［研究ノート］

Sanno University Bulletin Vol. 37 No. 1 September 2016

特殊な行列式とチェビシェフ多項式

The Third Report on Special Determinants and Chebyshev Polynomials

手代木　琢磨
Takuma Teshirogi
勝間　豊
Yutaka Katsuma

Abstract
In our previous papers, the secular equation of quantum chemistry was extended to the special determinants. In this paper the determinants are related to the first and the second Chebyshev polynomials and the relationship between the two polynomials are discussed.

1. 序　論

前二報（手代木2011、手代木＆勝間（2015）において、量子化学の単純ヒュッケル法で使われる永年方程式から誘導される二種類の行列式の性質を議論した。現報ではこの二種類の行列式が Chebyshev の第一種および第二種の多項式と深く関係し、しかもこの関係を利用して、Chebyshev 多項式間の新しい関係式も誘導されることが解ったので報告する。

2. チェビシェフ多項式

$\cos N\theta = f(\cos\theta)$ の $\cos\theta$ を x として表した式 $T_N(x)$ が第一種の Chebyshev 多項式、

$\sin(N+1)\theta = \sin\theta \cdot g(\cos\theta)$ の $\cos\theta$ を x として表した式 $U_N(x)$ が第二種の Chebyshev 多項式である。例えば

2016年2月22日　受理

特殊な行列式とチェビシェフ多項式

$\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$ から $T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$

$\cos 6\theta = 32\cos^6\theta - 48\cos^4\theta + 18\cos^2\theta - 1$ から $T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$

$\sin 6\theta = \sin\theta\,(32\cos^5\theta - 32\cos^3\theta + 6\cos\theta)$ から $U_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x$

$\sin 7\theta = \sin\theta\,(64\cos^6\theta - 80\cos^4\theta + 24\cos^4\theta - 1)$ から $U_6(x) = 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1$

$T_N(x)$ と $U_N(x)$ の関係を示す。

$$(\cos N\theta)^2 + (\sin\theta \cdot \frac{\sin N\theta}{\sin\theta})^2 = (\cos N\theta)^2 + (1-\cos^2\theta)(\frac{\sin N\theta}{\sin\theta})^2$$

$$= \{T_N(x)\}^2 + (1-x^2)\{U_{N-1}(x)\}^2 = 1$$

$T_N(x)$ および $U_N(x)$ を下にまとめる。

$T_0(x) = 1$	$U_0(x) = 1$
$T_1(x) = x$	$U_1(x) = 2x$
$T_2(x) = 2x^2 - 1$	$U_2(x) = 4x^2 - 1$
$T_3(x) = 4x^3 - 3x$	$U_3(x) = 8x^3 - 4x$
$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$	$U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1$
$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$	$U_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x$
$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$	$U_6(x) = 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1$
$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$	$U_7(x) = 128x^7 - 192x^5 + 80x^3 - 8x$
$T_8(x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$	$U_8(x) = 256x^8 - 448x^6 + 240x^4 - 40x^2 + 1$
$T_9(x) = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x$	$U_9(x) = 512x^9 - 1024x^7 + 672x^5 - 160x^3 + 10x$

$T_N(x)$ と $U_N(x)$ を別々に揚げると

$T_{10}(x) = 512x^{10} - 1280x^8 + 1120x^6 - 400x^4 + 50x^2 - 1$

$T_{11}(x) = 1024x^{11} - 2816x^9 + 2816x^7 - 1232x^5 + 220x^3 - 11x$

$T_{12}(x) = 2048x^{12} - 6144x^{10} + 6912x^8 - 3584x^6 + 840x^4 - 72x^2 + 1$

$T_{13}(x) = 4096x^{13} - 13312x^{11} + 16640x^9 - 9984x^7 + 2912x^5 - 364x^3 + 13x$

$T_{14}(x) = 8192x^{14} - 28672x^{12} + 39424x^{10} - 26880x^8 + 9408x^6 - 1568x^4 + 98x^2 - 1$

$T_{15}(x) = 16384x^{15} - 61440x^{13} + 92160x^{11} - 70400x^9 + 28800x^7 - 6048x^5 + 560x^3 - 15x$

$$U_{10}(x) = 1024x^{10} - 2304x^{8} + 1792x^{6} - 560x^{4} + 60x^{2} - 1$$
$$U_{11}(x) = 2048x^{11} - 5120x^{9} + 4608x^{7} - 1792x^{5} + 280x^{3} - 12x$$
$$U_{12}(x) = 4096x^{12} - 11264x^{10} + 11520x^{8} - 5376x^{6} + 1120x^{4} - 84x^{2} + 1$$
$$U_{13}(x) = 8192x^{13} - 24576x^{11} + 28160x^{9} - 15360x^{7} + 4032x^{5} - 448x^{3} + 14x$$
$$U_{14}(x) = 16384x^{14} - 53248x^{12} + 67584x^{10} - 42240x^{8} + 13440x^{6} - 2016x^{4} + 112x^{2} - 1$$
$$U_{15}(x) = 32768x^{15} - 114688x^{13} + 159744x^{11} - 112640x^{9} + 42240x^{7} - 8064x^{5} + 672x^{3} - 16x$$

さらに $\begin{cases} \sin(N+1)\theta = \sin N\theta \cdot \cos\theta + \cos N\theta \cdot \sin\theta \\ \sin(N-1)\theta = \sin N\theta \cdot \cos\theta - \cos N\theta \cdot \sin\theta \end{cases}$ から、

$$T_N(x) = \cos N\theta = \frac{\sin(N+1)\theta - \sin(N-1)\theta}{2\sin\theta}$$
$$= \frac{\sin\theta \cdot U_N(x) - \sin\theta \cdot U_{N-2}(x)}{2\sin\theta} = \frac{U_N(x) - U_{N-2}(x)}{2}$$

また $\begin{cases} \cos(N+1)\theta = \cos N\theta \cdot \cos\theta - \sin N\theta \cdot \sin\theta \\ \cos(N-1)\theta = \cos N\theta \cdot \cos\theta + \sin N\theta \cdot \sin\theta \end{cases}$ から、

$$T_N(x) = \cos N\theta = \frac{\cos(N+1)\theta + \cos(N-1)\theta}{2\cos\theta} = \frac{T_{N+1}(x) + T_{N-1}(x)}{2x}$$ となり、

第一種の Chebyshev 多項式の漸化式 $T_{N+1}(x) + T_{N-1}(x) = 2x \cdot T_N(x)$ を得る。

さらに $\begin{cases} \sin(N+2)\theta = \sin(N+1)\theta \cdot \cos\theta + \cos(N+1)\theta \cdot \sin\theta \\ \sin N\theta = \sin(N+1)\theta \cdot \cos\theta - \cos(N+1)\theta \cdot \sin\theta \end{cases}$ から、

$$\sin(N+1)\theta = \sin\theta \cdot U_N(x) = \frac{\sin(N+2)\theta + \sin N\theta}{2\cos\theta} = \frac{\sin\theta \cdot U_{N+1}(x) + \sin\theta \cdot U_{N-1}(x)}{2x}$$

となり、第二種の Chebyshev 多項式の漸化式 $U_{N+1}(x) + U_{N-1}(x) = 2x \cdot U_N(x)$ を得る。

さらに第一種の Chebyshev 多項式は $T_N(\cos\frac{B}{A}\pi) = \cos\frac{NB}{A}\pi$ で、$x = \cos\frac{B}{A}\pi$ とおいて

$$1 + T_{2N}(x) = 1 + T_{2N}(\cos\frac{B}{A}\pi) = 1 + \cos\frac{2NB}{A}\pi = 2\cos^2\frac{NB}{A}\pi$$
$$= 2\left\{T_N(\cos\frac{B}{A}\pi)\right\}^2 = 2\{T_N(x)\}^2$$

3. 特殊行列式とチェビシェフ多項式との関係

一方、第一報で定義した行列式と Chebyshev の多項式との関係を述べる。
左側が第一種の行列式、右側が第二種の行列式である。

$$|\mathbf{X_N}| = \begin{vmatrix} x & b & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ a & x & b & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & a & x & b & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & a & x & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & a & x & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & a & x \end{vmatrix} \qquad |_{+}\mathbf{X_N}| = \begin{vmatrix} x & b & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & a \\ a & x & b & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & a & x & b & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & a & x & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & a & x & b \\ b & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & a & x \end{vmatrix}$$

例えば 4 次の行列式は次のようになる。

$$|\mathbf{X_4}| = \begin{vmatrix} x & b & 0 & 0 \\ a & x & b & 0 \\ 0 & a & x & b \\ 0 & 0 & a & x \end{vmatrix} = x^4 - 3abx^2 + a^2b^2 \qquad |_{+}\mathbf{X_4}| = \begin{vmatrix} x & b & 0 & a \\ a & x & b & 0 \\ 0 & a & x & b \\ b & 0 & a & x \end{vmatrix} = x^4 - 4abx^2 - (a^2 - b^2)^2$$

これらの行列式の a, b に $a = b = \frac{1}{2}$ を代入した行列式を $|\mathbf{U_4}|$ および $|_{+}\mathbf{T_4}|$ とおくと

$$|\mathbf{U_4}| = \begin{vmatrix} x & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & x & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & x & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & x \end{vmatrix} = x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{16} \qquad |_{+}\mathbf{T_4}| = \begin{vmatrix} x & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & x & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & x & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & x \end{vmatrix} = x^4 - x^2$$

$$|\mathbf{U_5}| = x^5 - x^3 + \frac{3}{16}x \qquad |_{+}\mathbf{T_5}| = x^5 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{5}{16}x + \frac{1}{16}$$

二種類の行列式を Chebyshev 多項式に対応させると、例えば

$$U_4(x) = 2^4 \cdot |\mathbf{U_4}| = 16x^4 - 12x^2 + 1 \qquad T_4(x) - 1 = 2^3 \cdot |_{+}\mathbf{T_4}| = 8x^4 - 8x^2$$

$$U_5(x) = 2^5 \cdot |\mathbf{U_5}| = 32x^5 - 32x^3 + 6x \qquad T_5(x) + 1 = 2^4 \cdot |_{+}\mathbf{T_5}| = 16x^5 - 20x^3 + 5x + 1$$

一般に N 次の行列式の場合は次のようになる。

$$U_N(x) = 2^N \cdot \left| \mathbf{U_N} \right| \;(N \ge 2) \qquad T_N(x) - (-1)^N = 2^{N-1} \cdot \left| {}_{+}\mathbf{T_N} \right| \;(N \ge 3)$$

第二報から第一種の行列式は第二種の Chebyshev 多項式と次のような関係がある。

$$\begin{cases} \left| \mathbf{X_{2N}} \right| = \sum_{k=0}^{N} \left\{ (-ab)^k \; {}_{2N-k}C_k \; x^{2(N-k)} \right\} \\ \left| \mathbf{X_{2N+1}} \right| = \sum_{k=0}^{N} \left\{ (-ab)^k \; {}_{2N+1-k}C_k \; x^{2(N-k)+1} \right\} \end{cases} \text{から} \begin{cases} U_{2N}(x) = \sum_{k=0}^{N} \left\{ (-1)^k \; {}_{2N-k}C_k \, (2x)^{2(N-k)} \right\} \\ U_{2N+1}(x) = \sum_{k=0}^{N} \left\{ (-1)^k \; {}_{2N+1-k}C_k \, (2x)^{2(N-k)+1} \right\} \end{cases}$$

上の式と $T_N(x) = \dfrac{U_N(x) - U_{N-2}(x)}{2}$ とを利用して

$$\begin{cases} T_{2N}(x) = \dfrac{1}{2} \cdot {}_{2N}C_0 (2x)^{2N} + \dfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} \left\{ (-1)^k ({}_{2N-k}C_k + {}_{2N-k-1}C_{k-1})(2x)^{2(N-k)} \right\} + (-1)^N \\ \qquad = N \sum_{k=0}^{N} \left\{ (-1)^k \cdot \dfrac{{}_{2N-k}C_k}{2N-k} \cdot (2x)^{2(N-k)} \right\} \\ T_{2N+1}(x) = \dfrac{1}{2} \cdot {}_{2N+1}C_0 (2x)^{2N+1} + \dfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \left\{ (-1)^k ({}_{2N+1-k}C_k + {}_{2N-k}C_{k-1})(2x)^{2(N-k)+1} \right\} \\ \qquad = \dfrac{2N+1}{2} \sum_{k=0}^{N} \left\{ (-1)^k \dfrac{{}_{2N+1-k}C_k}{2N+1-k} \cdot (2x)^{2(N-k)+1} \right\} \end{cases}$$

あるいは偶数次と奇数次の Chebyshev 多項式をまとめて

$$\begin{cases} T_{2N+j}(x) = \dfrac{2N+j}{2} \sum_{k=0}^{N} \left\{ (-1)^k \dfrac{{}_{2N+j-k}C_k}{2N+j-k} \cdot (2x)^{2(N-k)+j} \right\} \\ U_{2N+j}(x) = \sum_{k=0}^{N} \left\{ (-1)^k \; {}_{2N+j-k}C_k \, (2x)^{2(N-k)+j} \right\} \end{cases} \quad (\; j = 0 \text{ or } 1 \;)$$

また第一報で述べたように $\dfrac{d}{dx}\left[\left| {}_{+}\mathbf{T_N} \right| \right] = N \cdot \left| \mathbf{U_{N-1}} \right|$ なので

$$\frac{d}{dx}\left[T_N(x) \right] = 2^{N-1} \cdot \frac{d}{dx}\left[\left| {}_{+}\mathbf{T_N} \right| \right] = 2^{N-1} \cdot N \left| \mathbf{U_{N-1}} \right| = N \cdot U_{N-1}(x) \quad \text{となる。}$$

この式を用いて　　$T_{\boldsymbol{2N}}(x)+1=2\left\{T_N(x)\right\}^2$　の微分係数を計算し、次式を得る。

$$\frac{d}{dx}\left[T_{\boldsymbol{2N}}(x)+1\right]=2^{\boldsymbol{2}N-1}\cdot\frac{d}{dx}\left[\left|{}_{+}\mathbf{T}_{\mathbf{2N}}\right|\right]=2^{\boldsymbol{2}N-1}\cdot 2N\cdot\left|\mathbf{U}_{\mathbf{2N-1}}\right|=2N\cdot U_{\boldsymbol{2N-1}}(x)$$

$$=\frac{d}{dx}\left[2\left\{T_N(x)\right\}^2\right]=2^2\cdot T_N(x)\cdot\frac{d}{dx}\left[T_N(x)\right]=2^2\cdot N\cdot T_N(x)\cdot U_{\boldsymbol{N-1}}(x)$$

$$T_N(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{U_{\boldsymbol{2N-1}}(x)}{U_{\boldsymbol{N-1}}(x)}$$

この式が二種類の Chebyshev 多項式間のもう一つの関係式である。

第一種の行列式と上の式を利用して、第一種の Chebyshev 多項式の因数分解を行う。

第一種の行列式は　$\left|\mathbf{X}_{\mathbf{N}}\right|=\prod_{k=1}^{N}\left(x-2\sqrt{ab}\cdot\cos\frac{k}{N+1}\pi\right)\ (k=1\sim N)$　と表せるので

$$U_N(x)=2^N\left|\mathbf{U}_{\mathbf{N}}\right|=\ 2^N\prod_{k=1}^{N}\left(x-\cos\frac{k}{N+1}\pi\right)\ (N\geq 2)\text{ となり、ここから}$$

$$U_{\boldsymbol{2N-1}}(x)=2^{2N-1}\prod_{k=1}^{2N-1}\left(x-\cos\frac{k}{2N}\pi\right)\qquad U_{\boldsymbol{N-1}}(x)=\ 2^{N-1}\prod_{k=1}^{N-1}\left(x-\cos\frac{k}{N}\pi\right)\text{ を得て、}$$

$$T_N(x)=2^{N-1}\cdot\frac{\left(x-\cos\frac{1}{2N}\pi\right)\left(x-\cos\frac{2}{2N}\pi\right)\cdots\left(x-\cos\frac{2N-2}{2N}\pi\right)\left(x-\cos\frac{2N-1}{2N}\pi\right)}{\left(x-\cos\frac{1}{N}\pi\right)\left(x-\cos\frac{2}{N}\pi\right)\cdots\left(x-\cos\frac{N-2}{N}\pi\right)\left(x-\cos\frac{N-1}{N}\pi\right)}$$

$$=2^{N-1}\left(x-\cos\frac{1}{2N}\pi\right)\left(x-\cos\frac{3}{2N}\pi\right)\cdots\left(x-\cos\frac{2N-3}{2N}\pi\right)\left(x-\cos\frac{2N-1}{2N}\pi\right)$$

$$=2^{N-1}\prod_{k=1}^{N}\left(x-\cos\frac{2k-1}{2N}\pi\right)$$

両種類の Chebyshev 多項式の結果をまとめると、

$$\begin{cases} T_N(x)=2^{N-1}\prod_{k=1}^{N}\left(x-\cos\frac{2k-1}{2N}\pi\right) & (N\geq 2) \\ U_N(x)=2^N\prod_{k=1}^{N}\left(x-\cos\frac{k}{N+1}\pi\right) & (N\geq 2) \end{cases}$$

4. チェビシェフの微分方程式

$(1-x^2)\cdot T_N(x)''-x\cdot T_N(x)'+N^2\cdot T_N(x)=0$ の解は第一種の Chebyshev 多項式である。

第二種の Chebyshev 多項式を解とする微分方程式は $\dfrac{d}{dx}\left[\,T_{N+1}(x)\,\right]=(\,N+1\,)\cdot U_N(x)$ を

利用して $(1-x^2)\cdot\dfrac{d}{dx}\left[\,U_N(x)\,\right]-x\cdot U_N(x)+(\,N+1\,)\cdot T_{N+1}(x)=0$ となり、もう一度

微分して次式を得る。 $(1-x^2)\cdot U_N(x)''-3x\cdot U_N(x)'+N(N+2)\cdot U_N(x)=0$

5. チェビシェフの微分方程式の応用

5. 1 第一種のチェビシェフ多項式の応用

偶数次の第一種の Chebyshev 多項式 、例えば $T_4(x)=8x^4-8x^2+1$ から

$T_4^{-1}(X)=X^4-8X^2+8$ を導入する。一般に

$$T_{2N}(x)=N\sum_{k=0}^{N}\left\{(-1)^k\cdot\frac{{}_{2N-k}C_k}{2N-k}\cdot(2x)^{2(N-k)}\right\}$$ から $$T_{2N}^{-1}(X)=N\sum_{k=0}^{N}\left\{(-4)^k\cdot\frac{{}_{N+k}C_{N-k}}{N+k}\cdot X^{2(N-k)}\right\}$$

この多項式の微分方程式を求める。 $T_{2N}(x)=(-1)^N X^{-2N}\cdot T_{2N}^{-1}(X)$ であるが、係数を無視して

$T_{2N}(x)=X^{-2N}\cdot T_{2N}^{-1}(X)$ として計算する。 $x=\dfrac{1}{X}$ とおくと、 $\dfrac{dX}{dx}=-X^2$ となるので

$$\frac{d}{dx}\left[\,T_{2N}(x)\,\right]=X^{-2N+1}\cdot\left\{2N\cdot T_{2N}^{-1}(X)-X\cdot T_{2N}^{-1}(X)'\right\}$$ この式をもう一度微分して

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\,T_{2N}(x)\,\right]=X^{-2N+2}\left\{X^2\cdot T_{2N}^{-1}(X)''-2(2N-1)\cdot X\cdot T_{2N}^{-1}(X)'+2N(2N-1)\cdot T_{2N}^{-1}(X)\right\}$$

これらの式を $(1-x^2)\cdot T_{2N}(x)''-x\cdot T_{2N}(x)'+4N^2\cdot T_{2N}(x)=0$ に代入して次式が得られる。

$$(X^2-1)\cdot T_{2N}^{-1}(X)''-\left\{2(2N-1)X-\frac{4N-1}{X}\right\}\cdot T_{2N}^{-1}(X)'+2N(2N-1)\cdot T_{2N}^{-1}(X)=0$$

奇数次の第一種の Chebyshev 多項式、例えば $T_5(x)=16x^5-20x^3+5x$ の場合は、

$T_5^{-1}(X)=X^4-4X^2+\dfrac{16}{5}$ を考える。一般に

$$T_{2N+1}(x)=\frac{2N+1}{2}\sum_{k=0}^{N}\left\{(-1)^k\,\frac{{}_{2N+1-k}C_k}{2N+1-k}\cdot(2x)^{2(N-k)+1}\right\}$$ から

$$T_{2N+1}^{-1}(X)=\sum_{k=0}^{N}\left\{(-4)^k\cdot\frac{{}_{N+k+1}C_{N-k}}{N+1+k}\cdot X^{2(N-k)}\right\}$$

この多項式の微分方程式を求める。 $T_{2N+1}(x)=(-1)^N(2N+1)\cdot X^{-2N-1}\cdot T_{2N+1}^{-1}(X)$ であるが、

係数を無視して $T_{2N+1}(x)=X^{-2N-1}\cdot T_{2N+1}^{-1}(X)$ として計算する。

$$\frac{d}{dx}\left[T_{2N+1}(x)\right]=X^{-2N}\cdot\left\{(2N+1)\cdot T_{2N+1}^{-1}(X)-X\cdot T_{2N+1}^{-1}(X)'\right\}$$ この式をもう一度微分して、

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[T_{2N+1}(x)\right]=X^{-2N+1}\left\{X^2\cdot T_{2N+1}(X)''-4N\cdot X\cdot T_{2N+1}(X)'+2N(2N+1)\cdot T_{2N+1}(X)\right\}$$

これらの式を $(1-x^2)\cdot T_{2N+1}(x)''-x\cdot T_{2N+1}(x)'+(2N+1)^2\cdot T_{2N+1}(x)=0$ に代入して、

$$(X^2-1)\cdot T_{2N+1}^{-1}(X)''-(4N\cdot X-\frac{4N+1}{X})\cdot T_{2N+1}^{-1}(X)'+2N(2N+1)\cdot T_{2N+1}^{-1}(X)=0$$

これらの関数が偶数次でも奇数次でも同じ微分方程式となるので、まずこの関数をまとめておく。

$T_2^{-1}(X)=X^2-2$

$T_3^{-1}(X)=X^2-\dfrac{4}{3}$

$T_4^{-1}(X)=X^4-8X^2+8$

$T_5^{-1}(X)=X^4-4X^2+\dfrac{16}{5}$

$T_6^{-1}(X)=X^6-18X^4+48X^2-32$

$T_7^{-1}(X)=X^6-8X^4+16X^2-\dfrac{64}{7}$

$$T_8^{-1}(X)=X^8-32X^6+160X^4-256X^2+128$$
$$T_9^{-1}(X)=X^8-\frac{40}{3}X^6+48X^4-64X^2+\frac{256}{9}$$
$$T_{10}^{-1}(X)=X^{10}-50X^8+400X^6-1120X^4+1280X^2-512$$
$$T_{11}^{-1}(X)=X^{10}-20X^8+112X^6-256X^4+256X^2-\frac{1024}{11}$$
$$T_{12}^{-1}(X)=X^{12}-72X^{10}+840X^8-3584X^6+6912X^4-6144X^2+2048$$
$$T_{13}^{-1}(X)=X^{12}-28X^{10}+224X^8-768X^6+1280X^4-1024X^2+\frac{4096}{13}$$

微分方程式は次式で表される。

$$(X^2-1)\cdot T_N^{-1}(X)''-\left\{2(N-1)\cdot X-\frac{2N-1}{X}\right\}\cdot T_N^{-1}(X)'+N(N-1)\cdot T_N^{-1}(X)=0$$

この関数の因数分解は　$T_N^{-1}(X)=\prod_{k=1}^{N}\left(X-\frac{1}{\cos\frac{2k-1}{2N}\pi}\right)$　$\left(k\neq\frac{N+1}{2}\right)$　となる。

さらに余弦の性質から $T_N^{-1}(X)=\prod_{k=1}\left(X^2-\frac{1}{\cos^2\frac{2k-1}{2N}\pi}\right)=\prod_{k=1}\left(X^2-1-\tan^2\frac{2k-1}{2N}\pi\right)$ となるので、

$T_N^{-1}(X)$ の X^2 に $X^2=Y^2+1$ を代入し、得られる関数を $V_N^{-1}(Y)$ として下にまとめる。

$V_2^{-1}(Y)=Y^2-1$　　$V_3^{-1}(Y)=Y^2-\frac{1}{3}$

$V_4^{-1}(Y)=Y^4-6Y^2+1$　　$V_5^{-1}(Y)=Y^4-2Y^2+\frac{1}{5}$

$V_6^{-1}(Y)=Y^6-15Y^4+15Y^2-1$　　$V_7^{-1}(Y)=Y^6-5Y^4+3Y^2-\frac{1}{7}$

$V_8^{-1}(Y)=Y^8-28Y^6+70Y^4-28Y^2+1$　　$V_9^{-1}(Y)=Y^8-\frac{28}{3}Y^6+14Y^4-4Y^2+\frac{1}{9}$

$$V_{10}^{-1}(Y)=Y^{10}-45Y^8+210Y^6-210Y^4+45Y^2-1$$

$$V_{11}^{-1}(Y)=Y^{10}-15Y^8+42Y^6-30Y^4+5Y^2-\frac{1}{11}$$

$$V_{12}^{-1}(Y)=Y^{12}-66Y^{10}+495Y^8-924Y^6+495Y^4-66Y^2+1$$

$$V_{13}^{-1}(Y)=Y^{12}-22Y^{10}+99Y^8-132Y^6+55Y^4-6Y^2+\frac{1}{13}$$

この関数を一般的に表すと

$$\begin{cases} V_{2N}^{-1}(Y)=\sum_{k=0}^{N}\left\{(-1)^k\,{}_{2N}C_{2k}\cdot Y^{2(N-k)}\right\}=\prod_{k=1}^{N}\left(Y^2-\tan^2\frac{2k-1}{4N}\pi\right)=\prod_{i=1}^{2N}\left(Y-\tan\frac{2i-1}{4N}\pi\right) \\ V_{2N+1}^{-1}(Y)=\sum_{k=0}^{N}\left\{(-1)^k\frac{{}_{2N}C_{2k}}{2k+1}\cdot Y^{2(N-k)}\right\}=\prod_{k=1}^{N}\left(Y^2-\tan^2\frac{2k-1}{4N+2}\pi\right)=\prod_{i=1}^{2N+1}\left(Y-\tan\frac{2i-1}{4N+2}\pi\right) \end{cases}$$

ただし　$V_{2N+1}^{-1}(Y)$　の場合は　$i=N+1$　を除く。因みに

$$\frac{d}{dY}\left[V_{2N+1}^{-1}(Y)\right]=\frac{d}{dY}\left[\sum_{k=0}^{N}\left\{(-1)^k\frac{{}_{2N}C_{2k}}{2k+1}\cdot Y^{2(N-k)}\right\}\right]=\sum_{k=0}^{N-1}\left\{(-1)^k\,{}_{2N}C_{2k+1}\cdot Y^{2(N-k)-1}\right\}$$ である。

この関数の微分方程式を求める。 $X^2=Y^2+1$ から $\dfrac{dY}{dX}=\dfrac{\sqrt{Y^2+1}}{Y}$

$$\frac{d}{dX}\left[T_N^{-1}(X)\right]=\frac{d}{dY}\left[V_N^{-1}(Y)\right]\cdot\left(\frac{dY}{dX}\right)=\frac{\sqrt{Y^2+1}}{Y}\cdot V_N^{-1}(Y)'$$

$$\frac{d^2}{dX^2}\left[T_N^{-1}(X)\right]=\frac{Y^2+1}{Y^2}\cdot V_N^{-1}(Y)''-\frac{1}{Y^3}\cdot V_N^{-1}(Y)'$$

これらの式を $T_N^{-1}(X)$ の微分方程式に代入して、

$$(Y^2+1)\cdot V_N^{-1}(Y)''-2(N-1)Y\cdot V_N^{-1}(Y)'+N(N-1)\cdot V_N^{-1}(Y)=0$$ を得る。

一方 $T_N(x)$ の対数を取って微分して得られる関数 $F_N(x)$ の微分方程式を求める。

$T_N(x)=2^{N-1}\prod_{k=1}^{N}\left(x-\cos\dfrac{2k-1}{2N}\pi\right)$ の対数 $\ln\left\{T_N(x)\right\}=\ln(2^{N-1})+\sum_{k=1}^{N}\left\{\ln(x-\cos\dfrac{2k-1}{2N}\pi)\right\}$ を

微分すると $F_N(x)$ が得られる。 $F_N(x)=\dfrac{T_N(x)'}{T_N(x)}=N\cdot\dfrac{U_{N-1}(x)}{T_N(x)}=\sum_{k=1}^{N}\left\{\dfrac{1}{x-\cos\dfrac{2k-1}{2N}\pi}\right\}$

この $F_N(x)$ をもう一度微分して $F_N(x)'$ が得られる。

ここから $$\frac{T_N(x)''}{T_N(x)}=\sum_{i,j}\left\{\frac{2}{\left(x-\cos\frac{2i-1}{2N}\pi\right)\left(x-\cos\frac{2j-1}{2N}\pi\right)}\right\}\ (1\le i<j\le N)$$

これらの式を第一種の Chebyshev 多項式の微分方程式、 $(1-x^2)\cdot T_N(x)''-x\cdot T_N(x)'+N^2\cdot T_N(x)=0$

に代入し次式を得る。 $$\sum_{k=1}^{N}\left\{\frac{x}{x-\cos\frac{2k-1}{2N}\pi}\right\}+\sum_{i,j}\left\{\frac{2(x^2-1)}{\left(x-\cos\frac{2i-1}{2N}\pi\right)\left(x-\cos\frac{2j-1}{2N}\pi\right)}\right\}=N^2$$

さらに $\ln\left\{T_N(x)'\right\}$ の微分 $\dfrac{T_N(x)''}{T_N(x)'}$ は次式となる。

$$\frac{d}{dx}\left[\ln\left\{T_N(x)'\right\}\right]=\frac{T_N(x)''}{T_N(x)'}=2\cdot\frac{\sum_{i,j}\left\{\frac{1}{\left(x-\cos\frac{2i-1}{2N}\pi\right)\left(x-\cos\frac{2j-1}{2N}\pi\right)}\right\}}{\sum_{k=1}^{N}\left\{\frac{1}{x-\cos\frac{2k-1}{2N}\pi}\right\}}$$

一方　$T_N(x)' = T_N(x) \cdot F_N(x)$　と　$T_N(x)'' = T_N(x) \cdot \left[F_N(x)' + \{F_N(x)\}^2 \right]$　を

第一種の Chebyshev 多項式の微分方程式に代入し、

$(1-x^2) \cdot T_N(x) \cdot \left[F_N(x)' + \{F_N(x)\}^2 \right] - x \cdot T_N(x) \cdot F_N(x) + N^2 \cdot T_N(x) = 0$　を整理し

$N^2 = x \cdot F_N(x) + (x^2-1) \cdot \left[F_N(x)' + \{F_N(x)\}^2 \right]$　この式をもう一度微分してさらに整理すると

$$
\begin{aligned}
&(x^2-1) \cdot F_N(x)'' + 3x \cdot F_N(x)' + F_N(x) \cdot \left[2N^2 + 1 - 2\,(x^2-1) \cdot \{F_N(x)\}^2 \right] \\
&= (x^2-1) \cdot F_N(x)'' + 3x \cdot F_N(x)' + F_N(x) \cdot \left[1 + 2N^2 \frac{\{T_N(x)\}^2 + (1-x^2) \cdot \{U_{N-1}(x)\}^2}{\{T_N(x)\}^2} \right] \\
&= (x^2-1) \cdot F_N(x)'' + 3x \cdot F_N(x)' + F_N(x) \cdot \left[1 + \frac{2N^2}{\{T_N(x)\}^2} \right] \\
&= (x^2-1) \cdot F_N(x)'' + 3x \cdot F_N(x)' + F_N(x) \cdot \left[1 + \frac{4N^2}{1 + T_{2N}(x)} \right] = 0
\end{aligned}
$$

この微分方程式の解は　$F_N(x) = \dfrac{T_N(x)'}{T_N(x)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \left\{ \frac{1}{x - \cos\dfrac{2k-1}{2N}\pi} \right\}$　である。

5．2　第二種のチェビシェフ多項式の応用

偶数次の第二種の Chebyshev 多項式、例えば　$U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1$　から

$U_4^{-1}(X) = X^4 - 12X^2 + 16$　を導入すると、この関数は次式で表される。

$U_{2N}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \left\{ (-1)^k \, {}_{2N-k}C_k \, (2x)^{2(N-k)} \right\}$　から　$U_{2N}^{-1}(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \left\{ (-4)^k \cdot {}_{N+k}C_{N-k} \cdot X^{2(N-k)} \right\}$

この多項式の微分方程式を求める。$U_{2N}(x) = (-1)^N X^{-2N} \cdot U_{2N}^{-1}(X)$　であるが、係数を無視して

$U_{2N}(x) = X^{-2N} \cdot U_{2N}^{-1}(X)$　として計算する。

$$\frac{d}{dx}\left[U_{2N}(x) \right] = X^{-2N+1} \left\{ 2N \cdot U_{2N}^{-1}(X) - X \cdot U_{2N}^{-1}(X)' \right\}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[U_{2N}(X) \right] = X^{-2N+2} \left\{ X^2 \cdot U_{2N}^{-1}(X)'' - 2(2N-1)X \cdot U_{2N}^{-1}(X)' + 2N(2N-1) \cdot U_{2N}^{-1}(X) \right\}$$

これらの式を $(1-x^2)\cdot U_{2N}(x)''-3x\cdot U_{2N}(x)'+4N(N+1)\cdot U_{2N}(x)=0$ に代入して次式を得る。

$$(X^2-1)\cdot U_{2N}^{-1}(X)''-\left\{2(2N-1)X-\frac{4N+1}{X}\right\}\cdot U_{2N}^{-1}(X)'+2N(2N-1)\cdot U_{2N}^{-1}(X)=0$$

さらに奇数次の第二種の Chebyshev 多項式、例えば $U_5(x)=32x^5-32x^3+6x$ の場合は、

$U_5^{-1}(x)=X^4-\frac{16}{3}X^2+\frac{16}{3}$ とする。

$U_{2N+1}(x)=\sum_{k=0}^{N}\left\{(-1)^k\ {}_{2N+1-k}C_k(2x)^{2(N-k)+1}\right\}$ から $U_{2N+1}^{-1}(X)=\frac{1}{N+1}\cdot\sum_{k=0}^{N}\left\{(-4)^k\cdot{}_{N+k+1}C_{N-k}\cdot X^{2(N-k)}\right\}$

この多項式の微分方程式を求める。$U_{2N+1}(X)=(-1)^N\cdot 2(N+1)\cdot X^{-2N-1}\cdot U_{2N+1}^{-1}(X)$ であるが

係数を無視して、$U_{2N+1}(X)=X^{-2N-1}\cdot U_{2N+1}^{-1}(X)$ として計算する。

$$\frac{d}{dx}\left[U_{2N+1}(x)\right]=X^{-2N}\left\{(2N+1)\cdot U_{2N+1}^{-1}(X)-X\cdot U_{2N+1}^{-1}(X)'\right\}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[U_{2N+1}(X)\right]=X^{-2N+1}\left\{X^2\cdot U_{2N+1}^{-1}(X)''-4NX\cdot U_{2N+1}^{-1}(X)'+2N(2N+1)\cdot U_{2N+1}^{-1}(X)\right\}$$

以上の三式を $(1-x^2)\cdot U_{2N+1}(x)''-3x\cdot U_{2N+1}(x)'+(2N+1)(2N+3)\cdot U_{2N+1}(x)=0$ に代入して、

$$(X^2-1)\cdot U_{2N+1}^{-1}(X)''-(4NX-\frac{4N+3}{X})\cdot U_{2N+1}^{-1}(X)'+2N(2N+1)\cdot U_{2N+1}^{-1}(X)=0$$

を得る。この式が $U_{2N+1}^{-1}(X)$ の微分方程式である。

これらの関数が偶数次でも奇数次でも同じ微分方程式となるので、まずこの関数をまとめておく。

$U_2^{-1}(X)=X^2-4$　　　$U_3^{-1}(X)=X^2-2$

$U_4^{-1}(X)=X^4-12X^2+16$　　　$U_5^{-1}(X)=X^4-\dfrac{16}{3}X^2+\dfrac{16}{3}$

$U_6^{-1}(X)=X^6-24X^4+80X^2-64$　　　$U_7^{-1}(X)=X^6-10X^4+24X^2-16$

$$U_8^{-1}(X)=X^8-40X^6+240X^4-448X^2+256$$

$$U_9^{-1}(X)=X^8-16X^6+\frac{336}{5}X^4-\frac{512}{5}X^2+\frac{256}{5}$$

$$U_{10}^{-1}(X)=X^{10}-60X^8+560X^6-1792X^4+2304X^2-1024$$

$$U_{11}^{-1}(X)=X^{10}-\frac{70}{3}X^8+\frac{448}{3}X^6-384X^4+\frac{1280}{3}X^2-\frac{512}{3}$$

$$U_{12}^{-1}(X)=X^{12}-84X^{10}+1120X^8-5376X^6+11520X^4-11264X^2+4096$$

$$U_{13}^{-1}(X)=X^{12}-32X^{10}+288X^8-\frac{7680}{7}X^6+\frac{14080}{7}X^4-\frac{12288}{7}X^2+\frac{4096}{7}$$

微分方程式は次のようになる。

$$(X^2-1)\cdot U_N^{-1}(X)''-\left\{2(N-1)X-\frac{2N+1}{X}\right\}\cdot U_N^{-1}(X)'+N(N-1)\cdot U_N^{-1}(X)=0$$

$U_N^{-1}(X)$ の因数分解は　$U_N^{-1}(X)=\prod_{k=1}^{N}\left(X-\dfrac{1}{\cos\dfrac{k}{N+1}\pi}\right)$　$\left(k\neq\dfrac{N+1}{2}\right)$　である。

さらに　$U_N^{-1}(X)=\prod_{k=1}\left(X^2-\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{k}{N+1}\pi}\right)=\prod_{k=1}\left(X^2-1-\tan^2\dfrac{k}{N+1}\pi\right)$　となるので

$U_N^{-1}(X)$ の X^2 に $X^2 = Y^2 + 1$ を代入し、得られる関数を $W_N^{-1}(Y)$ として下にまとめる。

$$W_2^{-1}(Y) = Y^2 - 3 \qquad W_3^{-1}(Y) = Y^2 - 1$$

$$W_4^{-1}(Y) = Y^4 - 10Y^2 + 5 \qquad W_5^{-1}(Y) = Y^4 - \frac{10}{3}Y^2 + 1$$

$$W_6^{-1}(Y) = Y^6 - 21Y^4 + 35Y^2 - 7 \qquad W_7^{-1}(Y) = Y^6 - 7Y^4 + 7Y^2 - 1$$

$$W_8^{-1}(Y) = Y^8 - 36Y^6 + 126Y^4 - 84Y^2 + 9 \qquad W_9^{-1}(Y) = Y^8 - 12Y^6 + \frac{126}{5}Y^4 - 12Y^2 + 1$$

$$W_{10}^{-1}(Y) = Y^{10} - 55Y^8 + 330Y^6 - 462Y^4 + 165Y^2 - 11$$

$$W_{11}^{-1}(Y) = Y^{10} - \frac{55}{3}Y^8 + 66Y^6 - 66Y^4 + \frac{55}{3}Y^2 - 1$$

$$W_{12}^{-1}(Y) = Y^{12} - 78Y^{10} + 715Y^8 - 1716Y^6 + 1287Y^4 - 286Y^2 + 13$$

$$W_{13}^{-1}(Y) = Y^{12} - 26Y^{10} + 143Y^8 - \frac{1716}{7}Y^6 + 143Y^4 - 26Y^2 + 1$$

この関数を一般的に表すと、

$$\begin{cases} W_{2N}^{-1}(Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N}\left\{ (-1)^k \, {}_{2N+1}C_{2k} \cdot Y^{2(N-k)} \right\} = \prod_{k=1}^{N}\left(Y^2 - \tan^2 \frac{k}{2N+1}\pi \right) = \prod_{i=1}^{2N}\left(Y - \tan\frac{i}{2N+1}\pi \right) \\ W_{2N+1}^{-1}(Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N}\left\{ (-1)^k \frac{{}_{2N+1}C_{2k}}{2k+1} \cdot Y^{2(N-k)} \right\} = \prod_{k=1}^{N}\left(Y^2 - \tan^2 \frac{k}{2N+2}\pi \right) = \prod_{i=1}^{2N+1}\left(Y - \tan\frac{i}{2N+2}\pi \right) \end{cases}$$

ただし $W_{2N+1}^{-1}(Y)$ の場合は $i = N+1$ を除く。

この関数の微分方程式を求める。 $X^2 = Y^2 + 1$ から $\dfrac{dY}{dX} = \dfrac{\sqrt{Y^2+1}}{Y}$

$$\frac{d}{dX}\left[U_N^{-1}(X)\right] = \frac{d}{dY}\left[W_N^{-1}(Y)\right] \cdot \left(\frac{dY}{dX}\right) = \frac{\sqrt{Y^2+1}}{Y} \cdot W_N^{-1}(Y)' \quad \text{および、}$$

さらに微分して、 $$\frac{d^2}{dX^2}\left[U_N^{-1}(X)\right] = \frac{Y^2+1}{Y^2} \cdot W_N^{-1}(Y)'' - \frac{1}{Y^3} \cdot W_N^{-1}(Y)'$$

これらの式を $U_N^{-1}(X)$ の微分方程式に代入して、

$$(Y^2+1) \cdot W_N^{-1}(Y)'' - 2\left\{ (N-1)Y - \frac{1}{Y} \right\} \cdot W_N^{-1}(Y)' + N(N-1) \cdot W_N^{-1}(Y) = 0$$ を得る。

さらに $U_N(x)$ の対数を取って微分して得られる関数の微分方程式を求める。

$U_N(x)=2^N\prod_{k=1}^{N}\left(x-\cos\frac{k}{N+1}\pi\right)$ の対数 $\ln\{U_N(x)\}=\ln(2^N)+\sum_{k=1}^{N}\left\{\ln(x-\cos\frac{k}{N+1}\pi)\right\}$ を

微分すると $G_N(x)$ が得られる。 $G_N(x)=\frac{U_N(x)'}{U_N(x)}=\sum_{k=1}^{N}\{\frac{1}{x-\cos\frac{k}{N+1}\pi}\}$

この $G_N(x)$ をもう一度微分して $G_N(x)'$ が得られる。 $G_N(x)'=\frac{U_N(x)''}{U_N(x)}-\left\{\frac{U_N(x)'}{U_N(x)}\right\}^2$

ここから
$$\frac{U_N(x)''}{U_N(x)}=\sum_{i,j}\left\{\frac{2}{\left(x-\cos\frac{i}{N+1}\pi\right)\left(x-\cos\frac{j}{N+1}\pi\right)}\right\}\ (1\le i<j\le N)$$

これらの式を第二種の Chebyshev 多項式の微分方程式、

$(1-x^2)\cdot U_N(x)''-3x\cdot U_N(x)'+N(N+2)\cdot U_N(x)=0$ に代入し次式を得る。

$$\sum_{k=1}^{N}\{\frac{3x}{x-\cos\frac{k}{N+1}\pi}\}+\sum_{i,j}\{\frac{2(x^2-1)}{\left(x-\cos\frac{i}{N+1}\pi\right)\left(x-\cos\frac{j}{N+1}\pi\right)}\}=N(N+2)$$

さらに
$$\frac{d}{dx}\left[\ln\{U_N(x)'\}\right]=\frac{U_N(x)''}{U_N(x)'}=2\cdot\frac{\sum_{i,j}\{\frac{1}{\left(x-\cos\frac{i}{N+1}\pi\right)\left(x-\cos\frac{j}{N+1}\pi\right)}\}}{\sum_{k=1}^{N}\{\frac{1}{x-\cos\frac{k}{N+1}\pi}\}}$$

$G_N(x)$ 微分方程式を求めるためにまず $\{T_{N+1}(x)\}^2+(1-x^2)\{U_N(x)\}^2=1$ を微分して

$(N+1)\cdot T_{N+1}(x)-x\cdot U_N(x)+(1-x^2)\cdot U_N(x)'=0$ が得られ、 整理すると、

$$(x^2-1)\cdot\frac{U_N(x)'}{U_N(x)}+x=(x^2-1)\cdot G_N(x)+x=(N+1)\cdot\frac{T_{N+1}(x)}{U_N(x)}=(N+1)\cdot H_N(x)$$

ただし $H_N(x)=\frac{T_{N+1}(x)}{U_N(x)}$ とおいた。この式を微分し、さらにもう一度微分して次の二式が得られる。

$$(x^2-1)\cdot G_N(x)'+2x\cdot G_N(x)+1=(N+1)\{N+1-H_N(x)\cdot G_N(x)\}$$ および、

$$(x^2-1)\cdot G_N(x)''+\{(N+1)\cdot H_N(x)+4x\}\cdot G_N(x)'+\{(N+1)\cdot H_N(x)'+2\}\cdot G_N(x)=0$$

この式整理して、$(x^2-1)\cdot G_N(x)''+\{(N+1)\cdot H_N(x)+4x\}\cdot G_N(x)'$

$$+\{N^2+2N+3-(N+1)\cdot H_N(x)\cdot G_N(x)\}\cdot G_N(x)=0$$

$H_N(x)$ を除くと、$(x^2-1)\cdot G_N(x)''+\{(x^2-1)\cdot G_N(x)+5x\}\cdot G_N(x)'$

$$+\left[N^2+2N+3-\{(x^2-1)\cdot G_N(x)+x\}\cdot G_N(x)\right]\cdot G_N(x)=0$$

この式が $G_N(x)=\dfrac{U_N(x)'}{U_N(x)}=\sum_{k=1}^{N}\{\dfrac{1}{x-\cos\frac{k}{N+1}\pi}\}$ の微分方程式である。

$H_N(x)$ の微分方程式は $H_N(x)=\dfrac{T_{N+1}(x)}{U_N(x)}$ を微分し $H_N(x)'+G_N(x)\cdot H_N(x)=N+1$ を得、

もう一度微分して、得られる式に (x^2-1) をかけて整理し、

$$(x^2-1)\cdot H_N(x)''+\{2(N+1)\cdot H_N(x)+x\}\cdot H_N(x)'-\left[H_N(x)+2\cdot(N+1)\cdot x\right]=0$$ を得る。

この式が $H_N(x)=\dfrac{T_{N+1}(x)}{U_N(x)}=\dfrac{\prod_{k=1}^{N+1}\left(x-\cos\frac{2k-1}{2N+2}\pi\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(x-\cos\frac{k}{N+1}\pi\right)}\quad(N\geq 2)$ の微分方程式である。

6. チェビシェフ多項式の数値計算

6. 1 第一種の行列式から得られる行列の固有ベクトルの利用

偶数次の行列 $[\mathbf{X}_4(x)]=\begin{bmatrix} x & b & 0 & 0 \\ a & x & b & 0 \\ 0 & a & x & b \\ 0 & 0 & a & x \end{bmatrix}$ の固有値 $\lambda_4(k)$ と固有ベクトル $\nu_j(k)$ は $|\mathbf{X}_4(x)|=0$

の解が $x=2\sqrt{ab}\cdot\cos\frac{k}{5}\pi\quad(k=1\sim 4)$ なので $\lambda_4(k)=x-2\sqrt{ab}\cdot\cos\frac{k}{5}\pi\quad(k=1\sim 4)$。

固有ベクトルは $c_4(k)=2\sqrt{ab}\cdot\cos\frac{k}{5}\pi\quad(k=1\sim 4)$ で、$\begin{bmatrix} c_4(k) & b & 0 & 0 \\ a & c_4(k) & b & 0 \\ 0 & a & c_4(k) & b \\ 0 & 0 & a & c_4(k) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1(k) \\ v_2(k) \\ v_3(k) \\ v_4(k) \end{bmatrix}=0$

$v_1(k)$ を基準として

$$\begin{cases} v_1(k) \\ v_2(k) = -\dfrac{c_4(k)}{b} v_1(k) \\ v_3(k) = \dfrac{\{c_4(k)\}^2 - ab}{b^2} v_1(k) \\ v_4(k) = -\dfrac{\{c_4(k)\}^3 - 2ab\{c_4(k)\}}{b^3} v_1(k) \end{cases}$$

$v_4(k)$ を基準として

$$\begin{cases} v_1(k) = -\dfrac{\{c_4(k)\}^3 - 2ab\{c_4(k)\}}{a^3} v_4(k) \\ v_2(k) = \dfrac{\{c_4(k)\}^2 - ab}{a^2} v_4(k) \\ v_3(k) = -\dfrac{c_4(k)}{a} v_4(k) \\ v_4(k) \end{cases}$$

$c_4(k) = \left| \mathbf{X}_1\{c_4(k)\} \right|$, $\{c_4(k)\}^2 - ab = \left| \mathbf{X}_2\{c_4(k)\} \right|$, $\{c_4(k)\}^3 - 2ab\{c_4(k)\} = \left| \mathbf{X}_3\{c_4(k)\} \right|$ と

$v_1(k)$ と $v_4(k)$ の関係から $\left| \mathbf{X}_3\{c_4(k)\} \right| = \pm\sqrt{a^3b^3}$ で $U_3(\cos\dfrac{k}{5}\pi) = \pm 1$

$U_3(\cos\dfrac{k}{5}\pi) = 1$ のとき $(k = 1, 3)$　　　$U_3(\cos\dfrac{k}{5}\pi) = -1$ のとき $(k = 2, 4)$

$$\begin{cases} v_1(k) \\ v_2(k) = -\dfrac{\left| \mathbf{X}_1\{c_4(k)\} \right|}{b} v_1(k) \\ v_3(k) = \dfrac{\sqrt{a}\left| \mathbf{X}_1\{c_4(k)\} \right|}{\sqrt{b^3}} v_1(k) \\ v_4(k) = -\dfrac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{b^3}} v_1(k) \end{cases}
\qquad
\begin{cases} v_1(k) \\ v_2(k) = -\dfrac{\left| \mathbf{X}_1\{c_4(k)\} \right|}{b} v_1(k) \\ v_3(k) = -\dfrac{\sqrt{a}\left| \mathbf{X}_1\{c_4(k)\} \right|}{\sqrt{b^3}} v_1(k) \\ v_4(k) = \dfrac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{b^3}} v_1(k) \end{cases}$$

$$\left| \mathbf{X}_2\{c_4(k)\} \right| = \sqrt{ab}\left| \mathbf{X}_1\{c_4(k)\} \right| \qquad \left| \mathbf{X}_2\{c_4(k)\} \right| = -\sqrt{ab}\left| \mathbf{X}_1\{c_4(k)\} \right|$$

$$U_2(\cos\frac{k}{5}\pi) = U_1(\cos\frac{k}{5}\pi)\ (k = 1, 3) \qquad U_2(\cos\frac{k}{5}\pi) = -U_1(\cos\frac{k}{5}\pi)\ (k = 2, 4)$$

$[\mathbf{X}_6(x)]$ を利用する場合も全く同様に、$U_5(\cos\dfrac{k}{7}\pi) = \pm 1$ から

$U_5(\cos\dfrac{k}{7}\pi) = 1$ のとき $(k = 1, 3, 5)$　　　$U_5(\cos\dfrac{k}{7}\pi) = -1$ のとき $(k = 2, 4, 6)$

$$U_4(\cos\frac{k}{7}\pi) = U_1(\cos\frac{k}{7}\pi)\ (k = 1, 3, 5) \qquad U_4(\cos\frac{k}{7}\pi) = -U_1(\cos\frac{k}{7}\pi)\ (k = 2, 4, 6)$$

$$U_3(\cos\frac{k}{7}\pi) = U_2(\cos\frac{k}{7}\pi)\ (k = 1, 3, 5) \qquad U_3(\cos\frac{k}{7}\pi) = -U_2(\cos\frac{k}{7}\pi)\ (k = 2, 4, 6)$$

奇数次の行列の場合も例えば $\left[\,\mathbf{X}_5(x)\,\right]$ を利用すると $U_4(\cos\frac{k}{6}\pi)=\pm 1$ となり、

$U_4(\cos\frac{k}{6}\pi)=1$ のとき $(k=1,3,5)$ 　　 $U_4(\cos\frac{k}{6}\pi)=-1$ のとき $(k=2,4)$

$$\begin{cases} v_1(k) \\ v_2(k)=-\dfrac{\left|\,\mathbf{X}_1\{c_5(k)\}\right|}{b}\,v_1(k) \\ v_3(k)=\dfrac{\left|\,\mathbf{X}_2\{c_5(k)\}\right|}{b^2}\,v_1(k) \\ v_4(k)=-\dfrac{a\left|\,\mathbf{X}_1\{c_5(k)\}\right|}{b^2}\,v_1(k) \\ v_5(k)=\dfrac{a^2}{b^2}\,v_1(k) \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1(k) \\ v_2(k)=-\dfrac{\left|\,\mathbf{X}_1\{c_5(k)\}\right|}{b}\,v_1(k) \\ v_3(k)=0 \\ v_4(k)=\dfrac{a\left|\,\mathbf{X}_1\{c_5(k)\}\right|}{b^2}\,v_1(k) \\ v_5(k)=-\dfrac{a^2}{b^2}\,v_1(k) \end{cases}$$

$U_3(\cos\frac{k}{6}\pi)=U_1(\cos\frac{k}{6}\pi)\ (k=1,3,5)$ 　　 $U_3(\cos\frac{k}{6}\pi)=-U_1(\cos\frac{k}{6}\pi)\ \ (k=2,4)$

$\left[\,\mathbf{X}_7(x)\,\right]$を利用する場合も全く同様に $U_6(\cos\frac{k}{8}\pi)=\pm 1$ となり、

$U_6(\cos\frac{k}{8}\pi)=1$ のとき $(k=1,3,5,7)$ 　　 $U_6(\cos\frac{k}{8}\pi)=-1$ のとき $(k=2,4,6)$

$U_5(\cos\frac{k}{8}\pi)=U_1(\cos\frac{k}{8}\pi)\ (k=1,3,5,7)$ 　　 $U_5(\cos\frac{k}{8}\pi)=-U_1(\cos\frac{k}{8}\pi)\ (k=2,4,6)$

$U_4(\cos\frac{k}{8}\pi)=U_2(\cos\frac{k}{8}\pi)\ (k=1,3,5,7)$ 　　 $U_4(\cos\frac{k}{8}\pi)=-U_2(\cos\frac{k}{8}\pi)\ (k=2,4,6)$

以上の偶数次および奇数次の行列式の結果をまとめると $j,k=1,2,3,\cdots$、$(N>2j)$ として、

$$\begin{cases} U_N(\cos\dfrac{2k-1}{N+2}\pi)=1 \\ U_{N-j}(\cos\dfrac{2k-1}{N+2}\pi)=U_j(\cos\dfrac{2k-1}{N+2}\pi) \end{cases} \qquad \begin{cases} U_N(\cos\dfrac{2k}{N+2}\pi)=-1 \\ U_{N-j}(\cos\dfrac{2k}{N+2}\pi)=-U_j(\cos\dfrac{2k}{N+2}\pi) \end{cases}$$

この結果を利用して次式を得る。

$U_{N-1}(\cos\frac{2k-1}{N+2}\pi)=U_1(\cos\frac{2k-1}{N+2}\pi)$ から $U_N(\cos\frac{2k-1}{N+3}\pi)=2\cdot\cos\frac{2k-1}{N+3}\pi$

$U_{N-1}(\cos\frac{2k}{N+2}\pi)=-U_1(\cos\frac{2k}{N+2}\pi)$ から $U_N(\cos\frac{2k}{N+3}\pi)=-2\cdot\cos\frac{2k}{N+3}\pi$

6. 2　チェビシェフ多項式からの直接計算

すでに述べたように $\begin{cases} T_N(x) = 2^{N-1}\prod_{k=1}^{N}\left(x-\cos\frac{2k-1}{2N}\pi\right) \\ U_N(x) = 2^N\prod_{k=1}^{N}\left(x-\cos\frac{k}{N+1}\pi\right) \end{cases}$ なので $\begin{cases} T_N(\cos\frac{2k-1}{2N}\pi)=0 \\ U_N(\cos\frac{k}{N+1}\pi)=0 \end{cases}$

以上の結果と $T_N(x) = \dfrac{U_N(x)-U_{N-2}(x)}{2}$ から $U_N(\cos\frac{2k-1}{2N}\pi) = U_{N-2}(\cos\frac{2k-1}{2N}\pi)$

第一報に述べたように第二種の偶数次の行列式は $\left|{}_+\mathbf{T_{2N}}\right| = (x^2-1)\prod_{k=1}^{N-1}\left(x-\cos\frac{2k}{2N}\pi\right)^2$ で、

$T_{2N}(x)-1 = 2^{2N-1}\cdot\left|{}_+\mathbf{T_{2N}}\right|$ $(N\geq 2)$ なので $T_{2N}(\cos\frac{2k}{2N}\pi)=1$ および $T_{2N}(\pm 1)=1$

さらに $1+T_{2N}(x) = 2\{T_N(x)\}^2$ と $T_{2N}(\cos\frac{2k}{2N}\pi)=1$ から $T_N(\cos\frac{k}{N}\pi)=\pm 1$ となり

$$T_N(\cos\frac{2k-1}{N}\pi) = -1 \qquad T_N(\cos\frac{2k}{N}\pi) = 1$$

第二種の奇数次の行列式では $\left|{}_+\mathbf{T_{2N+1}}\right| = (x+1)\prod_{k=1}^{N}\left(x-\cos\frac{2k-1}{2N+1}\pi\right)^2$ なので $T_{2N+1}(-1)=-1$

さらに $T_{2N+1}(x) = -T_{2N+1}(-x)$ なので $T_{2N+1}(1)=1$ 。

また $U_{N-j}(\cos\frac{2k}{N+2}\pi) = -U_j(\cos\frac{2k}{N+2}\pi)$ $(k=1,2,3,\cdots)$ の $N+2$ に $2N$ 、

j に $j=N-2$ を代入し、第一種および第二種 Chebyshev 多項式間の関係を利用し、

$$T_N(\cos\frac{2k}{2N}\pi) = U_N(\cos\frac{2k}{2N}\pi) = -U_{N-2}(\cos\frac{2k}{2N}\pi) \quad (k=1,2,3,\cdots),$$

あるいは $T_N(\cos\frac{k}{N}\pi) = U_N(\cos\frac{k}{N}\pi) = -U_{N-2}(\cos\frac{k}{N}\pi)$

すでに得られた結果から、 $\begin{cases} T_N(\cos\frac{2k-1}{N}\pi) = U_N(\cos\frac{2k-1}{N}\pi) = -U_{N-2}(\cos\frac{2k-1}{N}\pi) = -1 \\ T_N(\cos\frac{2k}{N}\pi) = U_N(\cos\frac{2k}{N}\pi) = -U_{N-2}(\cos\frac{2k}{N}\pi) = 1 \end{cases}$

また次式も得られる。

$$T_N(\cos\frac{2k-1}{N+2}\pi) = \frac{1-U_2(\cos\frac{2k-1}{N+2}\pi)}{2} = -\cos\frac{4k-2}{N+2}\pi$$

$$T_N(\cos\frac{2k}{N+2}\pi) = \frac{-1+U_2(\cos\frac{2k}{N+2}\pi)}{2} = \cos\frac{4k}{N+2}\pi$$

以上をまとめて、

$$\begin{cases} T_N(\cos\frac{2k-1}{N}\pi) = -1 \\ T_N(\cos\frac{2k-1}{N+2}\pi) = -\cos\frac{4k-2}{N+2}\pi \\ U_N(\cos\frac{2k-1}{N}\pi) = -1 \\ U_N(\cos\frac{2k-1}{N+1}\pi) = 0 \\ U_N(\cos\frac{2k-1}{N+2}\pi) = 1 \\ U_{N-j}(\cos\frac{2k-1}{N+2}\pi) = U_j(\cos\frac{2k-1}{N+2}\pi) \\ U_N(\cos\frac{2k-1}{N+3}\pi) = \ 2\cdot\cos\frac{2k-1}{N+3}\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_N(\cos\frac{2k}{N}\pi) = 1 \\ T_N(\cos\frac{2k}{N+2}\pi) = \cos\frac{4k}{N+2}\pi \\ U_N(\cos\frac{2k}{N}\pi) = 1 \\ U_N(\cos\frac{2k}{N+1}\pi) = 0 \\ U_N(\cos\frac{2k}{N+2}\pi) = -1 \\ U_{N-j}(\cos\frac{2k}{N+2}\pi) = -U_j(\cos\frac{2k}{N+2}\pi) \\ U_N(\cos\frac{2k}{N+3}\pi) = -2\cdot\cos\frac{2k}{N+3}\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_{2N+1}(1) = 1 \\ T_{2N+1}(-1) = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_{2N}(1) = 1 \\ T_{2N}(-1) = 1 \end{cases}$$

7. バネの振動への応用

第一種の行列式のバネ運動への応用は前報ですでに二例掲げた。今回は長さ L の固定された空間にバネ定数、k の等しい4本のバネと、質量、m の等しい3個のおもりを　バネ～おもり～バネ～おもり～バネ～おもり～バネの順に並べた系のそれぞれのおもりの振動を計算する。左から順に各おもりの平衡の位置からの微小の変位、その変位の時間に関する一次微分、さらにその変位の二次微分をそれぞれ次のように置くと、おもりの運動のエネルギーとバネのポテンシャルエネルギーは次のようになる。

$$\begin{cases} q_1,\ q_2,\ q_3 \\ \dot{q}_1,\ \dot{q}_2,\ \dot{q}_3, \\ \ddot{q}_1,\ \ddot{q}_2,\ \ddot{q}_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} T = \dfrac{m}{2}\left(\dot{q}_1{}^2 + \dot{q}_2{}^2 + \dot{q}_3{}^2\right) \\ U = \dfrac{k}{2}\left\{q_1{}^2 + (q_1 - q_2)^2 + (q_2 - q_3)^2 + q_3{}^2\right\} \end{cases}$$

Lagrange 関数と Lagrange 方程式は次式なので、この問題に応用すると次式が得られる。

$$\begin{cases} L = T - U \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} m\ddot{q}_1 + 2kq_1 - kq_2 = 0 \\ m\ddot{q}_2 + 2kq_2 - kq_1 - kq_3 = 0 \\ m\ddot{q}_3 + 2kq_3 - kq_2 = 0 \end{cases}$$

$q_j = A_j \cos(\omega t + \delta)$　とおいて Lagrange 方程式を書きなおすと

$$\begin{cases} (2k - m\omega^2)A_1 - kA_2 = 0 \\ -kA_1 + (2k - m\omega^2)A_2 - kA_3 = 0 \\ -kA_2 + (2k - m\omega^2)A_3 = 0 \end{cases}$$

$\lambda = \dfrac{m}{2k}\omega^2$　とおいて整理し、Cramer の式を使って得られる行列式を $|\mathbf{G_3}|$ とすると、

$$|\mathbf{G_3}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1-\lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{から}$$

この $|\mathbf{G_3}|$ は $|\mathbf{X_3}|$ に $a=b=-\dfrac{1}{2}$, $x=1-\lambda$ を代入した行列式と同じものであり、

$$|\mathbf{G_3}|=\prod_{j=1}^{3}\left\{(1-\lambda)-\cos\frac{j}{4}\pi\right\}=0$$ となり、$\lambda=\dfrac{m}{2k}\omega^2$ を利用して

$$\omega=\sqrt{2\left(1-\cos\frac{j}{4}\pi\right)\cdot\frac{k}{m}}=2\sqrt{\frac{k}{m}}\ \sin\frac{j}{8}\pi \quad (j=1,2,3)$$ と容易に求めることができる。

なおこの問題は、窪田高弘[2006] p.117 の問題を借用した。

同様に長さ L の固定された空間にバネ定数、k の等しい $n+1$ 本のバネと、質量、m の等しい n 個のおもりをバネ～おもり～バネ～おもり～バネ～・・・・～おもり～バネの順に並べた系のそれぞれのおもりの振動を求めるためには次の行列式を計算すればよい。

$$\begin{vmatrix}
1-\lambda & -\frac{1}{2} & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{2} & 1-\lambda & -\frac{1}{2} & \cdot & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{1}{2} & 1-\lambda & \cdot & 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \cdot & 1-\lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdot & -\frac{1}{2} & 1-\lambda & -\frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & -\frac{1}{2} & 1-\lambda
\end{vmatrix}=|\mathbf{H_N}|$$

この $|\mathbf{H_N}|$ は $|\mathbf{X_N}|$ に $a=b=-\dfrac{1}{2}$, $x=1-\lambda$ を代入した行列式と同じものであり、

その解はすでに得られている。

$$|\mathbf{H_N}|=\prod_{j=1}^{n}\left\{(1-\lambda)-\cos\frac{j}{n+1}\pi\right\}=0$$ となり、$\lambda=\dfrac{m}{2k}\omega^2$ を利用して

$$\omega=\sqrt{2\left(1-\cos\frac{j}{n+1}\pi\right)\cdot\frac{k}{m}}=2\sqrt{\frac{k}{m}}\ \sin\frac{j}{2n+2}\pi \quad (j=1\sim n)$$

参考文献

窪田高弘　著：力学入門、培風館、2006

手代木　琢磨：特殊な行列式の漸化式、産業能率大学紀要、 31(2), 2011, pp. 37-54

手代木　琢磨、勝間　豊：特殊な行列式と三角関数（第二報)、産業能率大学紀要、36(1), 2015, pp. 19-46