ISSN　1881－2171

産業能率大学紀要

第37巻　第1号
2016年　9月

研究ノート

産業能率大学

「産業能率大学紀要」執筆要項

産業能率大学紀要審査委員会

1．投稿資格

次の条件を満たすものとする。

⑴　産業能率大学情報マネジメント学部・経営学部および自由が丘産能短期大学の専任教員を原則とする。

⑵　共著の場合には、少なくとも一名は、上記⑴の資格を有するものであること。

⑶　本務校を持たない産業能率大学情報マネジメント学部・経営学部および自由が丘産能短期大学の兼任教員。

⑷　上記⑴、⑵、⑶以外で、紀要審査委員会が適当と認めた者。

2．原稿の種類

原稿は、邦文もしくは欧文の、他の刊行物に未発表のもので、論文、研究ノート、事例研究、資料、その他（書評、紹介、報告）のいずれかに該当するものに限る。

3．原稿構成

原稿には、次のものを含むこと。

⑴　邦文および欧文の表題。

⑵　邦文および欧文で書かれた執筆者名と所属。

⑶　論文と研究ノートの場合は150語程度の欧文抄録。

4．原稿の量および投稿方法

⑴　14,000字前後とする。

⑵　欧文原稿の場合は、Ａ４判の用紙を用い、ダブルスペースで30枚以内を原則とする。

⑶　完成原稿をメール添付にて事務局宛に送付する。手書きは不可。なお、セキュリティ上、パスワードを設定し、送信履歴を残す。

5．表記

⑴　原則として、常用漢字、現代かなづかいを用いる。

⑵　表題の脚注

(a) 学会等に発表している場合には、「本論文は、学会名、講演会名、発表日、場所、において発表した。」というように注記する。

(b) 原稿受理日は、事務的に入れる。

⑶　章、節などの記号

章の記号は、１．２.……、節の記号は、１．１、１．２……、２．１、２．２……のように付ける。

⑷　脚注

⑴、⑵のように、注記の一連番号を参照箇所の右肩に書き、注記そのものは、本文の最後に一連番号を付けてまとめる。

（例）

……価格理論の一部として、取り扱われていることになり⑴……（本文）

⑴　価格理論では、このことを特に「機能的分配の理論」と呼んでいる。（注記）

⑸　文献の引用

文章の一部に引用文献の著者名を含む場合は、著者名、続いて文献の発行年度を〔　〕で囲む（例1）

文章の外で文献を引用する場合は、著者名、発行年度を〔　〕で囲む（例2）同一著者、同一年度の文献を複教個引用する場合は、発行年度の次に ａ,ｂ,……と一連の記号を付ける。

（例1）文章中の引用

Minsky と Papert〔1969〕のパーセプトロンでは……岩尾〔1979a〕は、すでに述べた…

（例2）文章の外の引用

関係完備制が証明された〔Codd 1971a〕

Example〔von Neumann and Morgenstern 1944〕

⑹　参考文献

本文中で引用した文献は、参考文献として著者名のアルファベット順にまとめる。書誌記述は、単行図書の場合は『著者名：書名、出版社、出版年、（その単行図書の一部を引用する場合には）ページ』の順に記述する。

（例1）和書の場合

テイラー，Ｆ．Ｗ．著 上野陽一訳編：科学的管理法、産業能率短期大学出版部、1969

（例2）洋書の場合

Ablial.J.R.：Data Semantics, Proc.IFIP Working Conference on Data Base Management, North-Holland, 1974, pp.1-60

雑誌の場合は『執筆者名：表題、雑誌名、巻（号）、出版年、ページ』の順とする。

（例1）和雑誌の場合

小田稔：マイクロ波の朝永理論、科学、49（12）, 1979, pp.795-798

（例2）洋雑誌の場合

Kipp, E.M.：Twelve Guides to Effecive Human Relations in R. & D., Research Management, 7(6), 1964, pp.419-428

⑺　図・表

図・表は、一枚の用紙に一つだけ書き、図・表のそれぞれに、図1－1（Figure 1-1）、表1－1（Table 1-1）のように一連番号を付け、タイトルを記入する。

6．投稿期日

９月刊行の号は４月上旬、２月刊行の号は９月中旬を締め切りとする。ただし、投稿は随時受け付ける。

7．投稿原稿の審査

原稿の採否は紀要審査委員会において決定する。採用された原稿について、加筆、修正が必要な場合は、一部の書き直しを要求する場合がある。また、表記などの統一のため、紀要審査委員会で一部改める場合もある。なお、原稿のテーマによっては紀要審査委員以外のものに原稿の査読を依頼することがある。

8．執筆者校正

校正は執筆者の責任において行うこととする。（校正段階における加筆は、印刷の進行に支障を来すので、完全原稿を提出すること。）

9．著作物の電子化と公開許諾

本誌に掲載された著作物の著作権は執筆者に帰属するが、次の件は了承される。

⑴　執筆者は、掲載著作物の本文、抄録、キーワードに関して紀要審査委員会に「電子化公開許諾書」を提出し、著作物の電子化及び公開を許諾するものとする。共著の場合は、すべての執筆者の提出が必要である。

⑵　上記により難い場合は、紀要審査委員会に相談する。

10．掲載論文の別刷

掲載された論文１編につき、本誌１部、別刷100部を無償で執筆者に贈呈する。別刷100部以上は有料とする。

（1991.6.5）

（1994.7.6改正）

（2003.1.7改正）

（2003.9.17改正）

（2013.4.29改正）

（2015.4.24改正）

［研究ノート］

Sanno University Bulletin Vol. 37 No. 1 September 2016

特殊な行列式とチェビシェフ多項式

The Third Report on Special Determinants and Chebyshev Polynomials

手代木　琢磨
Takuma Teshirogi
勝間　豊
Yutaka Katsuma

Abstract
In our previous papers, the secular equation of quantum chemistry was extended to the special determinants. In this paper the determinants are related to the first and the second Chebyshev polynomials and the relationship between the two polynomials are discussed.

1. 序　論

前二報（手代木2011、手代木＆勝間（2015）において、量子化学の単純ヒュッケル法で使われる永年方程式から誘導される二種類の行列式の性質を議論した。現報ではこの二種類の行列式が Chebyshev の第一種および第二種の多項式と深く関係し、しかもこの関係を利用して、Chebyshev 多項式間の新しい関係式も誘導されることが解ったので報告する。

2. チェビシェフ多項式

$\cos N\theta = f(\cos\theta)$ の $\cos\theta$ を x として表した式 $T_N(x)$ が第一種の Chebyshev 多項式、

$\sin(N+1)\theta = \sin\theta \cdot g(\cos\theta)$ の $\cos\theta$ を x として表した式 $U_N(x)$ が第二種の Chebyshev 多項式である。 例えば

2016年2月22日　受理

$\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$ から $T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$

$\cos 6\theta = 32\cos^6\theta - 48\cos^4\theta + 18\cos^2\theta - 1$ から $T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$

$\sin 6\theta = \sin\theta\,(32\cos^5\theta - 32\cos^3\theta + 6\cos\theta)$ から $U_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x$

$\sin 7\theta = \sin\theta\,(64\cos^6\theta - 80\cos^4\theta + 24\cos^4\theta - 1)$ から $U_6(x) = 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1$

$T_N(x)$ と $U_N(x)$ の関係を示す。

$$(\cos N\theta)^2 + \left(\sin\theta\cdot\frac{\sin N\theta}{\sin\theta}\right)^2 = (\cos N\theta)^2 + (1-\cos^2\theta)\left(\frac{\sin N\theta}{\sin\theta}\right)^2$$

$$= \{T_N(x)\}^2 + (1-x^2)\{U_{N-1}(x)\}^2 = 1$$

$T_N(x)$ および $U_N(x)$ を下にまとめる。

$T_0(x) = 1$	$U_0(x) = 1$
$T_1(x) = x$	$U_1(x) = 2x$
$T_2(x) = 2x^2 - 1$	$U_2(x) = 4x^2 - 1$
$T_3(x) = 4x^3 - 3x$	$U_3(x) = 8x^3 - 4x$
$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$	$U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1$
$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$	$U_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x$
$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$	$U_6(x) = 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1$
$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$	$U_7(x) = 128x^7 - 192x^5 + 80x^3 - 8x$
$T_8(x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$	$U_8(x) = 256x^8 - 448x^6 + 240x^4 - 40x^2 + 1$
$T_9(x) = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x$	$U_9(x) = 512x^9 - 1024x^7 + 672x^5 - 160x^3 + 10x$

$T_N(x)$ と $U_N(x)$ を別々に揚げると

$T_{10}(x) = 512x^{10} - 1280x^8 + 1120x^6 - 400x^4 + 50x^2 - 1$

$T_{11}(x) = 1024x^{11} - 2816x^9 + 2816x^7 - 1232x^5 + 220x^3 - 11x$

$T_{12}(x) = 2048x^{12} - 6144x^{10} + 6912x^8 - 3584x^6 + 840x^4 - 72x^2 + 1$

$T_{13}(x) = 4096x^{13} - 13312x^{11} + 16640x^9 - 9984x^7 + 2912x^5 - 364x^3 + 13x$

$T_{14}(x) = 8192x^{14} - 28672x^{12} + 39424x^{10} - 26880x^8 + 9408x^6 - 1568x^4 + 98x^2 - 1$

$T_{15}(x) = 16384x^{15} - 61440x^{13} + 92160x^{11} - 70400x^9 + 28800x^7 - 6048x^5 + 560x^3 - 15x$

$$U_{10}(x)=1024x^{10}-2304x^{8}+1792x^{6}-560x^{4}+60x^{2}-1$$
$$U_{11}(x)=2048x^{11}-5120x^{9}+4608x^{7}-1792x^{5}+280x^{3}-12x$$
$$U_{12}(x)=4096x^{12}-11264x^{10}+11520x^{8}-5376x^{6}+1120x^{4}-84x^{2}+1$$
$$U_{13}(x)=8192x^{13}-24576x^{11}+28160x^{9}-15360x^{7}+4032x^{5}-448x^{3}+14x$$
$$U_{14}(x)=16384x^{14}-53248x^{12}+67584x^{10}-42240x^{8}+13440x^{6}-2016x^{4}+112x^{2}-1$$
$$U_{15}(x)=32768x^{15}-114688x^{13}+159744x^{11}-112640x^{9}+42240x^{7}-8064x^{5}+672x^{3}-16x$$

さらに $\begin{cases}\sin(N+1)\theta=\sin N\theta\cdot\cos\theta+\cos N\theta\cdot\sin\theta\\ \sin(N-1)\theta=\sin N\theta\cdot\cos\theta-\cos N\theta\cdot\sin\theta\end{cases}$ から、

$$T_N(x)=\cos N\theta=\frac{\sin(N+1)\theta-\sin(N-1)\theta}{2\sin\theta}$$
$$=\frac{\sin\theta\cdot U_N(x)-\sin\theta\cdot U_{N-2}(x)}{2\sin\theta}=\frac{U_N(x)-U_{N-2}(x)}{2}$$

また $\begin{cases}\cos(N+1)\theta=\cos N\theta\cdot\cos\theta-\sin N\theta\cdot\sin\theta\\ \cos(N-1)\theta=\cos N\theta\cdot\cos\theta+\sin N\theta\cdot\sin\theta\end{cases}$ から、

$$T_N(x)=\cos N\theta=\frac{\cos(N+1)\theta+\cos(N-1)\theta}{2\cos\theta}=\frac{T_{N+1}(x)+T_{N-1}(x)}{2x}$$ となり、

第一種の Chebyshev 多項式の漸化式　$T_{N+1}(x)+T_{N-1}(x)=2x\cdot T_N(x)$　を得る。

さらに $\begin{cases}\sin(N+2)\theta=\sin(N+1)\theta\cdot\cos\theta+\cos(N+1)\theta\cdot\sin\theta\\ \sin N\theta=\sin(N+1)\theta\cdot\cos\theta-\cos(N+1)\theta\cdot\sin\theta\end{cases}$ から、

$$\sin(N+1)\theta=\sin\theta\cdot U_N(x)=\frac{\sin(N+2)\theta+\sin N\theta}{2\cos\theta}=\frac{\sin\theta\cdot U_{N+1}(x)+\sin\theta\cdot U_{N-1}(x)}{2x}$$

となり、第二種の Chebyshev 多項式の漸化式　$U_{N+1}(x)+U_{N-1}(x)=2x\cdot U_N(x)$　を得る。

さらに第一種の Chebyshev 多項式は $T_N(\cos\frac{B}{A}\pi)=\cos\frac{NB}{A}\pi$ で、$x=\cos\frac{B}{A}\pi$ とおいて

$$1+T_{2N}(x)=1+T_{2N}(\cos\frac{B}{A}\pi)=1+\cos\frac{2NB}{A}\pi=2\cos^{2}\frac{NB}{A}\pi$$
$$=2\left\{T_N(\cos\frac{B}{A}\pi)\right\}^{2}=2\{T_N(x)\}^{2}$$

3. 特殊行列式とチェビシェフ多項式との関係

一方、第一報で定義した行列式と Chebyshev の多項式との関係を述べる。

左側が第一種の行列式、右側が第二種の行列式である。

$$|\mathbf{X_N}| = \begin{vmatrix} x & b & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ a & x & b & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & a & x & b & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ & & & & & & & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & a & x & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & a & x & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & a & x \end{vmatrix} \qquad |_{+}\mathbf{X_N}| = \begin{vmatrix} x & b & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & a \\ a & x & b & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & a & x & b & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & & & & & & & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & a & x & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & a & x & b \\ b & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & a & x \end{vmatrix}$$

例えば 4 次の行列式は次のようになる。

$$|\mathbf{X_4}| = \begin{vmatrix} x & b & 0 & 0 \\ a & x & b & 0 \\ 0 & a & x & b \\ 0 & 0 & a & x \end{vmatrix} = x^4 - 3abx^2 + a^2b^2 \qquad |_{+}\mathbf{X_4}| = \begin{vmatrix} x & b & 0 & a \\ a & x & b & 0 \\ 0 & a & x & b \\ b & 0 & a & x \end{vmatrix} = x^4 - 4abx^2 - (a^2 - b^2)^2$$

これらの行列式の a, b に $a = b = \dfrac{1}{2}$ を代入した行列式を $|\mathbf{U_4}|$ および $|_{+}\mathbf{T_4}|$ とおくと

$$|\mathbf{U_4}| = \begin{vmatrix} x & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & x & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & x & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & x \end{vmatrix} = x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{16} \qquad |_{+}\mathbf{T_4}| = \begin{vmatrix} x & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & x & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & x & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & x \end{vmatrix} = x^4 - x^2$$

$$|\mathbf{U_5}| = x^5 - x^3 + \frac{3}{16}x \qquad |_{+}\mathbf{T_5}| = x^5 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{5}{16}x + \frac{1}{16}$$

二種類の行列式を Chebyshev 多項式に対応させると、例えば

$$U_4(x) = 2^4 \cdot |\mathbf{U_4}| = 16x^4 - 12x^2 + 1 \qquad T_4(x) - 1 = 2^3 \cdot |_{+}\mathbf{T_4}| = 8x^4 - 8x^2$$

$$U_5(x) = 2^5 \cdot |\mathbf{U_5}| = 32x^5 - 32x^3 + 6x \qquad T_5(x) + 1 = 2^4 \cdot |_{+}\mathbf{T_5}| = 16x^5 - 20x^3 + 5x + 1$$

一般に N 次の行列式の場合は次のようになる。

$U_N(x) = 2^N \cdot \left| \mathbf{U_N} \right|$ ($N \geq 2$) $\qquad T_N(x) - (-1)^N = 2^{N-1} \cdot \left| {}_{+}\mathbf{T_N} \right|$ ($N \geq 3$)

第二報から第一種の行列式は第二種の Chebyshev 多項式と次のような関係がある。

$$\begin{cases} \left|\mathbf{X_{2N}}\right| = \sum_{k=0}^{N} \left\{ (-ab)^k \ {}_{2N-k}C_k \ x^{2(N-k)} \right\} \\ \left|\mathbf{X_{2N+1}}\right| = \sum_{k=0}^{N} \left\{ (-ab)^k \ {}_{2N+1-k}C_k \ x^{2(N-k)+1} \right\} \end{cases} \text{から} \begin{cases} U_{2N}(x) = \sum_{k=0}^{N} \left\{ (-1)^k \ {}_{2N-k}C_k \ (2x)^{2(N-k)} \right\} \\ U_{2N+1}(x) = \sum_{k=0}^{N} \left\{ (-1)^k \ {}_{2N+1-k}C_k \ (2x)^{2(N-k)+1} \right\} \end{cases}$$

上の式と $\quad T_N(x) = \dfrac{U_N(x) - U_{N-2}(x)}{2} \quad$ とを利用して

$$\begin{cases} T_{2N}(x) = \frac{1}{2} \cdot {}_{2N}C_0 (2x)^{2N} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} \left\{ (-1)^k ({}_{2N-k}C_k + {}_{2N-k-1}C_{k-1})(2x)^{2(N-k)} \right\} + (-1)^N \\ \qquad = N \sum_{k=0}^{N} \left\{ (-1)^k \cdot \frac{{}_{2N-k}C_k}{2N-k} \cdot (2x)^{2(N-k)} \right\} \\ T_{2N+1}(x) = \frac{1}{2} \cdot {}_{2N+1}C_0 (2x)^{2N+1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \left\{ (-1)^k ({}_{2N+1-k}C_k + {}_{2N-k}C_{k-1})(2x)^{2(N-k)+1} \right\} \\ \qquad = \frac{2N+1}{2} \sum_{k=0}^{N} \left\{ (-1)^k \ \frac{{}_{2N+1-k}C_k}{2N+1-k} \cdot (2x)^{2(N-k)+1} \right\} \end{cases}$$

あるいは偶数次と奇数次の Chebyshev 多項式をまとめて

$$\begin{cases} T_{2N+j}(x) = \frac{2N+j}{2} \sum_{k=0}^{N} \left\{ (-1)^k \ \frac{{}_{2N+j-k}C_k}{2N+j-k} \cdot (2x)^{2(N-k)+j} \right\} \\ U_{2N+j}(x) = \sum_{k=0}^{N} \left\{ (-1)^k \ {}_{2N+j-k}C_k \ (2x)^{2(N-k)+j} \right\} \end{cases} \quad (j = 0 \text{ or } 1)$$

また第一報で述べたように $\quad \dfrac{d}{dx}\left[\left| {}_{+}\mathbf{T_N} \right| \right] = N \cdot \left| \mathbf{U_{N-1}} \right| \quad$ なので

$$\frac{d}{dx}\left[T_N(x) \right] = 2^{N-1} \cdot \frac{d}{dx}\left[\left| {}_{+}\mathbf{T_N} \right| \right] = 2^{N-1} \cdot N \left| \mathbf{U_{N-1}} \right| = N \cdot U_{N-1}(x) \quad \text{となる。}$$

この式を用いて　$T_{2N}(x)+1=2\left\{T_N(x)\right\}^2$　の微分係数を計算し、次式を得る。

$$\frac{d}{dx}\left[T_{2N}(x)+1\right]=2^{2N-1}\cdot\frac{d}{dx}\left[\left|{}_{+}\mathbf{T_{2N}}\right|\right]=2^{2N-1}\cdot 2N\cdot\left|\mathbf{U_{2N-1}}\right|=2N\cdot U_{2N-1}(x)$$

$$=\frac{d}{dx}\left[2\left\{T_N(x)\right\}^2\right]=2^2\cdot T_N(x)\cdot\frac{d}{dx}\left[T_N(x)\right]=2^2\cdot N\cdot T_N(x)\cdot U_{N-1}(x)$$

$$T_N(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{U_{2N-1}(x)}{U_{N-1}(x)}$$

この式が二種類の Chebyshev 多項式間のもう一つの関係式である。

第一種の行列式と上の式を利用して、第一種の Chebyshev 多項式の因数分解を行う。

第一種の行列式は　$\left|\mathbf{X_N}\right|=\prod_{k=1}^{N}\left(x-2\sqrt{ab}\cdot\cos\frac{k}{N+1}\pi\right)\ (k=1\sim N)$　と表せるので

$$U_N(x)=2^N\left|\mathbf{U_N}\right|=\ 2^N\prod_{k=1}^{N}\left(x-\cos\frac{k}{N+1}\pi\right)\ (N\geq 2)$$ となり、ここから

$$U_{2N-1}(x)=2^{2N-1}\prod_{k=1}^{2N-1}\left(x-\cos\frac{k}{2N}\pi\right)\qquad U_{N-1}(x)=\ 2^{N-1}\prod_{k=1}^{N-1}\left(x-\cos\frac{k}{N}\pi\right)$$ を得て、

$$T_N(x)=2^{N-1}\cdot\frac{\left(x-\cos\frac{1}{2N}\pi\right)\left(x-\cos\frac{2}{2N}\pi\right)\cdots\left(x-\cos\frac{2N-2}{2N}\pi\right)\left(x-\cos\frac{2N-1}{2N}\pi\right)}{\left(x-\cos\frac{1}{N}\pi\right)\left(x-\cos\frac{2}{N}\pi\right)\cdots\left(x-\cos\frac{N-2}{N}\pi\right)\left(x-\cos\frac{N-1}{N}\pi\right)}$$

$$=2^{N-1}\left(x-\cos\frac{1}{2N}\pi\right)\left(x-\cos\frac{3}{2N}\pi\right)\cdots\left(x-\cos\frac{2N-3}{2N}\pi\right)\left(x-\cos\frac{2N-1}{2N}\pi\right)$$

$$=2^{N-1}\prod_{k=1}^{N}\left(x-\cos\frac{2k-1}{2N}\pi\right)$$

両種類の Chebyshev 多項式の結果をまとめると、

$$\begin{cases} T_N(x)=2^{N-1}\prod_{k=1}^{N}\left(x-\cos\frac{2k-1}{2N}\pi\right) & (N\geq 2)\\ U_N(x)=2^N\ \prod_{k=1}^{N}\left(x-\cos\frac{k}{N+1}\pi\right) & (N\geq 2)\end{cases}$$

4. チェビシェフの微分方程式

$(1-x^2)\cdot T_N(x)''-x\cdot T_N(x)'+N^2\cdot T_N(x)=0$ の解は第一種の Chebyshev 多項式である。

第二種の Chebyshev 多項式を解とする微分方程式は $\dfrac{d}{dx}\left[T_{N+1}(x)\right]=(N+1)\cdot U_N(x)$ を

利用して $(1-x^2)\cdot\dfrac{d}{dx}\left[U_N(x)\right]-x\cdot U_N(x)+(N+1)\cdot T_{N+1}(x)=0$ となり、もう一度

微分して次式を得る。 $(1-x^2)\cdot U_N(x)''-3x\cdot U_N(x)'+N(N+2)\cdot U_N(x)=0$

5. チェビシェフの微分方程式の応用

5. 1 第一種のチェビシェフ多項式の応用

偶数次の第一種の Chebyshev 多項式 、例えば $T_4(x)=8x^4-8x^2+1$ から

$T_4^{-1}(X)=X^4-8X^2+8$ を導入する。 一般に

$$T_{2N}(x)=N\sum_{k=0}^{N}\left\{(-1)^k\cdot\frac{{}_{2N-k}C_k}{2N-k}\cdot(2x)^{2(N-k)}\right\} \text{ から } T_{2N}^{-1}(X)=N\sum_{k=0}^{N}\left\{(-4)^k\cdot\frac{{}_{N+k}C_{N-k}}{N+k}\cdot X^{2(N-k)}\right\}$$

この多項式の微分方程式を求める。 $T_{2N}(x)=(-1)^N X^{-2N}\cdot T_{2N}^{-1}(X)$ であるが、係数を無視して

$T_{2N}(x)=X^{-2N}\cdot T_{2N}^{-1}(X)$ として計算する。 $x=\dfrac{1}{X}$ とおくと、$\dfrac{dX}{dx}=-X^2$ となるので

$\dfrac{d}{dx}\left[T_{2N}(x)\right]=X^{-2N+1}\cdot\left\{2N\cdot T_{2N}^{-1}(X)-X\cdot T_{2N}^{-1}(X)'\right\}$ この式をもう一度微分して

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[T_{2N}(x)\right]=X^{-2N+2}\left\{X^2\cdot T_{2N}^{-1}(X)''-2(2N-1)\cdot X\cdot T_{2N}^{-1}(X)'+2N(2N-1)\cdot T_{2N}^{-1}(X)\right\}$$

これらの式を $(1-x^2)\cdot T_{2N}(x)''-x\cdot T_{2N}(x)'+4N^2\cdot T_{2N}(x)=0$ に代入して次式が得られる。

$$(X^2-1)\cdot T_{2N}^{-1}(X)''-\left\{2(2N-1)X-\frac{4N-1}{X}\right\}\cdot T_{2N}^{-1}(X)'+2N(2N-1)\cdot T_{2N}^{-1}(X)=0$$

奇数次の第一種の Chebyshev 多項式、例えば　$T_{\mathbf{5}}(x)=16x^5-20x^3+5x$　の場合は、

$T_{\mathbf{5}}^{-1}(X)=X^4-4X^2+\dfrac{16}{5}$　を考える。一般に

$$T_{\mathbf{2N+1}}(x)=\frac{2N+1}{2}\sum_{k=0}^{N}\left\{(-1)^k\,\frac{{}_{2N+1-k}C_k}{2N+1-k}\cdot(2x)^{2(N-k)+1}\right\}\quad から$$

$$T_{\mathbf{2N+1}}^{-1}(X)\;=\sum_{k=0}^{N}\left\{(-4)^k\cdot\frac{{}_{N+k+1}C_{N-k}}{N+1+k}\cdot\;X^{2(N-k)}\right\}$$

この多項式の微分方程式を求める。$T_{\mathbf{2N+1}}(x)=(-1)^N(2N+1)\cdot X^{-2N-1}\cdot T_{\mathbf{2N+1}}^{-1}(X)$ であるが、

係数を無視して　$T_{\mathbf{2N+1}}(x)=X^{-2N-1}\cdot T_{\mathbf{2N+1}}^{-1}(X)$ として計算する。

$$\frac{d}{dx}\left[\,T_{\mathbf{2N+1}}(x)\,\right]=X^{-2N}\cdot\left\{(2N+1)\cdot T_{\mathbf{2N+1}}^{-1}(X)-X\cdot T_{\mathbf{2N+1}}^{-1}(X)'\right\}$$ この式をもう一度微分して、

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\,T_{\mathbf{2N+1}}(x)\,\right]=X^{-2N+1}\left\{X^2\cdot T_{\mathbf{2N+1}}(X)''-4N\cdot X\cdot T_{\mathbf{2N+1}}(X)'+2N(2N+1)\cdot T_{\mathbf{2N+1}}(X)\right\}$$

これらの式を　$(1-x^2)\cdot T_{\mathbf{2N+1}}(x)''-x\cdot T_{\mathbf{2N+1}}(x)'+(2N+1)^2\cdot T_{\mathbf{2N+1}}(x)=0$　に代入して、

$$(X^2-1)\cdot T_{\mathbf{2N+1}}^{-1}(X)''-(4N\cdot X-\frac{4N+1}{X})\cdot T_{\mathbf{2N+1}}^{-1}(X)'+2N(2N+1)\cdot T_{\mathbf{2N+1}}^{-1}(X)=0$$

これらの関数が偶数次でも奇数次でも同じ微分方程式となるので、まずこの関数をまとめておく。

$T_{\mathbf{2}}^{-1}(X)=X^2-2$　　$T_{\mathbf{3}}^{-1}(X)=X^2-\dfrac{4}{3}$

$T_{\mathbf{4}}^{-1}(X)=X^4-8X^2+8$　　$T_{\mathbf{5}}^{-1}(X)=X^4-4X^2+\dfrac{16}{5}$

$T_{\mathbf{6}}^{-1}(X)=X^6-18X^4+48X^2-32$　　$T_{\mathbf{7}}^{-1}(X)=X^6-8X^4+16X^2-\dfrac{64}{7}$

$$T_{\mathbf{8}}^{-1}(X)=X^8-32X^6+160X^4-256X^2+128$$
$$T_{\mathbf{9}}^{-1}(X)=X^8-\frac{40}{3}X^6+48X^4-64X^2+\frac{256}{9}$$
$$T_{\mathbf{10}}^{-1}(X)=X^{10}-50X^8+400X^6-1120X^4+1280X^2-512$$
$$T_{\mathbf{11}}^{-1}(X)=X^{10}-20X^8+112X^6-256X^4+256X^2-\frac{1024}{11}$$
$$T_{\mathbf{12}}^{-1}(X)=X^{12}-72X^{10}+840X^8-3584X^6+6912X^4-6144X^2+2048$$
$$T_{\mathbf{13}}^{-1}(X)=X^{12}-28X^{10}+224X^8-768X^6+1280X^4-1024X^2+\frac{4096}{13}$$

微分方程式は次式で表される。

$$(X^2-1)\cdot T_N^{-1}(X)''-\left\{2(N-1)\cdot X-\frac{2N-1}{X}\right\}\cdot T_N^{-1}(X)'+N(N-1)\cdot T_N^{-1}(X)=0$$

この関数の因数分解は　$T_N^{-1}(X)=\prod_{k=1}^{N}(X-\frac{1}{\cos\frac{2k-1}{2N}\pi})$　（ $k\neq\frac{N+1}{2}$ ）　となる。

さらに余弦の性質から $T_N^{-1}(X)=\prod_{k=1}(X^2-\frac{1}{\cos^2\frac{2k-1}{2N}\pi})=\prod_{k=1}(X^2-1-\tan^2\frac{2k-1}{2N}\pi)$ となるので、

$T_N^{-1}(X)$　の　X^2　に　$X^2=Y^2+1$　を代入し、得られる関数を　$V_N^{-1}(Y)$　として下にまとめる。

$$V_2^{-1}(Y)=Y^2-1 \qquad V_3^{-1}(Y)=Y^2-\frac{1}{3}$$

$$V_4^{-1}(Y)=Y^4-6Y^2+1 \qquad V_5^{-1}(Y)=Y^4-2Y^2+\frac{1}{5}$$

$$V_6^{-1}(Y)=Y^6-15Y^4+15Y^2-1 \qquad V_7^{-1}(Y)=Y^6-5Y^4+3Y^2-\frac{1}{7}$$

$$V_8^{-1}(Y)=Y^8-28Y^6+70Y^4-28Y^2+1 \qquad V_9^{-1}(Y)=Y^8-\frac{28}{3}Y^6+14Y^4-4Y^2+\frac{1}{9}$$

$$V_{10}^{-1}(Y)=Y^{10}-45Y^8+210Y^6-210Y^4+45Y^2-1$$

$$V_{11}^{-1}(Y)=Y^{10}-15Y^8+42Y^6-30Y^4+5Y^2-\frac{1}{11}$$

$$V_{12}^{-1}(Y)=Y^{12}-66Y^{10}+495Y^8-924Y^6+495Y^4-66Y^2+1$$

$$V_{13}^{-1}(Y)=Y^{12}-22Y^{10}+99Y^8-132Y^6+55Y^4-6Y^2+\frac{1}{13}$$

この関数を一般的に表すと

$$\begin{cases} V_{2N}^{-1}(Y)=\sum_{k=0}^{N}\left\{(-1)^k\,{}_{2N}C_{2k}\cdot Y^{2(N-k)}\right\}=\prod_{k=1}^{N}(Y^2-\tan^2\frac{2k-1}{4N}\pi)=\prod_{i=1}^{2N}(Y-\tan\frac{2i-1}{4N}\pi) \\ V_{2N+1}^{-1}(Y)=\sum_{k=0}^{N}\left\{(-1)^k\frac{{}_{2N}C_{2k}}{2k+1}\cdot Y^{2(N-k)}\right\}=\prod_{k=1}^{N}(Y^2-\tan^2\frac{2k-1}{4N+2}\pi)=\prod_{i=1}^{2N+1}(Y-\tan\frac{2i-1}{4N+2}\pi) \end{cases}$$

ただし　$V_{2N+1}^{-1}(Y)$　の場合は　$i=N+1$　を除く。因みに

$$\frac{d}{dY}\left[V_{2N+1}^{-1}(Y)\right]=\frac{d}{dY}\left[\sum_{k=0}^{N}\left\{(-1)^k\frac{{}_{2N}C_{2k}}{2k+1}\cdot Y^{2(N-k)}\right\}\right]=\sum_{k=0}^{N-1}\left\{(-1)^k\,{}_{2N}C_{2k+1}\cdot Y^{2(N-k)-1}\right\}$$ である。

この関数の微分方程式を求める。 $X^2 = Y^2 + 1$ から $\dfrac{dY}{dX} = \dfrac{\sqrt{Y^2+1}}{Y}$

$$\frac{d}{dX}\left[T_N^{-1}(X)\right] = \frac{d}{dY}\left[V_N^{-1}(Y)\right]\cdot\left(\frac{dY}{dX}\right) = \frac{\sqrt{Y^2+1}}{Y}\cdot V_N^{-1}(Y)'$$

$$\frac{d^2}{dX^2}\left[T_N^{-1}(X)\right] = \frac{Y^2+1}{Y^2}\cdot V_N^{-1}(Y)'' - \frac{1}{Y^3}\cdot V_N^{-1}(Y)'$$

これらの式を $T_N^{-1}(X)$ の微分方程式に代入して、

$$(Y^2+1)\cdot V_N^{-1}(Y)'' - 2(N-1)Y\cdot V_N^{-1}(Y)' + N(N-1)\cdot V_N^{-1}(Y) = 0$$ を得る。

一方 $T_N(x)$ の対数を取って微分して得られる関数 $F_N(x)$ の微分方程式を求める。

$T_N(x) = 2^{N-1}\prod_{k=1}^{N}\left(x - \cos\dfrac{2k-1}{2N}\pi\right)$ の対数 $\ln\left\{T_N(x)\right\} = \ln(2^{N-1}) + \sum_{k=1}^{N}\left\{\ln(x - \cos\dfrac{2k-1}{2N}\pi)\right\}$ を

微分すると $F_N(x)$ が得られる。 $F_N(x) = \dfrac{T_N(x)'}{T_N(x)} = N\cdot\dfrac{U_{N-1}(x)}{T_N(x)} = \sum_{k=1}^{N}\left\{\dfrac{1}{x - \cos\dfrac{2k-1}{2N}\pi}\right\}$

この $F_N(x)$ をもう一度微分して $F_N(x)'$ が得られる。

ここから $$\frac{T_N(x)''}{T_N(x)} = \sum_{i,j}\left\{\frac{2}{\left(x - \cos\frac{2i-1}{2N}\pi\right)\left(x - \cos\frac{2j-1}{2N}\pi\right)}\right\}\quad(1 \le i < j \le N)$$

これらの式を第一種の Chebyshev 多項式の微分方程式、 $(1-x^2)\cdot T_N(x)'' - x\cdot T_N(x)' + N^2\cdot T_N(x) = 0$

に代入し次式を得る。 $$\sum_{k=1}^{N}\left\{\frac{x}{x - \cos\frac{2k-1}{2N}\pi}\right\} + \sum_{i,j}\left\{\frac{2(x^2-1)}{\left(x - \cos\frac{2i-1}{2N}\pi\right)\left(x - \cos\frac{2j-1}{2N}\pi\right)}\right\} = N^2$$

さらに $\ln\left\{T_N(x)'\right\}$ の微分 $\dfrac{T_N(x)''}{T_N(x)'}$ は次式となる。

$$\frac{d}{dx}\left[\ln\left\{T_N(x)'\right\}\right] = \frac{T_N(x)''}{T_N(x)'} = 2\cdot\frac{\sum_{i,j}\left\{\dfrac{1}{\left(x - \cos\frac{2i-1}{2N}\pi\right)\left(x - \cos\frac{2j-1}{2N}\pi\right)}\right\}}{\sum_{k=1}^{N}\left\{\dfrac{1}{x - \cos\frac{2k-1}{2N}\pi}\right\}}$$

一方　$T_N(x)' = T_N(x) \cdot F_N(x)$　と　$T_N(x)'' = T_N(x) \cdot \left\lfloor F_N(x)' + \{F_N(x)\}^2 \right\rfloor$　を

第一種の Chebyshev 多項式の微分方程式に代入し、

$(1-x^2) \cdot T_N(x) \cdot \left\lfloor F_N(x)' + \{F_N(x)\}^2 \right\rfloor - x \cdot T_N(x) \cdot F_N(x) + N^2 \cdot T_N(x) = 0$　を整理し

$N^2 = x \cdot F_N(x) + (x^2-1) \cdot \left\lfloor F_N(x)' + \{F_N(x)\}^2 \right\rfloor$　この式をもう一度微分してさらに整理すると

$$(x^2-1) \cdot F_N(x)'' + 3x \cdot F_N(x)' + F_N(x) \cdot \left\lfloor 2N^2 + 1 - 2(x^2-1) \cdot \{F_N(x)\}^2 \right\rfloor$$

$$= (x^2-1) \cdot F_N(x)'' + 3x \cdot F_N(x)' + F_N(x) \cdot \left[1 + 2N^2 \frac{\{T_N(x)\}^2 + (1-x^2) \cdot \{U_{N-1}(x)\}^2}{\{T_N(x)\}^2} \right]$$

$$= (x^2-1) \cdot F_N(x)'' + 3x \cdot F_N(x)' + F_N(x) \cdot \left[1 + \frac{2N^2}{\{T_N(x)\}^2} \right]$$

$$= (x^2-1) \cdot F_N(x)'' + 3x \cdot F_N(x)' + F_N(x) \cdot \left[1 + \frac{4N^2}{1 + T_{2N}(x)} \right] = 0$$

この微分方程式の解は　$F_N(x) = \dfrac{T_N(x)'}{T_N(x)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \left\{ \frac{1}{x - \cos \dfrac{2k-1}{2N} \pi} \right\}$　である。

5．2　第二種のチェビシェフ多項式の応用

偶数次の第二種の Chebyshev 多項式、例えば　$U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1$　から

$U_4^{-1}(X) = X^4 - 12X^2 + 16$　を導入すると、この関数は次式で表される。

$U_{2N}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \left\{ (-1)^k \, {}_{2N-k}C_k (2x)^{2(N-k)} \right\}$　から　$U_{2N}^{-1}(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \left\{ (-4)^k \cdot {}_{N+k}C_{N-k} \cdot X^{2(N-k)} \right\}$

この多項式の微分方程式を求める。$U_{2N}(x) = (-1)^N X^{-2N} \cdot U_{2N}^{-1}(X)$　であるが、係数を無視して

$U_{2N}(x) = X^{-2N} \cdot U_{2N}^{-1}(X)$　として計算する。

$$\frac{d}{dx}\left[U_{2N}(x) \right] = X^{-2N+1} \left\{ 2N \cdot U_{2N}^{-1}(X) - X \cdot U_{2N}^{-1}(X)' \right\}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[U_{2N}(X) \right] = X^{-2N+2} \left\{ X^2 \cdot U_{2N}^{-1}(X)'' - 2(2N-1)X \cdot U_{2N}^{-1}(X)' + 2N(2N-1) \cdot U_{2N}^{-1}(X) \right\}$$

これらの式を $(1-x^2)\cdot U_{2N}(x)''-3x\cdot U_{2N}(x)'+4N(N+1)\cdot U_{2N}(x)=0$ に代入して次式を得る。

$$(X^2-1)\cdot U_{\mathbf{2N}}^{-1}(X)''-\left\{2(2N-1)X-\frac{4N+1}{X}\right\}\cdot U_{\mathbf{2N}}^{-1}(X)'+2N(2N-1)\cdot U_{\mathbf{2N}}^{-1}(X)=0$$

さらに奇数次の第二種の Chebyshev 多項式、例えば $U_{\mathbf{5}}(x)=32x^5-32x^3+6x$ の場合は、

$U_{\mathbf{5}}^{-1}(x)=X^4-\dfrac{16}{3}X^2+\dfrac{16}{3}$ とする。

$U_{\mathbf{2N+1}}(x)=\sum_{k=0}^{N}\left\{(-1)^k{}_{2N+1-k}C_k(2x)^{2(N-k)+1}\right\}$ から $U_{\mathbf{2N+1}}^{-1}(X)=\dfrac{1}{N+1}\cdot\sum_{k=0}^{N}\left\{(-4)^k\cdot{}_{\boldsymbol{N+k+1}}C_{\boldsymbol{N-k}}\cdot X^{2(N-k)}\right\}$

この多項式の微分方程式を求める。$U_{\mathbf{2N+1}}(X)=(-1)^N\cdot 2(N+1)\cdot X^{-2N-1}\cdot U_{\mathbf{2N+1}}^{-1}(X)$ であるが

係数を無視して、$U_{\mathbf{2N+1}}(X)=X^{-2N-1}\cdot U_{\mathbf{2N+1}}^{-1}(X)$ として計算する。

$$\frac{d}{dx}\left[U_{\mathbf{2N+1}}(x)\right]=X^{-2N}\left\{(2N+1)\cdot U_{\mathbf{2N+1}}^{-1}(X)-X\cdot U_{\mathbf{2N+1}}^{-1}(X)'\right\}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[U_{\mathbf{2N+1}}(X)\right]=X^{-2N+1}\left\{X^2\cdot U_{\mathbf{2N+1}}^{-1}(X)''-4NX\cdot U_{\mathbf{2N+1}}^{-1}(X)'+2N(2N+1)\cdot U_{\mathbf{2N+1}}^{-1}(X)\right\}$$

以上の三式を $(1-x^2)\cdot U_{2N+1}(x)''-3x\cdot U_{2N+1}(x)'+(2N+1)(2N+3)\cdot U_{2N+1}(x)=0$ に代入して、

$$(X^2-1)\cdot U_{\mathbf{2N+1}}^{-1}(X)''-\left(4NX-\frac{4N+3}{X}\right)\cdot U_{\mathbf{2N+1}}^{-1}(X)'+2N(2N+1)\cdot U_{\mathbf{2N+1}}^{-1}(X)=0$$

を得る。この式が $U_{\mathbf{2N+1}}^{-1}(X)$ の微分方程式である。

これらの関数が偶数次でも奇数次でも同じ微分方程式となるので、まずこの関数をまとめておく。

$$U_2^{-1}(X) = X^2 - 4 \qquad U_3^{-1}(X) = X^2 - 2$$

$$U_4^{-1}(X) = X^4 - 12X^2 + 16 \qquad U_5^{-1}(X) = X^4 - \frac{16}{3}X^2 + \frac{16}{3}$$

$$U_6^{-1}(X) = X^6 - 24X^4 + 80X^2 - 64 \qquad U_7^{-1}(X) = X^6 - 10X^4 + 24X^2 - 16$$

$$U_8^{-1}(X) = X^8 - 40X^6 + 240X^4 - 448X^2 + 256$$

$$U_9^{-1}(X) = X^8 - 16X^6 + \frac{336}{5}X^4 - \frac{512}{5}X^2 + \frac{256}{5}$$

$$U_{10}^{-1}(X) = X^{10} - 60X^8 + 560X^6 - 1792X^4 + 2304X^2 - 1024$$

$$U_{11}^{-1}(X) = X^{10} - \frac{70}{3}X^8 + \frac{448}{3}X^6 - 384X^4 + \frac{1280}{3}X^2 - \frac{512}{3}$$

$$U_{12}^{-1}(X) = X^{12} - 84X^{10} + 1120X^8 - 5376X^6 + 11520X^4 - 11264X^2 + 4096$$

$$U_{13}^{-1}(X) = X^{12} - 32X^{10} + 288X^8 - \frac{7680}{7}X^6 + \frac{14080}{7}X^4 - \frac{12288}{7}X^2 + \frac{4096}{7}$$

微分方程式は次のようになる。

$$(X^2 - 1)\cdot U_N^{-1}(X)'' - \left\{2(N-1)X - \frac{2N+1}{X}\right\}\cdot U_N^{-1}(X)' + N(N-1)\cdot U_N^{-1}(X) = 0$$

$U_N^{-1}(X)$ の因数分解は $\displaystyle U_N^{-1}(X) = \prod_{k=1}^{N}\left(X - \frac{1}{\cos\frac{k}{N+1}\pi}\right)$ $\left(k \neq \frac{N+1}{2}\right)$ である。

さらに $\displaystyle U_N^{-1}(X) = \prod_{k=1}\left(X^2 - \frac{1}{\cos^2\frac{k}{N+1}\pi}\right) = \prod_{k=1}\left(X^2 - 1 - \tan^2\frac{k}{N+1}\pi\right)$ となるので

$U_N^{-1}(X)$ の X^2 に $X^2 = Y^2 + 1$ を代入し、得られる関数を $W_N^{-1}(Y)$ として下にまとめる。

$$W_2^{-1}(Y) = Y^2 - 3 \qquad W_3^{-1}(Y) = Y^2 - 1$$

$$W_4^{-1}(Y) = Y^4 - 10Y^2 + 5 \qquad W_5^{-1}(Y) = Y^4 - \frac{10}{3}Y^2 + 1$$

$$W_6^{-1}(Y) = Y^6 - 21Y^4 + 35Y^2 - 7 \qquad W_7^{-1}(Y) = Y^6 - 7Y^4 + 7Y^2 - 1$$

$$W_8^{-1}(Y) = Y^8 - 36Y^6 + 126Y^4 - 84Y^2 + 9 \qquad W_9^{-1}(Y) = Y^8 - 12Y^6 + \frac{126}{5}Y^4 - 12Y^2 + 1$$

$$W_{10}^{-1}(Y) = Y^{10} - 55Y^8 + 330Y^6 - 462Y^4 + 165Y^2 - 11$$

$$W_{11}^{-1}(Y) = Y^{10} - \frac{55}{3}Y^8 + 66Y^6 - 66Y^4 + \frac{55}{3}Y^2 - 1$$

$$W_{12}^{-1}(Y) = Y^{12} - 78Y^{10} + 715Y^8 - 1716Y^6 + 1287Y^4 - 286Y^2 + 13$$

$$W_{13}^{-1}(Y) = Y^{12} - 26Y^{10} + 143Y^8 - \frac{1716}{7}Y^6 + 143Y^4 - 26Y^2 + 1$$

この関数を一般的に表すと、

$$\begin{cases} W_{2N}^{-1}(Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N}\left\{ (-1)^k \, {}_{2N+1}C_{2k} \cdot Y^{2(N-k)} \right\} = \prod_{k=1}^{N}\left(Y^2 - \tan^2 \frac{k}{2N+1}\pi \right) = \prod_{i=1}^{2N}\left(Y - \tan \frac{i}{2N+1}\pi \right) \\ W_{2N+1}^{-1}(Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N}\left\{ (-1)^k \frac{{}_{2N+1}C_{2k}}{2k+1} \cdot Y^{2(N-k)} \right\} = \prod_{k=1}^{N}\left(Y^2 - \tan^2 \frac{k}{2N+2}\pi \right) = \prod_{i=1}^{2N+1}\left(Y - \tan \frac{i}{2N+2}\pi \right) \end{cases}$$

ただし $W_{2N+1}^{-1}(Y)$ の場合は $i = N+1$ を除く。

この関数の微分方程式を求める。 $X^2 = Y^2 + 1$ から $\dfrac{dY}{dX} = \dfrac{\sqrt{Y^2+1}}{Y}$

$$\frac{d}{dX}\left[U_N^{-1}(X)\right] = \frac{d}{dY}\left[W_N^{-1}(Y)\right] \cdot \left(\frac{dY}{dX}\right) = \frac{\sqrt{Y^2+1}}{Y} \cdot W_N^{-1}(Y)' \quad \text{および、}$$

さらに微分して、 $$\frac{d^2}{dX^2}\left[U_N^{-1}(X)\right] = \frac{Y^2+1}{Y^2} \cdot W_N^{-1}(Y)'' - \frac{1}{Y^3} \cdot W_N^{-1}(Y)'$$

これらの式を $U_N^{-1}(X)$ の微分方程式に代入して、

$$(Y^2+1) \cdot W_N^{-1}(Y)'' - 2\left\{ (N-1)Y - \frac{1}{Y} \right\} \cdot W_N^{-1}(Y)' + N(N-1) \cdot W_N^{-1}(Y) = 0$$ を得る。

さらに $U_N(x)$ の対数を取って微分して得られる関数の微分方程式を求める。

$U_N(x)=2^N\prod_{k=1}^{N}\left(x-\cos\frac{k}{N+1}\pi\right)$ の対数 $\ln\{U_N(x)\}=\ln(2^N)+\sum_{k=1}^{N}\left\{\ln(x-\cos\frac{k}{N+1}\pi)\right\}$ を

微分すると $G_N(x)$ が得られる。 $G_N(x)=\frac{U_N(x)'}{U_N(x)}=\sum_{k=1}^{N}\{\frac{1}{x-\cos\frac{k}{N+1}\pi}\}$

この $G_N(x)$ をもう一度微分して $G_N(x)'$ が得られる。 $G_N(x)'=\frac{U_N(x)''}{U_N(x)}-\left\{\frac{U_N(x)'}{U_N(x)}\right\}^2$

ここから

$$\frac{U_N(x)''}{U_N(x)}=\sum_{i,j}\left\{\frac{2}{\left(x-\cos\frac{i}{N+1}\pi\right)\left(x-\cos\frac{j}{N+1}\pi\right)}\right\}\ (1\le i<j\le N)$$

これらの式を第二種の Chebyshev 多項式の微分方程式、

$(1-x^2)\cdot U_N(x)''-3x\cdot U_N(x)'+N(N+2)\cdot U_N(x)=0$ に代入し次式を得る。

$$\sum_{k=1}^{N}\{\frac{3x}{x-\cos\frac{k}{N+1}\pi}\}+\sum_{i,j}\{\frac{2(x^2-1)}{\left(x-\cos\frac{i}{N+1}\pi\right)\left(x-\cos\frac{j}{N+1}\pi\right)}\}=N(N+2)$$

さらに

$$\frac{d}{dx}\left[\ln\{U_N(x)'\}\right]=\frac{U_N(x)''}{U_N(x)'}=2\cdot\frac{\sum_{i,j}\{\frac{1}{\left(x-\cos\frac{i}{N+1}\pi\right)\left(x-\cos\frac{j}{N+1}\pi\right)}\}}{\sum_{k=1}^{N}\{\frac{1}{x-\cos\frac{k}{N+1}\pi}\}}$$

$G_N(x)$ 微分方程式を求めるためにまず $\{T_{N+1}(x)\}^2+(1-x^2)\{U_N(x)\}^2=1$ を微分して

$(N+1)\cdot T_{N+1}(x)-x\cdot U_N(x)+(1-x^2)\cdot U_N(x)'=0$ が得られ、 整理すると、

$$(x^2-1)\cdot\frac{U_N(x)'}{U_N(x)}+x=(x^2-1)\cdot G_N(x)+x=(N+1)\cdot\frac{T_{N+1}(x)}{U_N(x)}=(N+1)\cdot H_N(x)$$

ただし $H_N(x)=\frac{T_{N+1}(x)}{U_N(x)}$ とおいた。この式を微分し、さらにもう一度微分して次の二式が得られる。

$$(x^2-1)\cdot G_N(x)'+2x\cdot G_N(x)+1=(N+1)\{N+1-H_N(x)\cdot G_N(x)\}$$ および、

$$(x^2-1)\cdot G_N(x)''+\{(N+1)\cdot H_N(x)+4x\}\cdot G_N(x)'+\{(N+1)\cdot H_N(x)'+2\}\cdot G_N(x)=0$$

この式整理して、 $$(x^2-1)\cdot G_N(x)''+\{(N+1)\cdot H_N(x)+4x\}\cdot G_N(x)'$$
$$+\{N^2+2N+3-(N+1)\cdot H_N(x)\cdot G_N(x)\}\cdot G_N(x)=0$$

$H_N(x)$ を除くと、 $$(x^2-1)\cdot G_N(x)''+\{(x^2-1)\cdot G_N(x)+5x\}\cdot G_N(x)'$$
$$+\left[N^2+2N+3-\{(x^2-1)\cdot G_N(x)+x\}\cdot G_N(x)\right]\cdot G_N(x)=0$$

この式が $G_N(x)=\dfrac{U_N(x)'}{U_N(x)}=\sum_{k=1}^{N}\left\{\dfrac{1}{x-\cos\dfrac{k}{N+1}\pi}\right\}$ の微分方程式である。

$H_N(x)$ の微分方程式は $H_N(x)=\dfrac{T_{N+1}(x)}{U_N(x)}$ を微分し $H_N(x)'+G_N(x)\cdot H_N(x)=N+1$ を得、

もう一度微分して、得られる式に (x^2-1) をかけて整理し、

$$(x^2-1)\cdot H_N(x)''+\{2(N+1)\cdot H_N(x)+x\}\cdot H_N(x)'-\left[H_N(x)+2\cdot(N+1)\cdot x\right]=0$$ を得る。

この式が $H_N(x)=\dfrac{T_{N+1}(x)}{U_N(x)}=\dfrac{\prod_{k=1}^{N+1}\left(x-\cos\dfrac{2k-1}{2N+2}\pi\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(x-\cos\dfrac{k}{N+1}\pi\right)}\quad(N\ge 2)$ の微分方程式である。

6. チェビシェフ多項式の数値計算

6. 1 第一種の行列式から得られる行列の固有ベクトルの利用

偶数次の行列 $[\mathbf{X}_4(x)]=\begin{bmatrix} x & b & 0 & 0\\ a & x & b & 0\\ 0 & a & x & b\\ 0 & 0 & a & x\end{bmatrix}$ の固有値 $\lambda_4(k)$ と固有ベクトル $\nu_j(k)$ は $|\mathbf{X}_4(x)|=0$

の解が $x=2\sqrt{ab}\cdot\cos\dfrac{k}{5}\pi\quad(k=1\sim 4)$ なので $\lambda_4(k)=x-2\sqrt{ab}\cdot\cos\dfrac{k}{5}\pi\quad(k=1\sim 4)$。

固有ベクトルは $c_4(k)=2\sqrt{ab}\cdot\cos\dfrac{k}{5}\pi\quad(k=1\sim 4)$ で、$\begin{bmatrix} c_4(k) & b & 0 & 0\\ a & c_4(k) & b & 0\\ 0 & a & c_4(k) & b\\ 0 & 0 & a & c_4(k)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1(k)\\ v_2(k)\\ v_3(k)\\ v_4(k)\end{bmatrix}=0$

$v_1(k)$ を基準として

$$\begin{cases} v_1(k) \\ v_2(k) = -\dfrac{c_4(k)}{b} v_1(k) \\ v_3(k) = \dfrac{\{c_4(k)\}^2 - ab}{b^2} v_1(k) \\ v_4(k) = -\dfrac{\{c_4(k)\}^3 - 2ab\{c_4(k)\}}{b^3} v_1(k) \end{cases}$$

$v_4(k)$ を基準として

$$\begin{cases} v_1(k) = -\dfrac{\{c_4(k)\}^3 - 2ab\{c_4(k)\}}{a^3} v_4(k) \\ v_2(k) = \dfrac{\{c_4(k)\}^2 - ab}{a^2} v_4(k) \\ v_3(k) = -\dfrac{c_4(k)}{a} v_4(k) \\ v_4(k) \end{cases}$$

$c_4(k) = |\,\mathbf{X}_1\{c_4(k)\}\,|$, $\{c_4(k)\}^2 - ab = |\,\mathbf{X}_2\{c_4(k)\}\,|$, $\{c_4(k)\}^3 - 2ab\{c_4(k)\} = |\,\mathbf{X}_3\{c_4(k)\}\,|$ と

$v_1(k)$ と $v_4(k)$ の関係から $|\,\mathbf{X}_3\{c_4(k)\}\,| = \pm\sqrt{a^3b^3}$ で $U_3(\cos\frac{k}{5}\pi) = \pm 1$

$U_3(\cos\frac{k}{5}\pi) = 1$ のとき $(k = 1, 3)$ $U_3(\cos\frac{k}{5}\pi) = -1$ のとき $(k = 2, 4)$

$$\begin{cases} v_1(k) \\ v_2(k) = -\dfrac{|\,\mathbf{X}_1\{c_4(k)\}\,|}{b} v_1(k) \\ v_3(k) = \dfrac{\sqrt{a}\,|\,\mathbf{X}_1\{c_4(k)\}\,|}{\sqrt{b^3}} v_1(k) \\ v_4(k) = -\dfrac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{b^3}} v_1(k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1(k) \\ v_2(k) = -\dfrac{|\,\mathbf{X}_1\{c_4(k)\}\,|}{b} v_1(k) \\ v_3(k) = -\dfrac{\sqrt{a}\,|\,\mathbf{X}_1\{c_4(k)\}\,|}{\sqrt{b^3}} v_1(k) \\ v_4(k) = \dfrac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{b^3}} v_1(k) \end{cases}$$

$|\,\mathbf{X}_2\{c_4(k)\}\,| = \sqrt{ab}\,|\,\mathbf{X}_1\{c_4(k)\}\,|$ $|\,\mathbf{X}_2\{c_4(k)\}\,| = -\sqrt{ab}\,|\,\mathbf{X}_1\{c_4(k)\}\,|$

$U_2(\cos\frac{k}{5}\pi) = U_1(\cos\frac{k}{5}\pi)$ $(k = 1, 3)$ $U_2(\cos\frac{k}{5}\pi) = -U_1(\cos\frac{k}{5}\pi)$ $(k = 2, 4)$

$[\,\mathbf{X}_6(x)\,]$ を利用する場合も全く同様に、$U_5(\cos\frac{k}{7}\pi) = \pm 1$ から

$U_5(\cos\frac{k}{7}\pi) = 1$ のとき $(k = 1, 3, 5)$ $U_5(\cos\frac{k}{7}\pi) = -1$ のとき $(k = 2, 4, 6)$

$U_4(\cos\frac{k}{7}\pi) = U_1(\cos\frac{k}{7}\pi)$ $(k = 1, 3, 5)$ $U_4(\cos\frac{k}{7}\pi) = -U_1(\cos\frac{k}{7}\pi)$ $(k = 2, 4, 6)$

$U_3(\cos\frac{k}{7}\pi) = U_2(\cos\frac{k}{7}\pi)$ $(k = 1, 3, 5)$ $U_3(\cos\frac{k}{7}\pi) = -U_2(\cos\frac{k}{7}\pi)$ $(k = 2, 4, 6)$

奇数次の行列の場合も例えば $\left[\,\mathbf{X}_5(x)\,\right]$ を利用すると $U_4(\cos\frac{k}{6}\pi)=\pm 1$ となり、

$U_4(\cos\frac{k}{6}\pi)=1$ のとき $(k=1,3,5)$ $U_4(\cos\frac{k}{6}\pi)=-1$ のとき $(k=2,4)$

$$\begin{cases} v_1(k) \\ v_2(k)=-\dfrac{|\,\mathbf{X}_1\{c_5(k)\}|}{b}\,v_1(k) \\ v_3(k)=\dfrac{|\,\mathbf{X}_2\{c_5(k)\}|}{b^2}\,v_1(k) \\ v_4(k)=-\dfrac{a\,|\,\mathbf{X}_1\{c_5(k)\}|}{b^2}v_1(k) \\ v_5(k)=\dfrac{a^2}{b^2}v_1(k) \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1(k) \\ v_2(k)=-\dfrac{|\,\mathbf{X}_1\{c_5(k)\}|}{b}v_1(k) \\ v_3(k)=0 \\ v_4(k)=\dfrac{a\,|\,\mathbf{X}_1\{c_5(k)\}|}{b^2}v_1(k) \\ v_5(k)=-\dfrac{a^2}{b^2}v_1(k) \end{cases}$$

$$U_3(\cos\frac{k}{6}\pi)=U_1(\cos\frac{k}{6}\pi)\ (k=1,3,5) \qquad U_3(\cos\frac{k}{6}\pi)=-U_1(\cos\frac{k}{6}\pi)\ \ (k=2,4)$$

$\left[\,\mathbf{X}_7(x)\,\right]$を利用する場合も全く同様に $U_6(\cos\frac{k}{8}\pi)=\pm 1$ となり、

$$U_6(\cos\frac{k}{8}\pi)=1 \ \text{のとき}\ (k=1,3,5,7) \qquad U_6(\cos\frac{k}{8}\pi)=-1 \ \text{のとき}\ (k=2,4,6)$$

$$U_5(\cos\frac{k}{8}\pi)=U_1(\cos\frac{k}{8}\pi)\ (k=1,3,5,7) \qquad U_5(\cos\frac{k}{8}\pi)=-U_1(\cos\frac{k}{8}\pi)\ (k=2,4,6)$$

$$U_4(\cos\frac{k}{8}\pi)=U_2(\cos\frac{k}{8}\pi)\ (k=1,3,5,7) \qquad U_4(\cos\frac{k}{8}\pi)=-U_2(\cos\frac{k}{8}\pi)\ (k=2,4,6)$$

以上の偶数次および奇数次の行列式の結果をまとめると $j,k=1,2,3,\cdots$、$(N>2j)$として、

$$\begin{cases} U_N(\cos\dfrac{2k-1}{N+2}\pi)=1 \\ U_{N-j}(\cos\dfrac{2k-1}{N+2}\pi)=U_j(\cos\dfrac{2k-1}{N+2}\pi) \end{cases} \qquad \begin{cases} U_N(\cos\dfrac{2k}{N+2}\pi)=-1 \\ U_{N-j}(\cos\dfrac{2k}{N+2}\pi)=-U_j(\cos\dfrac{2k}{N+2}\pi) \end{cases}$$

この結果を利用して次式を得る。

$$U_{N-1}(\cos\frac{2k-1}{N+2}\pi)=U_1(\cos\frac{2k-1}{N+2}\pi) \ \text{から}\ U_N(\cos\frac{2k-1}{N+3}\pi)=2\cdot\cos\frac{2k-1}{N+3}\pi$$

$$U_{N-1}(\cos\frac{2k}{N+2}\pi)=-U_1(\cos\frac{2k}{N+2}\pi) \ \text{から}\ U_N(\cos\frac{2k}{N+3}\pi)=-2\cdot\cos\frac{2k}{N+3}\pi$$

６．２　チェビシェフ多項式からの直接計算

すでに述べたように $\begin{cases} T_N(x) = 2^{N-1}\prod_{k=1}^{N}\left(x-\cos\frac{2k-1}{2N}\pi\right) \\ U_N(x) = 2^N \prod_{k=1}^{N}\left(x-\cos\frac{k}{N+1}\pi\right) \end{cases}$ なので $\begin{cases} T_N(\cos\frac{2k-1}{2N}\pi) = 0 \\ U_N(\cos\frac{k}{N+1}\pi) = 0 \end{cases}$

以上の結果と　$T_N(x) = \dfrac{U_N(x) - U_{N-2}(x)}{2}$　から $U_N(\cos\frac{2k-1}{2N}\pi) = U_{N-2}(\cos\frac{2k-1}{2N}\pi)$

第一報に述べたように第二種の偶数次の行列式は　$\left|{}_{+}\mathbf{T}_{\mathbf{2N}}\right| = (x^2-1)\prod_{k=1}^{N-1}\left(x-\cos\frac{2k}{2N}\pi\right)^2$　で、

$T_{2N}(x) - 1 = 2^{2N-1}\cdot\left|{}_{+}\mathbf{T}_{\mathbf{2N}}\right|$　($N \geq 2$)　なので　$T_{2N}(\cos\frac{2k}{2N}\pi) = 1$　および　$T_{2N}(\pm 1) = 1$

さらに　$1 + T_{2N}(x) = 2\{T_N(x)\}^2$　と　$T_{2N}(\cos\frac{2k}{2N}\pi) = 1$　から　$T_N(\cos\frac{k}{N}\pi) = \pm 1$　となり

$$T_N(\cos\frac{2k-1}{N}\pi) = -1 \qquad T_N(\cos\frac{2k}{N}\pi) = 1$$

第二種の奇数次の行列式では　$\left|{}_{+}\mathbf{T}_{\mathbf{2N+1}}\right| = (x+1)\prod_{k=1}^{N}\left(x-\cos\frac{2k-1}{2N+1}\pi\right)^2$　なので $T_{2N+1}(-1) = -1$

さらに　$T_{2N+1}(x) = -T_{2N+1}(-x)$　なので　$T_{2N+1}(1) = 1$　。

また　$U_{N-j}(\cos\frac{2k}{N+2}\pi) = -U_j(\cos\frac{2k}{N+2}\pi)$　($k = 1, 2, 3, \cdots$)　の $N+2$　に $2N$ 、

j　に　$j = N-2$　を代入し、第一種および第二種 Chebyshev 多項式間の関係を利用し、

$$T_N(\cos\frac{2k}{2N}\pi) = U_N(\cos\frac{2k}{2N}\pi) = -U_{N-2}(\cos\frac{2k}{2N}\pi) \quad (k = 1, 2, 3, \cdots),$$

あるいは　$T_N(\cos\frac{k}{N}\pi) = U_N(\cos\frac{k}{N}\pi) = -U_{N-2}(\cos\frac{k}{N}\pi)$

すでに得られた結果から、$\begin{cases} T_N(\cos\frac{2k-1}{N}\pi) = U_N(\cos\frac{2k-1}{N}\pi) = -U_{N-2}(\cos\frac{2k-1}{N}\pi) = -1 \\ T_N(\cos\frac{2k}{N}\pi) = U_N(\cos\frac{2k}{N}\pi) = -U_{N-2}(\cos\frac{2k}{N}\pi) = 1 \end{cases}$

また次式も得られる。

$$T_N\left(\cos\frac{2k-1}{N+2}\pi\right) = \frac{1-U_2\left(\cos\frac{2k-1}{N+2}\pi\right)}{2} = -\cos\frac{4k-2}{N+2}\pi$$

$$T_N\left(\cos\frac{2k}{N+2}\pi\right) = \frac{-1+U_2\left(\cos\frac{2k}{N+2}\pi\right)}{2} = \cos\frac{4k}{N+2}\pi$$

以上をまとめて、

$$\begin{cases} T_N\left(\cos\frac{2k-1}{N}\pi\right) = -1 \\ T_N\left(\cos\frac{2k-1}{N+2}\pi\right) = -\cos\frac{4k-2}{N+2}\pi \\ U_N\left(\cos\frac{2k-1}{N}\pi\right) = -1 \\ U_N\left(\cos\frac{2k-1}{N+1}\pi\right) = 0 \\ U_N\left(\cos\frac{2k-1}{N+2}\pi\right) = 1 \\ U_{N-j}\left(\cos\frac{2k-1}{N+2}\pi\right) = U_j\left(\cos\frac{2k-1}{N+2}\pi\right) \\ U_N\left(\cos\frac{2k-1}{N+3}\pi\right) = 2\cdot\cos\frac{2k-1}{N+3}\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_N\left(\cos\frac{2k}{N}\pi\right) = 1 \\ T_N\left(\cos\frac{2k}{N+2}\pi\right) = \cos\frac{4k}{N+2}\pi \\ U_N\left(\cos\frac{2k}{N}\pi\right) = 1 \\ U_N\left(\cos\frac{2k}{N+1}\pi\right) = 0 \\ U_N\left(\cos\frac{2k}{N+2}\pi\right) = -1 \\ U_{N-j}\left(\cos\frac{2k}{N+2}\pi\right) = -U_j\left(\cos\frac{2k}{N+2}\pi\right) \\ U_N\left(\cos\frac{2k}{N+3}\pi\right) = -2\cdot\cos\frac{2k}{N+3}\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_{2N+1}(1) = 1 \\ T_{2N+1}(-1) = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_{2N}(1) = 1 \\ T_{2N}(-1) = 1 \end{cases}$$

7. バネの振動への応用

第一種の行列式のバネ運動への応用は前報ですでに二例掲げた。今回は長さ L の固定された空間にバネ定数、k の等しい4本のバネと、質量、m の等しい3個のおもりを　バネ～おもり～バネ～おもり～バネ～おもり～バネの順に並べた系のそれぞれのおもりの振動を計算する。左から順に各おもりの平衡の位置からの微小の変位、その変位の時間に関する一次微分、さらにその変位の二次微分をそれぞれ次のように置くと、おもりの運動のエネルギーとバネのポテンシャルエネルギーは次のようになる。

$$\begin{cases} q_1\,,\ q_2\,,\ q_3 \\ \dot{q}_1\,,\ \dot{q}_2\,,\ \dot{q}_3, \\ \ddot{q}_1\,,\ \ddot{q}_2\,,\ \ddot{q}_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} T = \dfrac{m}{2}\left(\dot{q}_1{}^2 + \dot{q}_2{}^2 + \dot{q}_3{}^2\right) \\ U = \dfrac{k}{2}\left\{q_1{}^2 + (q_1 - q_2)^2 + (q_2 - q_3)^2 + q_3{}^2\right\} \end{cases}$$

Lagrange 関数と Lagrange 方程式は次式なので、この問題に応用すると次式が得られる。

$$\begin{cases} L = T - U \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} m\ddot{q}_1 + 2kq_1 - kq_2 = 0 \\ m\ddot{q}_2 + 2kq_2 - kq_1 - kq_3 = 0 \\ m\ddot{q}_3 + 2kq_3 - kq_2 = 0 \end{cases}$$

$q_j = A_j \cos(\omega t + \delta)$　とおいて Lagrange 方程式を書きなおすと

$$\begin{cases} (2k - m\omega^2)A_1 - kA_2 = 0 \\ -kA_1 + (2k - m\omega^2)A_2 - kA_3 = 0 \\ -kA_2 + (2k - m\omega^2)A_3 = 0 \end{cases}$$

$\lambda = \dfrac{m}{2k}\omega^2$　とおいて整理し、Cramer の式を使って得られる行列式を $|\mathbf{G_3}|$ とすると、

$$|\mathbf{G_3}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -\dfrac{1}{2} & 0 \\ -\dfrac{1}{2} & 1-\lambda & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & -\dfrac{1}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{から}$$

この $|\mathbf{G_3}|$ は $|\mathbf{X_3}|$ に $a=b=-\dfrac{1}{2}$, $x=1-\lambda$ を代入した行列式と同じものであり、

$$|\mathbf{G_3}|=\prod_{j=1}^{3}\left\{(1-\lambda)-\cos\frac{j}{4}\pi\right\}=0$$ となり、$\lambda=\dfrac{m}{2k}\omega^2$ を利用して

$$\omega=\sqrt{2\left(1-\cos\frac{j}{4}\pi\right)\cdot\frac{k}{m}}=2\sqrt{\frac{k}{m}}\ \sin\frac{j}{8}\pi \quad (j=1,2,3)$$ と容易に求めることができる。

なおこの問題は、窪田高弘[2006] p.117 の問題を借用した。

同様に長さ L の固定された空間にバネ定数、 k の等しい $n+1$ 本のバネと、質量、m の等しい n 個のおもりをバネ～おもり～バネ～おもり～バネ～‥‥～おもり～バネの順に並べた系のそれぞれのおもりの振動を求めるためには次の行列式を計算すればよい。

$$\begin{vmatrix}
1-\lambda & -\frac{1}{2} & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{2} & 1-\lambda & -\frac{1}{2} & \cdot & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{1}{2} & 1-\lambda & \cdot & 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \cdot & 1-\lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdot & -\frac{1}{2} & 1-\lambda & -\frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & -\frac{1}{2} & 1-\lambda
\end{vmatrix}=|\mathbf{H_N}|$$

この $|\mathbf{H_N}|$ は $|\mathbf{X_N}|$ に $a=b=-\dfrac{1}{2}$, $x=1-\lambda$ を代入した行列式と同じものであり、

その解はすでに得られている。

$$|\mathbf{H_N}|=\prod_{j=1}^{n}\left\{(1-\lambda)-\cos\frac{j}{n+1}\pi\right\}=0$$ となり、$\lambda=\dfrac{m}{2k}\omega^2$ を利用して

$$\omega=\sqrt{2\left(1-\cos\frac{j}{n+1}\pi\right)\cdot\frac{k}{m}}=2\sqrt{\frac{k}{m}}\ \sin\frac{j}{2n+2}\pi \quad (j=1\sim n)$$

参考文献

窪田高弘　著：力学入門、培風館、2006

手代木　琢磨：特殊な行列式の漸化式、産業能率大学紀要、 31(2), 2011, pp. 37-54

手代木　琢磨、勝間　豊：特殊な行列式と三角関数（第二報）、産業能率大学紀要、36(1), 2015, pp. 19-46

執筆者紹介（掲載順）　2016年9月現在

手代木　琢　磨	産業能率大学情報マネジメント学部　元教授
勝　間　　　豊	産業能率大学情報マネジメント学部　准教授

ご協力いただいた査読者の方々にお礼申し上げます。

産業能率大学　紀要　第37巻1号（通巻70号）
2016年９月30日　発行
編　集　産業能率大学紀要審査委員会
発　行　産業能率大学
〒158-8630　東京都世田谷区等々力6－39－15
経営学部　現代ビジネス学科
マーケティング学科
〒259-1197　神奈川県伊勢原市上粕屋1573
情報マネジメント学部
現代マネジメント学科
発行事務局　産業能率大学　自由が丘キャンパス図書館
〒158-8630　東京都世田谷区等々力6－39－15
ＴＥＬ　03（3704）7653
印　刷　渡辺印刷株式会社
〒152-0031　東京都目黒区中根2-7-1
ＴＥＬ　03（3718）2161

SANNO University Bulletin

School of Information-Oriented Management
School of Management

Vol. 37 No.1 September 2016

Research Note

SANNO University