H_N(x)+2(N+1)x\}=0$$

5.２　第一種および第二種のチェビシェフ多項式基本型の比の対数関数の微分方程式

次のような関数を定義する。

$${}_0J_N(x)={}_0F_{N+1}(x)-{}_0G_N(x) \qquad \begin{cases} {}_0K_N(x)=(x^2-\gamma^2)\cdot {}_0J_N(x)-x \\ {}_0L_N(x)=(x^2-\gamma^2)\cdot {}_0J_N(x)+x \end{cases}$$

$${}_0O_N(x)={}_0F_{N+1}(x)+{}_0G_N(x) \qquad \begin{cases} {}_0P_N(x)=(x^2-\gamma^2)\cdot {}_0O_N(x)-x \\ {}_0Q_N(x)=(x^2-\gamma^2)\cdot {}_0O_N(x)+x \end{cases}$$

これらの関数の相互関係を明らかにする。 まず ${}_0H_N(x)=\dfrac{{}_0T_{N+1}(x)}{{}_0U_N(x)}$ の対数関数を考える。

$$\ln\{{}_0H_N(x)\}=\sum_{k=1}^{N+1}\left\{\ln\left(x-\gamma\cos\frac{2k-1}{2N+2}\pi\right)\right\}-\sum_{k=1}^{N}\left\{\ln\left(x-\gamma\cos\frac{k}{N+1}\pi\right)\right\}$$

さらにこの対数関数の微分を考える。

$$\frac{{}_0H_N(x)'}{{}_0H_N(x)}=\frac{{}_0T_{N+1}(x)'}{{}_0T_{N+1}(x)}-\frac{{}_0U_N(x)'}{{}_0U_N(x)}={}_0F_{N+1}(x)-{}_0G_N(x)$$

$$={}_0J_N(x)=\sum_{k=1}^{N+1}\left(\frac{1}{x-\gamma\cos\frac{2k-1}{2N+2}\pi}\right)-\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{x-\gamma\cos\frac{k}{N+1}\pi}\right)$$

すなわち ${}_0J_N(x)$ は $\ln\{{}_0H_N(x)\}$ の一階微分関数である。

次に ${}_0F_{N+1}(x)$ に関する 新しい式を導入する。

${}_0F_{N+1}(x)=\dfrac{{}_0T_{N+1}(x)'}{{}_0T_{N+1}(x)}$ をもう一度微分して整理すると次式が得られる。

$${}_0F_{N+1}(x)'=\frac{{}_0T_{N+1}(x)''\cdot}{{}_0T_{N+1}(x)}-\left\{\frac{{}_0T_{N+1}(x)'}{{}_0T_{N+1}(x)}\right\}^2=\frac{{}_0T_{N+1}(x)'}{{}_0T_{N+1}(x)}\cdot\frac{{}_0T_{N+1}(x)''}{{}_0T_{N+1}(x)'}-\left\{\frac{{}_0T_{N+1}(x)'}{{}_0T_{N+1}(x)}\right\}^2$$

$$={}_0F_{N+1}(x)\cdot {}_0G_N(x)-\{{}_0F_{N+1}(x)\}^2=-{}_0J_N(x)\cdot {}_0F_{N+1}(x)$$

またすでに述べたように　$N^2 = x \cdot {}_{\mathbf{0}}F_N(x) + (x^2-\gamma^2)\cdot\left[{}_{\mathbf{0}}F_N(x)' + \left\{{}_{\mathbf{0}}F_N(x)\right\}^2\right]$　なので、

$$(N+1)^2 = x \cdot {}_{\mathbf{0}}F_{N+1}(x) + (x^2-\gamma^2)\cdot\left[{}_{\mathbf{0}}F_{N+1}(x)' + \left\{{}_{\mathbf{0}}F_{N+1}(x)\right\}^2\right]$$

また　$N(N+2) = 3x \cdot {}_{\mathbf{0}}G_N(x) + (x^2-\gamma^2)\cdot\left[{}_{\mathbf{0}}G_N(x)' + \left\{{}_{\mathbf{0}}G_N(x)\right\}^2\right]$　なので、

この両式の差をとり、さらに ${}_{\mathbf{0}}J_N(x) = {}_{\mathbf{0}}F_{N+1}(x) - {}_{\mathbf{0}}G_N(x)$，${}_{\mathbf{0}}J_N(x)' = {}_{\mathbf{0}}F_{N+1}(x)' - {}_{\mathbf{0}}G_N(x)'$、

および　${}_{\mathbf{0}}K_N(x)' = (x^2-\gamma^2)\cdot{}_{\mathbf{0}}J_N(x)' + 2x\cdot{}_{\mathbf{0}}J_N(x) - 1$ を利用すると次の二式が得られる。

$$\begin{cases} {}_{\mathbf{0}}F_{N+1}(x) = \dfrac{1}{2}\cdot{}_{\mathbf{0}}J_N(x) - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{{}_{\mathbf{0}}K_N(x)'}{{}_{\mathbf{0}}K_N(x)} \\ {}_{\mathbf{0}}G_N(x) = -\dfrac{1}{2}\cdot{}_{\mathbf{0}}J_N(x) - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{{}_{\mathbf{0}}K_N(x)'}{{}_{\mathbf{0}}K_N(x)} \end{cases}$$

ここから ${}_{\mathbf{0}}F_{N+1}(x) + {}_{\mathbf{0}}G_N(x) = {}_{\mathbf{0}}O_N(x) = -\dfrac{{}_{\mathbf{0}}K_N(x)'}{{}_{\mathbf{0}}K_N(x)}$　で、さらに次式も得られる。

$$\left[\begin{array}{l} \left\{{}_{\mathbf{0}}F_{N+1}(x)\right\}^2 + \left\{{}_{\mathbf{0}}G_N(x)\right\}^2 = \dfrac{1}{2}\left\{{}_{\mathbf{0}}J_N(x)\right\}^2 + \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{{}_{\mathbf{0}}K_N(x)'}{{}_{\mathbf{0}}K_N(x)}\right\}^2 \\ \left\{{}_{\mathbf{0}}F_{N+1}(x)\right\}\cdot\left\{{}_{\mathbf{0}}G_N(x)\right\} = -\dfrac{1}{4}\left\{{}_{\mathbf{0}}J_N(x)\right\}^2 + \dfrac{1}{4}\left\{\dfrac{{}_{\mathbf{0}}K_N(x)'}{{}_{\mathbf{0}}K_N(x)}\right\}^2 \end{array}\right.$$

一方　${}_{\mathbf{0}}F_N(x)$　の微分方程式を利用すると、${}_{\mathbf{0}}F_{N+1}(x)$　の微分方程式は次式となり、

$$\begin{aligned}&(x^2-\gamma^2)\cdot{}_{\mathbf{0}}F_{N+1}(x)'' + 3x\cdot{}_{\mathbf{0}}F_{N+1}(x)' \\ &\quad + \left[2(N+1)^2 + 1 - 2(x^2-\gamma^2)\cdot\left\{{}_{\mathbf{0}}F_{N+1}(x)\right\}^2\right]\cdot{}_{\mathbf{0}}F_{N+1}(x) = 0\end{aligned}$$

この式に　$(N+1)^2 = (x^2-\gamma^2)\cdot\left\{{}_{\mathbf{0}}F_{N+1}(x)\right\}^2 - {}_{\mathbf{0}}K_N(x)\cdot{}_{\mathbf{0}}F_{N+1}(x)$　を代入して整理すると、

$$(x^2-\gamma^2)\cdot{}_{\mathbf{0}}F_{N+1}(x)'' + 3x\cdot{}_{\mathbf{0}}F_{N+1}(x)' + \left\{1 - 2\cdot{}_{\mathbf{0}}K_N(x)\cdot{}_{\mathbf{0}}F_{N+1}(x)\right\}\cdot{}_{\mathbf{0}}F_{N+1}(x) = 0$$

既に述べたように、${}_{\mathbf{0}}F_{N+1}(x)$ の微分方程式は次式のようにも表されるので、

$$(x^2-\gamma^2)\cdot{}_{\mathbf{0}}F_{N+1}(x)'' + 3x\cdot{}_{\mathbf{0}}F_{N+1}(x)' + \left[1 + \frac{2(N+1)^2\cdot\gamma^{2(N+1)}}{\left\{{}_{\mathbf{0}}T_{N+1}(x)\right\}^2}\right]\cdot{}_{\mathbf{0}}F_{N+1}(x) = 0$$

ここから ${}_{0}K_{N}(x)$ の値が得られる。

$$ {}_{0}K_{N}(x) = -\frac{(N+1)^2\cdot\gamma^{2(N+1)}}{\{{}_{0}T_{N+1}(x)\}^2}\cdot\frac{1}{{}_{0}F_{N+1}(x)} = -\frac{(N+1)\cdot\gamma^{2(N+1)}}{{}_{0}T_{N+1}(x)\cdot{}_{0}U_{N}(x)} = -\frac{2\ (N+1)\cdot\gamma^{2(N+1)}}{{}_{0}U_{2N+1}(x)} $$

ただし ${}_{0}T_{N}(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{{}_{0}U_{2N-1}(x)}{{}_{0}U_{N-1}(x)}$ から誘導される ${}_{0}T_{N+1}(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{{}_{0}U_{2N+1}(x)}{{}_{0}U_{N}(x)}$ を利用した。

$N=2$ から $N=7$ までの関数 ${}_{0}K_{N}(x)$ は次のようになる。

$$ {}_{0}K_{N}(x) = -\frac{(N+1)\cdot\gamma^{2(N+1)}}{{}_{0}T_{N+1}(x)\cdot{}_{0}U_{N}(x)} = -\frac{2\ (N+1)\cdot\gamma^{2(N+1)}}{{}_{0}U_{2N+1}(x)} $$

$$ {}_{0}K_{2}(x) = -\frac{3\gamma^6}{(4x^3-3\gamma^2x)(4x^2-\gamma^2)} $$

$$ {}_{0}K_{3}(x) = -\frac{4\gamma^8}{(8x^4-8\gamma^2x^2+\gamma^4)(8x^3-4\gamma^2x)} $$

$$ {}_{0}K_{4}(x) = -\frac{5\gamma^{10}}{(16x^5-20\gamma^2x^3+5\gamma^4x)(16x^4-12\gamma^2x^2+\gamma^4)} $$

$$ {}_{0}K_{5}(x) = -\frac{6\gamma^{12}}{(32x^6-48\gamma^2x^4+18\gamma^4x^4-\gamma^6)(32x^5-32\gamma^2x^3+6\gamma^4x)} $$

$$ {}_{0}K_{6}(x) = -\frac{7\gamma^{14}}{(64x^7-112\gamma^2x^5+56\gamma^4x^3-7\gamma^6x)(64x^6-80\gamma^2x^4+24\gamma^4x^2-\gamma^6)} $$

$$ {}_{0}K_{7}(x) = -\frac{8\gamma^{16}}{(128x^8-256\gamma^2x^6+160\gamma^4x^4-32\gamma^6x^2+\gamma^8)(128x^7-192\gamma^2x^5+80\gamma^4x^3-8\gamma^6x)} $$

またすでに述べたように ${}_{0}H_{N}(x) = \frac{\gamma^{2(N+1)}}{{}_{0}U_{2N+1}(x)} + {}_{0}H_{2N+1}(x)$ なので、

$$ {}_{0}K_{N}(x) = 2\ (N+1)\cdot\{{}_{0}H_{2N+1}(x) - {}_{0}H_{N}(x)\} $$ となる。

この ${}_{0}K_{N}(x)$ を利用すると、${}_{0}L_{N}(x) = {}_{0}K_{N}(x) + 2x = -\frac{2\ (N+1)\cdot\gamma^{2(N+1)}}{{}_{0}U_{2N+1}(x)} + 2x$

さらにこの $_0K_N(x)$ の微分係数 $_0K_N(x)'=(x^2-\gamma^2)\cdot{}_0J_N(x)'+2x\cdot{}_0J_N(x)-1$ は、

$$_0K_N(x)'=\frac{2(N+1)\gamma^{2(N+1)}}{_0U_{2N+1}(x)}\cdot\frac{U_{2N+1}(x)'}{_0U_{2N+1}(x)}=\frac{2(N+1)\gamma^{2(N+1)}}{_0U_{2N+1}(x)}\cdot{}_0G_{2N+1}(x)$$

$N=2$ から $N=6$ までの関数 $_0K_N(x)'$ は次のようになる。

$$_0K_N(x)'=-{}_0K_N(x)\cdot{}_0G_{2N+1}(x)=\frac{2\ (N+1)\cdot\gamma^{2(N+1)}}{_0U_{2N+1}(x)}\cdot{}_0G_{2N+1}(x)$$

$$_0K_2(x)'=3\gamma^6\cdot\frac{80x^4-48\gamma^2x^2+3\gamma^4}{(4x^3-3\gamma^2x)^2(4x^2-\gamma^2)^2}$$

$$_0K_3(x)'=4\gamma^8\cdot\frac{448x^4-480\gamma^2x^2+120\gamma^4x^2-4\gamma^6}{(8x^4-8\gamma^2x^2+\gamma^4)^2(8x^3-4\gamma^2x)^2}$$

$$_0K_4(x)'=5\gamma^{10}\cdot\frac{2304x^8-3584\gamma^2x^6+1680\gamma^4x^4-240\gamma^6x^2+5\gamma^8}{(16x^5-20\gamma^2x^3+5\gamma^4x)^2(16x^4-12\gamma^2x^2+\gamma^4)^2}$$

$$_0K_5(x)'=6\gamma^{12}\cdot\frac{11264x^{10}-23040\gamma^2x^8+16128\gamma^4x^6-4480\gamma^6x^4+420\gamma^8x^2-6\gamma^{10}}{(32x^6-48\gamma^2x^4+18\gamma^4x^4-\gamma^6)^2(32x^5-32\gamma^2x^3+6\gamma^4x)^2}$$

$$_0K_6(x)'=7\gamma^{14}\cdot\frac{53248x^{12}-135168\gamma^2x^{10}+126720\gamma^4x^8-53760\gamma^6x^6+10080\gamma^8x^4-672\gamma^{10}\gamma^2+7\gamma^{12}}{(64x^7-112\gamma^2x^5+56\gamma^4x^3-7\gamma^6x)^2(64x^6-80\gamma^2x^4+24\gamma^4x^2-\gamma^6)^2}$$

さらに $_0K_N(x)=-\dfrac{(N+1)\cdot\gamma^{2(N+1)}}{_0T_{N+1}(x)\cdot{}_0U_N(x)}$ の微分係数を考えると、

$$_0K_N(x)'=\frac{2(N+1)\gamma^{2(N+1)}}{_0U_{2N+1}(x)}\cdot\left\{{}_0F_{N+1}(x)+{}_0G_N(x)\right\}$$ が得られ、

ここから $_0F_{N+1}(x)+{}_0G_N(x)={}_0O_N(x)={}_0G_{2N+1}(x)=-\dfrac{_0K_N(x)'}{_0K_N(x)}$ となる。

さらに $_0Q_N(x)=(x^2-\gamma^2)\cdot{}_0O_N(x)+x$ の性質を調べる。

まず $_0O_N(x)={}_0G_{2N+1}(x)$ と、 $(x^2-\gamma^2)\cdot{}_0G_N(x)+x=(N+1)\cdot{}_0H_N(x)$ から、

$$_0Q_N(x)=(x^2-\gamma^2)\cdot{}_0G_{2N+1}(x)+x=2(N+1)\cdot{}_0H_{2N+1}(x)$$

そこで　${}_0H_{2N+1}(x)=\dfrac{{}_0T_{2N+2}(x)}{{}_0U_{2N+1}(x)}$　に、二種類のチェビシェフ多項式基本型間の漸化式

${}_0T_{2N+2}(x)=x\cdot{}_0U_{2N+1}(x)-\gamma^2\cdot{}_0U_{2N}(x)$　を代入して、次式を得る。

$$\begin{aligned}{}_0Q_N(x)&=2(N+1)\cdot\frac{{}_0T_{2N+2}(x)}{{}_0U_{2N+1}(x)}=2(N+1)\cdot\frac{x\cdot{}_0U_{2N+1}(x)-\gamma^2\cdot{}_0U_{2N}(x)}{{}_0U_{2N+1}(x)}\\&=2(N+1)\cdot x-2(N+1)\cdot\gamma^2\cdot\frac{{}_0U_{2N}(x)}{{}_0U_{2N+1}(x)}\end{aligned}$$

さらに　${}_0P_N(x)$　も容易に求めることができる。

$${}_0P_N(x)={}_0Q_N(x)-2x=2N\cdot x-2(N+1)\gamma^2\cdot\frac{{}_0U_{2N}(x)}{{}_0U_{2N+1}(x)}$$

さらに次の二式を整理して、

$$\begin{cases}{}_0Q_N(x)=(x^2-\gamma^2)\cdot{}_0O_N(x)+x=(x^2-\gamma^2)\cdot\left\{{}_0F_{N+1}(x)+{}_0G_N(x)\right\}+x\\{}_0K_N(x)=(x^2-\gamma^2)\cdot{}_0J_N(x)-x=(x^2-\gamma^2)\cdot\left\{{}_0F_{N+1}(x)-{}_0G_N(x)\right\}-x\end{cases}$$

${}_0Q_N(x)-{}_0K_N(x)=2(x^2-\gamma^2)\cdot{}_0G_N(x)+2x=2(N+1)\cdot{}_0H_N(x)$　が得られ、ここから

${}_0K_N(x)=2(N+1)\cdot\left\{{}_0H_{2N+1}(x)-{}_0H_N(x)\right\}$　が得られるが、この式はすでに導入した。

以上の下準備をした後、各関数の微分方程式を求める。

${}_0F_{N+1}(x)$　の微分方程式は、

$(x^2-\gamma^2)\cdot{}_0F_{N+1}(x)''+3x\cdot{}_0F_{N+1}(x)'+\left\{1-2\cdot{}_0K_N(x)\cdot{}_0F_{N+1}(x)\right\}\cdot{}_0F_{N+1}(x)=0$　で、

この式に${}_0F_{N+1}(x)'=-{}_0J_N(x)\cdot{}_0F_{N+1}(x)$　を利用すると、

${}_0F_{N+1}(x)$　の微分方程式は次式のようにも表される。

$$\begin{aligned}&(x^2-\gamma^2)\cdot{}_0F_{N+1}(x)''+5x\cdot{}_0F_{N+1}(x)'\\&\quad+\left\{1+2x\cdot{}_0J_N(x)-2\cdot{}_0K_N(x)\cdot{}_0F_{N+1}(x)\right\}\cdot{}_0F_{N+1}(x)=0\end{aligned}$$

一方　${}_{0}G_N(x)$　の微分方程式は

$$(x^2-\gamma^2)\cdot {}_{0}G_N(x)''+5x\cdot {}_{0}G_N(x)'$$
$$+\Big[\,2(N+1)^2+1-4x\cdot {}_{0}G_N(x)-2(x^2-\gamma^2)\cdot\{{}_{0}G_N(x)\}^2\,\Big]\cdot {}_{0}G_N(x)=0$$

となり、${}_{0}K_N(x)$ を用いて整理すると、次式になるので、

$$(x^2-\gamma^2)\cdot {}_{0}G_N(x)''+5x\cdot {}_{0}G_N(x)'+\{1+2x\cdot {}_{0}J_N(x)+2\cdot {}_{0}K_N(x)\cdot {}_{0}G_N(x)\}\cdot {}_{0}G_N(x)=0$$

両式の差をとって、${}_{0}J_N(x)$ の微分方程式が得られる。

$$(x^2-\gamma^2)\cdot {}_{0}J_N(x)''+5x\cdot {}_{0}J_N(x)'+{}_{0}J_N(x)+2x\cdot\{{}_{0}J_N(x)\}^2$$
$$-\Big[\{{}_{0}J_N(x)\}^2+\{{}_{0}O_N(x)\}^2\Big]\cdot {}_{0}K_N(x)$$
$$=(x^2-\gamma^2)\cdot {}_{0}J_N(x)''+5x\cdot {}_{0}J_N(x)'$$
$$+\{1+2x\cdot {}_{0}J_N(x)-{}_{0}J_N(x)\cdot {}_{0}K_N(x)\}\cdot {}_{0}J_N(x)-\{{}_{0}O_N(x)\}^2\cdot {}_{0}K_N(x)=0$$

また両式の和をとって、${}_{0}O_N(x)$ の微分方程式が得られる。

$$(x^2-\gamma^2)\cdot {}_{0}O_N(x)''+5x\cdot {}_{0}O_N(x)'$$
$$+\{1+2x\cdot {}_{0}J_N(x)-{}_{0}J_N(x)\cdot {}_{0}K_N(x)\}\cdot {}_{0}O_N(x)-{}_{0}J_N(x)\cdot {}_{0}O_N(x)\cdot {}_{0}K_N(x)$$
$$=(x^2-\gamma^2)\cdot {}_{0}O_N(x)''+5x\cdot {}_{0}O_N(x)'+\{1+2x\cdot {}_{0}J_N(x)-2\cdot {}_{0}J_N(x)\cdot {}_{0}K_N(x)\}\cdot {}_{0}O_N(x)=0$$

${}_{0}Q_N(x)$ の場合は　${}_{0}H_N(x)$ の微分方程式と　${}_{0}Q_N(x)=2(N+1)\cdot {}_{0}H_{2N+1}(x)$ とから、

$$(x^2-\gamma^2)\cdot {}_{0}Q_N(x)''+\{2\cdot {}_{0}Q_N(x)+x\}\cdot {}_{0}Q_N(x)'-\{{}_{0}Q_N(x)+8(N+1)^2x\}=0$$　となる。

${}_{0}P_N(x)={}_{0}Q_N(x)-2x$　の微分方程式は、${}_{0}Q_N(x)$ の微分方程式と

${}_{0}P_N(x)'-{}_{0}Q_N(x)'=-2$, ${}_{0}P_N(x)''-{}_{0}Q_N(x)''=0$ を利用し、次式となる。

$$(x^2-\gamma^2)\cdot {}_{0}P_N(x)''+\{2\cdot {}_{0}P_N(x)+5x\}\cdot {}_{0}P_N(x)'+\{3\cdot {}_{0}P_N(x)-8N(N+2)x\}=0$$

次に ${}_0K_N(x)$ の微分方程式を求める。

${}_0K_N(x) = -\dfrac{2(N+1)\gamma^{2(N+1)}}{{}_0U_{2N+1}(x)}$ を利用すると ${}_0U_{2N+1}(x)' = -\dfrac{{}_0K_N(x)'}{{}_0K_N(x)} \cdot {}_0U_{2N+1}(x)$ および

${}_0U_{2N+1}(x)'' = -\dfrac{{}_0K_N(x)''}{{}_0K_N(x)} \cdot {}_0U_{2N+1}(x) + 2 \cdot \left\{\dfrac{{}_0K_N(x)'}{{}_0K_N(x)}\right\}^2 \cdot {}_0U_{2N+1}(x)$ となるので、

これらの式を ${}_0U_{2N+1}(x)$ の微分方程式に代入して次式が得られる。

$$(x^2-\gamma^2)\cdot {}_0K_N(x)'' - 2(x^2-\gamma^2)\cdot\left\{\frac{{}_0K_N(x)'}{{}_0K_N(x)}\right\}\cdot {}_0K_N(x)' + 3x\cdot {}_0K_N(x)'$$
$$+(2N+1)(2N+3)\cdot {}_0K_N(x)$$
$$=(x^2-\gamma^2)\cdot {}_0K_N(x)'' + \left\{2(x^2-\gamma^2)\cdot {}_0O_N(x) + 3x\right\}\cdot {}_0K_N(x)' + (2N+1)(2N+3)\cdot {}_0K_N(x)$$
$$=(x^2-\gamma^2)\cdot {}_0K_N(x)'' + \left\{2\cdot {}_0Q_N(x) + x\right\}\cdot {}_0K_N(x)' + (2N+1)(2N+3)\cdot {}_0K_N(x) = 0$$

${}_0L_N(x) = {}_0K_N(x) + 2x$ の微分方程式は ${}_0K_N(x)$ の微分方程式と、

${}_0L_N(x)' - {}_0K_N(x)' = 2$, ${}_0L_N(x)'' - {}_0K_N(x)'' = 0$ を利用し、次式となる。

$$(x^2-\gamma^2)\cdot {}_0L_N(x)'' + \left\{2\cdot {}_0Q_N(x) + x\right\}\cdot {}_0L_N(x)'$$
$$+(2N+1)(2N+3)\cdot {}_0L_N(x) - 4\cdot {}_0Q_N(x) - 8(N+1)^2 x = 0$$

6. 総括

6. 1 関数

第一種のチェビシェフ多項式基本型： ${}_0T_N(x) = 2^{N-1}\cdot\prod_{k=1}^{N}\left(x-\gamma\cos\dfrac{2k-1}{2N}\pi\right)$ $(N \geq 2)$

第二種のチェビシェフ多項式基本型： ${}_0U_N(x) = 2^N\cdot\prod_{k=1}^{N}\left(x-\gamma\cos\dfrac{k}{N+1}\pi\right)$ $(N \geq 2)$

${}_0T_{N+1}(x)$ と ${}_0U_N(x)$ との比 ： ${}_0H_N(x) = \dfrac{{}_0T_{N+1}(x)}{{}_0U_N(x)}$

${}_0T_N(x)$ の対数関数の微分係数 ： ${}_0F_N(x) = \dfrac{{}_0T_N(x)'}{{}_0T_N(x)} = \sum_{k=1}^{N}\left(\dfrac{1}{x-\gamma\cos\dfrac{2k-1}{2N}\pi}\right)$

${}_0U_N(x)$ の対数関数の微分係数 : ${}_0G_N(x)=\dfrac{{}_0U_N(x)'}{{}_0U_N(x)}=\sum_{k=1}^{N}\Big(\dfrac{1}{x-\gamma\cos\dfrac{k}{N+1}\pi}\Big)$

${}_0T_N(x)$ の関連関数 ${}_0T_N^{-1}(X)$: ${}_0T_N^{-1}(X)=\prod_{k=1}^{N}\Big(X-\dfrac{1}{\gamma\cos\dfrac{2k-1}{2N}\pi}\Big)$ $(N\geq 2\ ,k\neq\dfrac{N+1}{2}\ )$

${}_0U_N(x)$ の関連関数 ${}_0U_N^{-1}(X)$: ${}_0U_N^{-1}(X)=\prod_{k=1}^{N}\Big(X-\dfrac{1}{\gamma\cos\dfrac{k}{N+1}\pi}\Big)$ $(N\geq 2\ ,\ k\neq\dfrac{N+1}{2}\ )$

${}_0T_N^{-1}(X)$ の関連関数 ${}_0V_N^{-1}(X)$: ${}_0V_N^{-1}(Y)=\prod_{k=1}^{N}\Big(Y-\dfrac{\tan\dfrac{2k-1}{2N}\pi}{\gamma}\Big)$ $(\ k\neq\dfrac{N+1}{2}\ )$

${}_0U_N^{-1}(X)$ の関連関数 ${}_0W_N^{-1}(Y)$: ${}_0W_N^{-1}(Y)=\prod_{k=1}^{N}\Big(Y-\dfrac{\tan\dfrac{k}{N+1}\pi}{\gamma}\ \Big)$ $(k\neq\dfrac{N+1}{2})$

${}_0F_{N+1}(x)$ と ${}_0G_N(x)$ との差 : ${}_0J_N(x)={}_0F_{N+1}(x)-{}_0G_N(x)=-\dfrac{{}_0F_{N+1}(x)'}{{}_0F_{N+1}(x)}$

${}_0F_{N+1}(x)$ と ${}_0G_N(x)$ との和 : ${}_0O_N(x)={}_0F_{N+1}(x)+{}_0G_N(x)\ =\ {}_0G_{2N+1}(x)=-\dfrac{{}_0K_N(x)'}{{}_0K_N(x)}$

${}_0J_N(x)$ の関連関数 ${}_0K_N(x)$: ${}_0K_N(x)=(\,x^2-\gamma^2)\cdot{}_0J_N(x)\ -x=-\dfrac{(N+1)\cdot\gamma^{2(N+1)}}{{}_0T_{N+1}(x)\cdot{}_0U_N(x)}$

${}_0J_N(x)$ の関連関数 ${}_0L_N(x)$: ${}_0L_N(x)=(\,x^2-\gamma^2)\cdot{}_0J_N(x)\ +x$

${}_0O_N(x)$ の関連関数 ${}_0P_N(x)$: ${}_0P_N(x)=(\,x^2-\gamma^2)\cdot{}_0O_N(x)\ -x$

${}_0O_N(x)$ の関連関数 ${}_0Q_N(x)$: ${}_0Q_N(x)=(\,x^2-\gamma^2)\cdot{}_0O_N(x)+x=2\,(\,N+1)\cdot{}_0H_{2N+1}(x)$

6. 2　微分方程式

${}_0T_N(x)$ の微分方程式 : $(1-\dfrac{x^2}{\gamma^2})\cdot{}_0T_N(x)''-\dfrac{x}{\gamma^2}\cdot{}_0T_N(x)'+\dfrac{N^2}{\gamma^2}\cdot{}_0T_N(x)=0$

${}_0U_N(x)$ の微分方程式 : $(1-\dfrac{x^2}{\gamma^2})\cdot{}_0U_N(x)''-\dfrac{3x}{\gamma^2}\cdot{}_0U_N(x)'+\dfrac{N(N+2)}{\gamma^2}\cdot{}_0U_N(x)=0$

${}_0H_N(x)$ の微分方程式　: $(x^2-\gamma^2)\cdot {}_0H_N(x)''+\{2(N+1)\cdot {}_0H_N(x)+x\}\cdot {}_0H_N(x)'$
$-\{{}_0H_N(x)+2(N+1)x\}=0$

${}_0F_{N+1}(x)$ の微分方程式　: $(x^2-\gamma^2)\cdot {}_0F_{N+1}(x)''+5x\cdot {}_0F_{N+1}(x)'$
$+\{1+2x\cdot {}_0J_N(x)-2\cdot {}_0K_N(x)\cdot {}_0F_{N+1}(x)\}\cdot {}_0F_{N+1}(x)=0$

${}_0G_N(x)$ の微分方程式　: $(x^2-\gamma^2)\cdot {}_0G_N(x)''+5x\cdot {}_0G_N(x)'$
$+\{1+2x\cdot {}_0J_N(x)+2\cdot {}_0K_N(x)\cdot {}_0G_N(x)\}\cdot {}_0G_N(x)=0$

${}_0T_N^{-1}(X)$ の微分方程式　: $(X^2-\frac{1}{\gamma^2})\cdot {}_0T_N^{-1}(X)''-\{2(N-1)\cdot X-\frac{2N-1}{\gamma^2}\cdot\frac{1}{X}\}\cdot {}_0T_N^{-1}(X)'$
$+N(N-1)\cdot {}_0T_N^{-1}(X)=0$

${}_0U_N^{-1}(X)$ の微分方程式　: $(X^2-\frac{1}{\gamma^2})\cdot {}_0U_N^{-1}(X)''-\left\{2(N-1)\cdot X-\frac{2N+1}{\gamma^2}\cdot\frac{1}{X}\right\}\cdot {}_0U_N^{-1}(X)'$
$+N(N-1)\cdot {}_0U_N^{-1}(X)=0$

${}_0V_N^{-1}(X)$ の微分方程式　: $(Y^2+\frac{1}{\gamma^2})\cdot {}_0V_N^{-1}(Y)''-2(N-1)\cdot Y\cdot {}_0V_N^{-1}(Y)'$
$+N(N-1)\cdot {}_0V_N^{-1}(Y)=0$

${}_0W_N^{-1}(Y)$ の微分方程式　: $(Y^2+\frac{1}{\gamma^2})\cdot {}_0W_N^{-1}(Y)''-2\{(N-1)\cdot Y-\frac{1}{\gamma^2}\cdot\frac{1}{Y}\}\cdot {}_0W_N^{-1}(Y)'$
$+N(N-1)\cdot {}_0W_N^{-1}(Y)=0$

${}_0J_N(x)$ の微分方程式　: $(x^2-\gamma^2)\cdot {}_0J_N(x)''+5x\cdot {}_0J_N(x)'$
$+\{1+2x\cdot {}_0J_N(x)-{}_0J_N(x)\cdot {}_0K_N(x)\}\cdot {}_0J_N(x)$
$-\{{}_0O_N(x)\}^2\cdot {}_0K_N(x)=0$

${}_0O_N(x)$ の微分方程式　: $(x^2-\gamma^2)\cdot {}_0O_N(x)''+5x\cdot {}_0O_N(x)'$
$+\{1+2x\cdot {}_0J_N(x)-2\cdot {}_0J_N(x)\cdot {}_0K_N(x)\}\cdot {}_0O_N(x)=0$

${}_0K_N(x)$ の微分方程式　: $(x^2-\gamma^2)\cdot {}_0K_N(x)''+\{2\cdot {}_0Q_N(x)+x\}\cdot {}_0K_N(x)'$
$+(2N+1)(2N+3)\cdot {}_0K_N(x)=0$

$_0L_N(x)$ の微分方程式　：
$$(x^2-\gamma^2)\cdot {}_0L_N(x)''+\left\{2\cdot {}_0Q_N(x)+x\right\}\cdot {}_0L_N(x)' \\ +(2N+1)(2N+3)\cdot {}_0L_N(x)-4\cdot {}_0Q_N(x)-8(N+1)^2x=0$$

$_0P_N(x)$ の微分方程式　：
$$(x^2-\gamma^2)\cdot {}_0P_N(x)''+\left\{2\cdot {}_0P_N(x)+5x\right\}\cdot {}_0P_N(x)' \\ +\left\{3\cdot {}_0P_N(x)-8N(N+2)x\right\}=0$$

$_0Q_N(x)$ の微分方程式　：
$$(x^2-\gamma^2)\cdot {}_0Q_N(x)''+\left\{2\cdot {}_0Q_N(x)+x\right\}\cdot {}_0Q_N(x)' \\ -\left\{{}_0Q_N(x)+8(N+1)^2x\right\}=0$$

以上、本稿に現れる関数とその関数の微分方程式をまとめた。

参考文献

手代木　琢磨、勝間　豊：特殊な行列式とチェビシェフ多項式、産業能率大学紀要、37（1），2016，pp. 1-23