

特殊な行列式と三角関数 (第二報)

The Second Report on Special Determinants and Trigonometric
Functions

2015年 9月

手代木琢磨	Takuma Teshirogi
勝間 豊	Yutaka Katsuma

特殊な行列式と三角関数（第二報）

The Second Report on Special Determinants and Trigonometric Functions

手代木 琢磨*

Takuma Teshirogi

勝間 豊

Yutaka Katsuma

Abstract

In our previous paper, the secular equation of quantum chemistry was extended to the special determinants, which had interesting properties of trigonometric functions. In this paper, we describe the calculation of tangent and the binomial coefficient relationships.

1. 序 論

前報（手代木2011）では量子化学の単純ヒュッケル法で使われる永年方程式から誘導される二種類の行列式の応用を述べたが、現報ではこの二種類の行列式から正弦や余弦の値ばかりでなく正接の値も誘導でき、さらに二項係数の様々な関係式も誘導されることが解ったので報告する。また、これらの行列式の力学への応用についても併せて報告する。

2. 定 義

前報（1）で定義した二種類の特殊な行列式を示す。左側の行列式 $|\mathbf{X}_N|$ を第一種の行列式、右側の行列式 $|\mathbf{+X}_N|$ を第二種の行列式と呼ぶ。

特殊な行列式と三角関数（第二報）

$$\begin{array}{ll}
 |\mathbf{X}_0| = 1 & |_+\mathbf{X}_0| = 1 \\
 |\mathbf{X}_1| = x & |_+\mathbf{X}_1| = x \\
 |\mathbf{X}_3| = \begin{vmatrix} x & b & 0 \\ a & x & b \\ 0 & a & x \end{vmatrix} & |_+\mathbf{X}_3| = \begin{vmatrix} x & b & a \\ a & x & b \\ b & a & x \end{vmatrix} \\
 |\mathbf{X}_4| = \begin{vmatrix} x & b & 0 & 0 \\ a & x & b & 0 \\ 0 & a & x & b \\ 0 & 0 & a & x \end{vmatrix} & |_+\mathbf{X}_4| = \begin{vmatrix} x & b & 0 & a \\ a & x & b & 0 \\ 0 & a & x & b \\ b & 0 & a & x \end{vmatrix} \\
 |\mathbf{X}_5| = \begin{vmatrix} x & b & 0 & 0 & 0 \\ a & x & b & 0 & 0 \\ 0 & a & x & b & 0 \\ 0 & 0 & a & x & b \\ 0 & 0 & 0 & a & x \end{vmatrix} & |_+\mathbf{X}_5| = \begin{vmatrix} x & b & 0 & 0 & a \\ a & x & b & 0 & 0 \\ 0 & a & x & b & 0 \\ 0 & 0 & a & x & b \\ b & 0 & 0 & a & x \end{vmatrix} \\
 |\mathbf{X}_6| = \begin{vmatrix} x & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & x & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & x & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & x & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & x & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & x \end{vmatrix} & |_+\mathbf{X}_6| = \begin{vmatrix} x & b & 0 & 0 & 0 & a \\ a & x & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & x & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & x & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & x & b \\ b & 0 & 0 & 0 & a & x \end{vmatrix}
 \end{array}$$

まず第一種の x に関する偶数次の行列式は次のように表される。

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{X}_2| &= x^2 + (-ab) \\
 |\mathbf{X}_4| &= x^4 + 3(-ab)x^2 + (-ab)^2 \\
 |\mathbf{X}_6| &= x^6 + 5(-ab)x^4 + 6(-ab)^2x^2 + (-ab)^3 \\
 |\mathbf{X}_8| &= x^8 + 7(-ab)x^6 + 15(-ab)^2x^4 + 10(-ab)^3x^2 + (-ab)^4 \\
 |\mathbf{X}_{10}| &= x^{10} + 9(-ab)x^8 + 28(-ab)^2x^6 + 35(-ab)^3x^4 + 15(-ab)^4x^2 + (-ab)^5
 \end{aligned}$$

同様に第一種の x に関する奇数次の行列式は次のように表される。

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{X}_3| &= x^3 + 2(-ab)x \\
 |\mathbf{X}_5| &= x^5 + 4(-ab)x^3 + 3(-ab)^2x \\
 |\mathbf{X}_7| &= x^7 + 6(-ab)x^5 + 10(-ab)^2x^3 + 4(-ab)^3x \\
 |\mathbf{X}_9| &= x^9 + 8(-ab)x^7 + 21(-ab)^2x^5 + 20(-ab)^3x^3 + 5(-ab)^4x \\
 |\mathbf{X}_{11}| &= x^{11} + 10(-ab)x^9 + 36(-ab)^2x^7 + 56(-ab)^3x^5 + 35(-ab)^4x^3 + 6(-ab)^5x
 \end{aligned}$$

以上をまとめて次のように表される。

$$\begin{cases} |\mathbf{X}_{2N}| = \sum_{k=0}^N \left\{ (-ab)^k {}_{2N-k}C_k x^{2(N-k)} \right\} \\ |\mathbf{X}_{2N+1}| = \sum_{k=0}^N \left\{ (-ab)^k {}_{2N+1-k}C_k x^{2(N-k)+1} \right\} \end{cases}$$

また第二種の x に関して偶数次の行列式は次のように表される。

$$\begin{aligned} |{}_+\mathbf{X}_4| &= x^4 + 4(-ab)x^2 - (a^2 - b^2)^2 \\ |{}_+\mathbf{X}_6| &= x^6 + 6(-ab)x^4 + 9(-ab)^2 x^2 - (a^3 + b^3)^2 \\ |{}_+\mathbf{X}_8| &= x^8 + 8(-ab)x^6 + 20(-ab)^2 x^4 + 16(-ab)^3 x^2 - (a^4 - b^4)^2 \\ |{}_+\mathbf{X}_{10}| &= x^{10} + 10(-ab)x^8 + 35(-ab)^2 x^6 + 50(-ab)^3 x^4 + 25(-ab)^4 x^2 - (a^5 + b^5)^2 \\ |{}_+\mathbf{X}_{12}| &= x^{12} + 12(-ab)x^{10} + 54(-ab)^2 x^8 + 112(-ab)^3 x^6 + 105(-ab)^4 x^4 + 36(-ab)^5 x^2 - (a^6 - b^6)^2 \end{aligned}$$

同様に第二種の x に関して奇数次の行列式は次のように表される。

$$\begin{aligned} |{}_+\mathbf{X}_3| &= x^3 + 3(-ab)x + a^3 + b^3 \\ |{}_+\mathbf{X}_5| &= x^5 + 5(-ab)x^3 + 5(-ab)^2 x + a^5 + b^5 \\ |{}_+\mathbf{X}_7| &= x^7 + 7(-ab)x^5 + 14(-ab)^2 x^3 + 7(-ab)^3 x + a^7 + b^7 \\ |{}_+\mathbf{X}_9| &= x^9 + 9(-ab)x^7 + 27(-ab)^2 x^5 + 30(-ab)^3 x^3 + 9(-ab)^4 x + a^9 + b^9 \\ |{}_+\mathbf{X}_{11}| &= x^{11} + 11(-ab)x^9 + 44(-ab)^2 x^7 + 77(-ab)^3 x^5 + 55(-ab)^4 x^3 + 11(-ab)^5 x + a^{11} + b^{11} \end{aligned}$$

第一報で述べたように $\frac{d}{dx} \{ |{}_+\mathbf{X}_N| \} = N |\mathbf{X}_{N-1}|$ となるので次式が成立する、

$$\begin{cases} |{}_+\mathbf{X}_{2N}| = (2N) \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ (-ab)^k \frac{{}_{2N-1-k}C_k}{2(N-k)} x^{2(N-k)} \right\} - \left\{ a^N - (-b)^N \right\}^2 \\ |{}_+\mathbf{X}_{2N+1}| = (2N+1) \sum_{k=0}^N \left\{ (-ab)^k \frac{{}_{2N-k}C_k}{2(N-k)+1} x^{2(N-k)+1} \right\} + a^{2N+1} + b^{2N+1} \end{cases}$$

第一種の行列式の因数分解

偶数次の行列式の場合

現報では、第一種の行列式も第二種の行列式と同様に三角値を用いて因数分解できることが解ったので報告

する。偶数次の場合前報で述べた次式を利用している。ただし $ab = \gamma^2$ とおく。

$$|\mathbf{X}_{2N}| = |\mathbf{X}_N|^2 - \gamma^2 |\mathbf{X}_{2N}|^2 = \left\{ |\mathbf{X}_N| - \gamma |\mathbf{X}_{N-1}| \right\} \left\{ |\mathbf{X}_N| + \gamma |\mathbf{X}_{N-1}| \right\}$$

ただし次数の高い行列式は演繹している。

$$\begin{aligned} |\mathbf{X}_2| &= x^2 - \gamma^2 = \left(x - 2\gamma \cdot \frac{1}{2}\right) \left(x + 2\gamma \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(x - 2\gamma \cdot \cos \frac{1}{3}\pi\right) \left(x - 2\gamma \cdot \cos \frac{2}{3}\pi\right) \\ &= \left(x^2 - 4\gamma^2 \cos^2 \frac{1}{3}\pi\right) = \left(x^2 - 4\gamma^2 \cos^2 \frac{2}{3}\pi\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{X}_4| &= |\mathbf{X}_2|^2 - \gamma^2 |\mathbf{X}_1|^2 = (x^2 - \gamma^2)^2 - \gamma^2 x^2 = (x^2 - \gamma x - \gamma^2)(x^2 + \gamma x - \gamma^2) \\ &= \left(x - 2\gamma \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right) \left(x - 2\gamma \frac{1-\sqrt{5}}{4}\right) \left(x - 2\gamma \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right) \left(x - 2\gamma \frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right) \\ &= \left(x - 2\gamma \cdot \cos \frac{1}{5}\pi\right) \left(x - 2\gamma \cdot \cos \frac{3}{5}\pi\right) \left(x - 2\gamma \cdot \cos \frac{2}{5}\pi\right) \left(x - 2\gamma \cdot \cos \frac{4}{5}\pi\right) \\ &= \left(x^2 - 4\gamma^2 \cos^2 \frac{1}{5}\pi\right) \left(x^2 - 4\gamma^2 \cos^2 \frac{3}{5}\pi\right) = \left(x^2 - 4\gamma^2 \cos^2 \frac{2}{5}\pi\right) \left(x^2 - 4\gamma^2 \cos^2 \frac{4}{5}\pi\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{X}_6| &= |\mathbf{X}_3|^2 - \gamma^2 |\mathbf{X}_2|^2 = (x^3 - 2\gamma^2 x)^2 - (\gamma x^2 - \gamma^3)^2 \\ &= (x^3 - \gamma x^2 - 2\gamma^2 x + \gamma^3)(x^3 + \gamma x^2 - 2\gamma^2 x - \gamma^3) \\ &= \prod_{k=1}^3 \left(x - 2\gamma \cdot \cos \frac{2k-1}{7}\pi\right) \cdot \prod_{k=1}^3 \left(x - 2\gamma \cdot \cos \frac{2k}{7}\pi\right) \\ &= \prod_{k=1}^3 \left(x^2 - 4\gamma^2 \cdot \cos \frac{2k-1}{7}\pi\right) = \prod_{k=1}^3 \left(x^2 - 4\gamma^2 \cdot \cos \frac{2k}{7}\pi\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{X}_8| &= |\mathbf{X}_4|^2 - \gamma^2 |\mathbf{X}_3|^2 = (x^4 - 3\gamma^2 x^2 + \gamma^4)^2 - \gamma^2 (x^3 - 2\gamma^2 x)^2 \\ &= (x^4 - \gamma x^3 - 3\gamma^2 x^2 + 2\gamma^3 x + \gamma^4)(x^4 + \gamma x^3 - 3\gamma^2 x^2 - 2\gamma^3 x + \gamma^4) \\ &= (x - \gamma)(x^3 - 3\gamma^2 x - \gamma^3)(x + \gamma)(x^3 - 3\gamma^2 x + \gamma^3) \\ &= \prod_{k=1}^4 \left(x - 2\gamma \cdot \cos \frac{2k-1}{9}\pi\right) \cdot \prod_{k=1}^4 \left(x - 2\gamma \cdot \cos \frac{2k}{9}\pi\right) \\ &= \prod_{k=1}^4 \left(x^2 - 4\gamma^2 \cdot \cos \frac{2k-1}{9}\pi\right) = \prod_{k=1}^4 \left(x^2 - 4\gamma^2 \cdot \cos \frac{2k}{9}\pi\right) \end{aligned}$$

以上から次のようにまとめることができる。

$$\begin{aligned} |\mathbf{X}_{2N}| &= \prod_{k=1}^{2N} \left(x - 2\gamma \cdot \cos \frac{k}{2N+1}\pi\right) \\ &= \prod_{k=1}^N \left(x - 2\gamma \cdot \cos \frac{2k-1}{2N+1}\pi\right) \cdot \prod_{k=1}^N \left(x - 2\gamma \cdot \cos \frac{2k}{2N+1}\pi\right) \\ &= \prod_{k=1}^N \left(x^2 - 4\gamma^2 \cdot \cos^2 \frac{2k-1}{2N+1}\pi\right) = \prod_{k=1}^N \left(x^2 - 4\gamma^2 \cdot \cos^2 \frac{2k}{2N+1}\pi\right) \end{aligned}$$

また第一種の偶数次の行列式 $|\mathbf{X}_{2N}|$ は $2\gamma = 1$ において次の二個の式に分割できる。

$$\begin{aligned}
 & \prod_{k=1}^N \left(x - \cos \frac{2k-1}{2N+1} \pi \right) \\
 = & \left({}_N C_0 x^N - \frac{1}{2} \cdot {}_{N-1} C_0 x^{N-1} \right) - \frac{1}{4} \left({}_{N-1} C_1 x^{N-2} - \frac{1}{2} \cdot {}_{N-2} C_1 x^{N-3} \right) \\
 & + \frac{1}{16} \left({}_{N-2} C_2 x^{N-4} - \frac{1}{2} \cdot {}_{N-3} C_2 x^{N-5} \right) - \frac{1}{64} \left({}_{N-3} C_3 x^{N-6} - \frac{1}{2} \cdot {}_{N-4} C_3 x^{N-7} \right) + \dots \\
 = & \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor} \left\{ \left(-\frac{1}{4} \right)^k \left({}_{N-k} C_k x^{N-2k} - \frac{1}{2} \cdot {}_{N-1-k} C_k x^{N-1-2k} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \prod_{k=1}^N \left(x - \cos \frac{2k}{2N+1} \pi \right) \\
 = & \left({}_N C_0 x^N + \frac{1}{2} \cdot {}_{N-1} C_0 x^{N-1} \right) - \frac{1}{4} \left({}_{N-1} C_1 x^{N-2} + \frac{1}{2} \cdot {}_{N-2} C_1 x^{N-3} \right) \\
 & + \frac{1}{16} \left({}_{N-2} C_2 x^{N-4} + \frac{1}{2} \cdot {}_{N-3} C_2 x^{N-5} \right) - \frac{1}{64} \left({}_{N-3} C_3 x^{N-6} + \frac{1}{2} \cdot {}_{N-4} C_3 x^{N-7} \right) + \dots \\
 = & \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor} \left\{ \left(-\frac{1}{4} \right)^k \left({}_{N-k} C_k x^{N-2k} + \frac{1}{2} \cdot {}_{N-1-k} C_k x^{N-1-2k} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

以上の二式と次式とから、次の結果が得られる。

$$|\mathbf{X}_{2N}| = \prod_{k=1}^N \left(x^2 - \cos^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi \right) = \prod_{k=1}^N \left(x^2 - \cos^2 \frac{2k}{2N+1} \pi \right) = \sum_{k=0}^N \left\{ \left(-\frac{1}{4} \right)^k {}_{2N-k} C_k x^{2(N-k)} \right\}$$

$${}_{2N-k} C_k = \sum_{j=0}^k \left\{ {}_{N-j} C_j \cdot {}_{N-k+j} C_{k-j} + {}_{N-j-1} C_j \cdot {}_{N-k+j} C_{k-j-1} \right\} \quad \text{ただし } N \geq 2k \text{ とする。}$$

あらたに次の行列式 $\left| \frac{1}{\mathbf{X}_{2N}} \right|$ を定義し、 $4ab = 4\gamma^2 = 1$ とおくと、

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{1}{\mathbf{X}_{2N}} \right| &= (-4)^N x^{2N} \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & b & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ a & \frac{1}{x} & b & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & a & \frac{1}{x} & b \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & a & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{2N} \left(x - \frac{1}{\cos \frac{k}{2N+1} \pi} \right) \\
 &= \prod_{k=1}^N \left(x - \frac{1}{\cos \frac{2k-1}{2N+1} \pi} \right) \cdot \prod_{k=1}^N \left(x - \frac{1}{\cos \frac{2k}{2N+1} \pi} \right) \\
 &= \prod_{k=1}^N \left(x^2 - \frac{1}{\cos^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi} \right) = \prod_{k=1}^N \left(x^2 - \frac{1}{\cos^2 \frac{2k}{2N+1} \pi} \right) = \sum_{k=0}^N \left\{ (-4)^k {}_{N+k}C_{N-k} x^{2(N-k)} \right\}
 \end{aligned}$$

この式から $\prod_{k=1}^N \left(\tan^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi \right) = \prod_{k=1}^N \left(\tan^2 \frac{2k}{2N+1} \pi \right) = (-1)^N \sum_{k=0}^N \left\{ (-4)^k {}_{N+k}C_{N-k} \right\}$

上の式を分割して次の二式が得られる。ただし $N = 2M + j$ ($j = 0$ or 1)。

$$\begin{aligned}
 &\prod_{k=1}^{2M+j} \left(x - \frac{1}{\cos \frac{2k-1}{2(2M+j)+1} \pi} \right) \\
 &= \left({}_M C_M x^{2M+j} + (-1)^j 2 \cdot {}_{M+j} C_{M+j-1} x^{2M+j-1} \right) \\
 &\quad - 4 \left({}_{M+1} C_{M-1} x^{2M+j-2} + (-1)^j 2 \cdot {}_{M+j+1} C_{M+j-2} x^{2M+j-3} \right) \\
 &\quad + 16 \left({}_{M+2} C_{M-2} x^{2M+j-4} + (-1)^j 2 \cdot {}_{M+j+2} C_{M+j-3} x^{2M+j-5} \right) \\
 &\quad - 64 \left({}_{M+3} C_{M-3} x^{2M+j-6} + (-1)^j 2 \cdot {}_{M+j+3} C_{M+j-4} x^{2M+j-7} \right) + \dots \\
 &= \sum_{k=0} (-4)^k \left\{ {}_{M+k} C_{M-k} x^{2M+j-2k} + (-1)^j 2 \cdot {}_{M+j+k} C_{M+j-1-k} x^{2M+j-1-2k} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \prod_{k=1}^{2M+j} \left(x - \frac{1}{\cos \frac{2k}{2(2M+j)+1} \pi} \right) \\
 &= \begin{pmatrix} {}_M C_M & x^{2M+j} & -(-1)^j 2 \cdot {}_{M+j} C_{M+j-1} x^{2M+j-1} \\ -4 \begin{pmatrix} {}_{M+1} C_{M-1} & x^{2M+j-2} & -(-1)^j 2 \cdot {}_{M+j+1} C_{M+j-2} x^{2M+j-3} \end{pmatrix} \\ +16 \begin{pmatrix} {}_{M+2} C_{M-2} & x^{2M+j-4} & -(-1)^j 2 \cdot {}_{M+j+2} C_{M+j-3} x^{2M+j-5} \end{pmatrix} \\ -64 \begin{pmatrix} {}_{M+3} C_{M-3} & x^{2M+j-6} & -(-1)^j 2 \cdot {}_{M+j+3} C_{M+j-4} x^{2M+j-7} \end{pmatrix} + \dots \end{pmatrix} \\
 &= \sum_{k=0} (-4)^k \left\{ {}_{M+k} C_{M-k} x^{2M+j-2k} - (-1)^j 2 \cdot {}_{M+j+k} C_{M+j-1-k} x^{2M+j-1-2k} \right\}
 \end{aligned}$$

この二式とすでに得られた結果から、 $j=0$ の場合と $j=1$ の場合とに分けて次式が得られる。

$${}_{2M+k} C_{2M-k} = \sum_{l=0}^k \left\{ {}_{M+l} C_{M-l} \cdot {}_{M+k-l} C_{M-k+l} + {}_{M+l} C_{M-l-1} \cdot {}_{M+k-l-1} C_{M-k+l} \right\} (j=0)$$

$${}_{2M+1+k} C_{2M+1-k} = \sum_{l=0}^k \left\{ {}_{M+l} C_{M-l} \cdot {}_{M+k-l} C_{M-k+l} + {}_{M+l+1} C_{M-l} \cdot {}_{M+k-l} C_{M-k+l+1} \right\} (j=1)$$

奇 数 次 の 行 列 式 の 場 合

$$|\mathbf{X}_{2N+1}| = \sum_{k=0}^N \left\{ (-\gamma^2)^k {}_{2N+1-k} C_k x^{2(N-k)+1} \right\} \quad \text{で、}$$

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{X}_{2N+1}| &= \prod_{k=1}^{2N+1} \left(x - 2\gamma \cdot \cos \frac{k}{2N+2} \pi \right) \\
 &= x \prod_{k=1}^N \left(x - 2\gamma \cdot \cos \frac{k}{2N+2} \pi \right) \cdot \prod_{k=1}^N \left(x - 2\gamma \cdot \cos \frac{N+1+k}{2N+2} \pi \right) \\
 &= x \prod_{k=1}^N \left(x^2 - 4\gamma^2 \cos^2 \frac{k}{2N+2} \pi \right) = x \prod_{k=1}^N \left(x^2 - 4\gamma^2 \cos^2 \frac{N+1+k}{2N+2} \pi \right)
 \end{aligned}$$

なので、 $2\gamma=1$ とおいて次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned}
 & \prod_{k=1}^N \left(x^2 - \cos^2 \frac{k}{2N+2} \pi \right) = \prod_{k=1}^N \left(x^2 - \cos^2 \frac{N+1+k}{2N+2} \pi \right) \\
 &= \sum_{k=0}^N \left\{ \left(-\frac{1}{4}\right)^k {}_{2N+1-k} C_k x^{2(N-k)} \right\}
 \end{aligned}$$

あたりに次の行列式 $\begin{vmatrix} 1 \\ \mathbf{X}_{2N+1} \end{vmatrix}$ を定義し、 $4ab = 4\gamma^2 = 1$ とおくと、

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{1}{\mathbf{X}_{2N+1}} \right| &= (-4)^N x^{2N+1} \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & b & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ a & \frac{1}{x} & b & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & & & & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & a & \frac{1}{x} & b \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & a & \frac{1}{x} \end{vmatrix} \\
 &= x \prod_{k=1}^N \left(x - \frac{1}{\cos \frac{k}{2N+2} \pi} \right) \cdot \prod_{k=1}^N \left(x - \frac{1}{\cos \frac{N+1+k}{2N+2} \pi} \right) \\
 &= x \prod_{k=1}^N \left(x^2 - \frac{1}{\cos^2 \frac{k}{2N+2} \pi} \right) = x \prod_{k=1}^N \left(x^2 - \frac{1}{\cos^2 \frac{N+1+k}{2N+2} \pi} \right)
 \end{aligned}$$

この式を利用して、

$$\begin{aligned}
 \prod_{k=1}^N \left(x^2 - \frac{1}{\cos^2 \frac{k}{2N+2} \pi} \right) &= \prod_{k=1}^N \left(x^2 - \frac{1}{\cos^2 \frac{N+1+k}{2N+2} \pi} \right) \\
 &= \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \left\{ (-4)^k C_{N+1+k} x^{2(N-k)} \right\}
 \end{aligned}$$

この式に $x=1$ を代入して、

$$\prod_{k=1}^N \left(\tan^2 \frac{k}{2N+2} \pi \right) = \prod_{k=1}^N \left(\tan^2 \frac{N+1+k}{2N+2} \pi \right) = \frac{(-1)^N}{N+1} \sum_{k=0}^N \left\{ (-4)^k C_{N+1+k} \right\}$$

第二種の行列式の因数分解

偶数次の行列式の場合

前報で第二種の行列式の因数分解について述べたので、現報では新たな結論を述べる。

ただし $p = a + b$, $q = a - b$ である。 $|\mathbf{X}_{2N}|_+$ を用いて

$$(p^2)^{N-1} \prod_{k=1}^{N-1} \left(p^2 \cos^2 \frac{2k}{2N} \pi + q^2 \sin^2 \frac{2k}{2N} \pi \right) = \left\{ a^N - (-b)^N \right\}^2 \quad \text{から}$$

$$\prod_{k=1}^{N-1} \left\{ (a+b)^2 \cos^2 \frac{2k}{2N} \pi + (a-b)^2 \sin^2 \frac{2k}{2N} \pi \right\} = \left\{ \sum_{k=1}^N (-1)^{k-1} a^{N-k} b^{k-1} \right\}^2$$

$$\text{または } \prod_{k=1}^N \left\{ (a+b)^2 \cos^2 \frac{2k}{2N+2} \pi + (a-b)^2 \sin^2 \frac{2k}{2N+2} \pi \right\} = \left\{ \sum_{k=0}^N (-1)^k a^{N-k} b^k \right\}^2$$

$$\text{さらに } \left| {}_+\mathbf{X}_{2N} \right| = (2N) \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ (-ab)^k \frac{2N-1-k}{2(N-k)} C_k x^{2(N-k)} \right\} - \left\{ a^N - (-b)^N \right\}^2 \text{ に}$$

$$\left\{ a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}, ab = -\frac{1}{4} \right. \text{ を代入し次式を得る。}$$

$$\prod_{k=1}^{N-1} \left(x^2 + \sin^2 \frac{2k}{2N} \pi \right) = (2N) \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \frac{1}{4^k} \cdot \frac{2N-1-k}{2(N-k)} C_k x^{2(N-1-k)} \right\}$$

この式を応用し次式を得る。

$$\prod_{k=1}^{N-1} \left(x^2 - \frac{1}{\sin^2 \frac{2k}{2N} \pi} \right) = \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \frac{(-4)^k}{k+1} \cdot \frac{N+k}{N} C_{N-1-k} x^{2(N-1-k)} \right\}$$

$N-1$ の代わりに N を用いて次式を得る。

$$\sum_{k=1}^{N+1} \left(\sin^2 \frac{2k-1}{2N+2} \pi \right) = \sum_{k=1}^N \left(\sin^2 \frac{2k}{2N+2} \pi \right) = \frac{N+1}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{N+1} \left(\cos^2 \frac{2k-1}{2N+2} \pi \right) = \frac{N+1}{2}, \quad \sum_{k=1}^N \left(\cos^2 \frac{2k}{2N+2} \pi \right) = \frac{N-1}{2}$$

$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{2k}{2N+2} \pi} \right) = \frac{2 \cdot {}_{N+2}C_{N-1}}{N+1 C_N} = \frac{N(N+2)}{3}$$

奇数次の行列式の場合

$\left| {}_+\mathbf{X}_{2N+1} \right|$ の場合も結論だけを述べる。

$$(p) \prod_{k=1}^N \left(p^2 \cos^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi + q^2 \sin^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi \right) = a^{2N+1} + b^{2N+1} \quad \text{から}$$

$$\prod_{k=1}^N \left\{ (a+b)^2 \cos^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi + (a-b)^2 \sin^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi \right\} = \sum_{k=0}^{2N} \left\{ (-1)^k a^{2N-k} b^k \right\}$$

$$\text{さらに } \left| {}_+\mathbf{X}_{2N+1} \right| = (2N+1) \sum_{k=0}^N \left\{ (-ab)^k \frac{2N-k}{2(N-k)+1} C_k x^{2(N-k)+1} \right\} + a^{2N+1} + b^{2N+1} \text{ に}$$

特殊な行列式と三角関数（第二報）

$\left\{ a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}, ab = -\frac{1}{4} \right.$ を代入すると、前報の結果と合わせて、

$$\prod_{k=1}^N \left(x^2 + \sin^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi \right) = (2N+1) \sum_{k=0}^N \left\{ \frac{1}{4^k} \cdot \frac{2N-k}{2(N-k)+1} C_k x^{2(N-k)} \right\}$$

この式を応用し次式を得る。

$$\prod_{k=1}^N \left(x^2 - \frac{1}{\sin^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi} \right) = \sum_{k=0}^N \left\{ \frac{(-4)^k}{2k+1} \cdot {}_{N+k}C_{N-k} \cdot x^{2(N-k)} \right\}$$

この式から次式が得られる。

$$\sum_{k=1}^N \left(\sin^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi \right) = \sum_{k=1}^N \left(\sin^2 \frac{2k}{2N+1} \pi \right) = \frac{2N+1}{4}$$

$$\sum_{k=1}^N \left(\cos^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi \right) = \sum_{k=1}^N \left(\cos^2 \frac{2k}{2N+1} \pi \right) = \frac{2N-1}{4}$$

$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi} \right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{{}_{N+1}C_{N-1}}{{}_N C_N} = \frac{2N(N+1)}{3}$$

応 用

$$\prod_{k=1}^N \left(x - \cos \frac{2k-1}{2N+1} \pi \right) = \sum_{k=0}^N \left(-\frac{1}{4} \right)^k \left({}_{N-k}C_k x^{N-2k} - \frac{1}{2} {}_{N-1-k}C_k x^{N-1-2k} \right) \text{ から}$$

$$\sum_{k=1}^N \left(\cos \frac{2k-1}{2N+1} \pi \right) = \frac{1}{2} \cdot {}_{N-1}C_0 = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{j,k=1}^N \left(\cos \frac{2j-1}{2N+1} \pi \cdot \cos \frac{2k-1}{2N+1} \pi \right) = -\frac{1}{4} \cdot {}_{N-1}C_1 = -\frac{N-1}{4}$$

$$\sum_{j,k,l=1}^N \left(\cos \frac{2j-1}{2N+1} \pi \cdot \cos \frac{2k-1}{2N+1} \pi \cdot \cos \frac{2l-1}{2N+1} \pi \right) = -\frac{1}{8} \cdot {}_{N-2}C_1 = -\frac{N-2}{8}$$

などの関係式が容易に得られる。一部の結果は前報でも得られているが、現報の導入方法がより簡便である。
これらの式を利用して

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^N \left(\cos^3 \frac{2k-1}{2N+1} \pi \right) &= \left\{ \sum_{k=1}^N \left(\cos \frac{2k-1}{2N+1} \pi \right) \right\}^3 \\
 &\quad - 3 \left\{ \sum_{j,k=1}^N \left(\cos \frac{2j-1}{2N+1} \pi \cdot \cos \frac{2k-1}{2N+1} \pi \right) \right\} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^N \left(\cos \frac{2k-1}{2N+1} \pi \right) \right\} \\
 &\quad + 3 \left\{ \sum_{j,k,l=1}^N \left(\cos \frac{2j-1}{2N+1} \pi \cdot \cos \frac{2k-1}{2N+1} \pi \cdot \cos \frac{2l-1}{2N+1} \pi \right) \right\} \\
 &= \left(\frac{1}{2} \cdot {}_{N-1}C_0 \right)^3 - 3 \left(-\frac{1}{4} \cdot {}_{N-1}C_1 \right) \left(\frac{1}{2} \cdot {}_{N-1}C_0 \right) + 3 \left(-\frac{1}{8} \cdot {}_{N-2}C_1 \right) = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

上の式は $N=1$ のときは成立しないが、 $N=2$ 以上では成立する。一般に次式が成立する。

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^N \left\{ \cos^{2j-1} \frac{2k-1}{2N+1} \pi \right\} = \frac{1}{2} & (j \leq N-1) \\ \sum_{k=1}^N \left\{ \cos^{2j-1} \frac{2k-1}{2N+1} \pi \right\} < \frac{1}{2} & (j \geq N) \end{cases}$$

$$\prod_{k=1}^N \left(x^2 - \cos^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi \right) = \prod_{k=1}^N \left(x^2 - \cos^2 \frac{2k}{2N+1} \pi \right) = \sum_{k=0}^N \left\{ \left(-\frac{1}{4} \right)^k {}_{2N-k}C_k x^{2(N-k)} \right\} \quad \text{から}$$

$$\sum_{k=1}^N \left(\cos^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi \right) = \sum_{k=1}^N \left(\cos^2 \frac{2k}{2N+1} \pi \right) = \frac{1}{4} {}_{2N-1}C_1 = \frac{2N-1}{4}$$

$$\sum_{j,k=1}^N \left(\cos^2 \frac{2j-1}{2N+1} \pi \cdot \cos^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi \right) = \sum_{j,k=1}^N \left(\cos^2 \frac{2j}{2N+1} \pi \cdot \cos^2 \frac{2k}{2N+1} \pi \right) = \frac{1}{16} \cdot {}_{2N-2}C_2$$

$$\begin{aligned}
 &\sum_{j,k,l=1}^N \left(\cos^2 \frac{2j-1}{2N+1} \pi \cdot \cos^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi \cdot \cos^2 \frac{2l-1}{2N+1} \pi \right) \\
 &= \sum_{j,k,l=1}^N \left(\cos^2 \frac{2j}{2N+1} \pi \cdot \cos^2 \frac{2k}{2N+1} \pi \cdot \cos^2 \frac{2l}{2N+1} \pi \right) = \frac{1}{64} \cdot {}_{2N-3}C_3
 \end{aligned}$$

などの関係式が得られる。さらに

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^N \left(\cos^4 \frac{2k-1}{2N+1} \pi \right) &= \left\{ \sum_{k=1}^N \left(\cos^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi \right) \right\}^2 - 2 \left\{ \sum_{j,k=1}^N \left(\cos^2 \frac{2j-1}{2N+1} \pi \cdot \cos^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi \right) \right\} \\
 &= \left(\frac{1}{4} {}_{2N-1}C_1 \right)^2 - \frac{1}{8} \cdot {}_{2N-2}C_2 = \frac{6N-5}{16}
 \end{aligned}$$

また $x=1$ を代入し、前報の結果と合わせて次のように表すことができる。

$$\begin{aligned}
 & \prod_{k=1}^N \left(x^2 - \cos^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi \right) = \prod_{k=1}^N \left(1 - \cos^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi \right) = \prod_{k=1}^N \left(\sin^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi \right) \\
 & = \prod_{k=1}^N \left(x^2 - \cos^2 \frac{2k}{2N+1} \pi \right) = \prod_{k=1}^N \left(1 - \cos^2 \frac{2k}{2N+1} \pi \right) = \prod_{k=1}^N \left(\sin^2 \frac{2k}{2N+1} \pi \right) \\
 & = \prod_{k=1}^{2N} \left(\sin \frac{k}{2N+1} \pi \right) = \sum_{k=0}^N \left\{ \left(-\frac{1}{4} \right)^k {}_{2N-k} C_k \right\} = \frac{2N+1}{4^N}
 \end{aligned}$$

また、前報の結果も含めて次式が得られているので、正接の関係式が得られる。

$$\begin{aligned}
 & \prod_{k=1}^N \left(\cos^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi \right) = \prod_{k=1}^N \left(\cos^2 \frac{2k}{2N+1} \pi \right) = \frac{1}{4^N} \\
 & \prod_{k=1}^N \left(\tan^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi \right) = \prod_{k=1}^N \left(\tan^2 \frac{2k}{2N+1} \pi \right) = (-1)^N \sum_{k=0}^N \left\{ (-4)^k {}_{N+k} C_{N-k} \right\} = 2N+1
 \end{aligned}$$

また
$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi} \right) = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{2k}{2N+1} \pi} \right) = 4 \cdot {}_{N+1} C_{N-1} \quad \text{から}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi} - 1 \right) = \sum_{k=1}^N \left(\tan^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi \right) = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{2k}{2N+1} \pi} - 1 \right) = \sum_{k=1}^N \left(\tan^2 \frac{2k}{2N+1} \pi \right) \\
 & = 4 \cdot {}_{N+1} C_{N-1} - N = 4 \frac{N(N+1)}{2!} - N = N(2N+1) = \frac{2N(2N+1)}{2!} = {}_{2N+1} C_{2N-1}
 \end{aligned}$$

この式は次のようにも書くことができる。

$$\sum_{k=1}^{2N} \left(\tan^2 \frac{k}{2N+1} \pi \right) = {}_{2N+1} C_{2N-1}$$

さらに
$$\prod_{k=1}^N \left(x^2 - \cos^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi \right) = \sum_{k=0}^N \left\{ \left(-\frac{1}{4} \right)^k {}_{2N-k} C_k x^{2(N-k)} \right\}$$
 の対数を微分して、

$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{2x}{x^2 - \cos^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi} \right) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \left(-\frac{1}{4} \right)^k (k+1) {}_{2N-k} C_{k+1} x^{2(N-k)-1} \right\}}{\sum_{k=0}^N \left\{ \left(-\frac{1}{4} \right)^k {}_{2N-k} C_k x^{2(N-k)} \right\}}$$

この式に $x=1$ を代入すると次式となる。

$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi} \right) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \left(-\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{k+1}{2}\right)_{2N-k} C_{k+1} \right\}}{\sum_{k=0}^N \left\{ \left(-\frac{1}{4}\right)^k {}_{2N-k} C_k \right\}}$$

さらに $\sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi} \right) = 4 \cdot {}_{N+1} C_{N-1}$ と $\sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi} \right) = S_{2N+1}$ において

$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi} \right) + \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi} \right) = 2N(N+1) + S_{2N+1} = 4 S_{2N+1} \quad \text{から}$$

$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi} \right) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \left(-\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{k+1}{2}\right)_{2N-k} C_{k+1} \right\}}{\sum_{k=0}^N \left\{ \left(-\frac{1}{4}\right)^k {}_{2N-k} C_k \right\}} = \frac{2N(N+1)}{3} = \frac{4}{3} {}_{N+1} C_{N-1}$$

この結果は $\prod_{k=1}^N \left(x^2 - \frac{1}{\sin^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi} \right) = \sum_{k=0}^N \left\{ \frac{(-4)^k}{2k+1} \cdot {}_{N+k} C_{N-k} x^{2(N-k)} \right\}$ からも得られる

また $\prod_{k=1}^{2N} \left(\sin \frac{k}{2N+1} \pi \right) = \sum_{k=0}^N \left\{ \left(-\frac{1}{4}\right)^k {}_{2N-k} C_k \right\} = \frac{2N+1}{4^N}$ から

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \left(-\frac{1}{4}\right)^k (k+1)_{2N-k} C_{k+1} \right\} = \frac{8}{3} \cdot {}_{N+1} C_{N-1} \cdot \frac{2N+1}{4^N} = \frac{1}{4^{N-1}} \cdot \frac{N(N+1)(2N+1)}{3} \quad \text{である。}$$

全く同様に $\prod_{k=1}^N \left(x^2 - \cos^2 \frac{2k}{2N+1} \pi \right) = \sum_{k=0}^N \left\{ \left(-\frac{1}{4}\right)^k {}_{2N-k} C_k x^{2(N-k)} \right\}$ の対数を微分して、

$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{2k}{2N+1} \pi} \right) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \left(-\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{k+1}{2}\right)_{2N-k} C_{k+1} \right\}}{\sum_{k=0}^N \left\{ \left(-\frac{1}{4}\right)^k {}_{2N-k} C_k \right\}} = \frac{2N(N+1)}{3}$$

これらの式はまとめて次のように書くこともできる。

$$\sum_{k=1}^{2N} \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{k}{2N+1} \pi} \right) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \left(-\frac{1}{4}\right)^k (k+1) {}_{2N-k}C_{k+1} \right\}}{\sum_{k=0}^N \left\{ \left(-\frac{1}{4}\right)^k {}_{2N-k}C_k \right\}} = \frac{4N(N+1)}{3}$$

第一種の奇数次の行列式を利用して

$$\prod_{k=1}^N \left(x^2 - \cos^2 \frac{k}{2N+2} \pi \right) = \prod_{k=1}^N \left(x^2 - \cos^2 \frac{N+1+k}{2N+2} \pi \right) = \sum_{k=0}^N \left\{ \left(-\frac{1}{4}\right)^k {}_{2N+1-k}C_k x^{2(N-k)} \right\}$$

$$\sum_{k=1}^N \left(\cos^2 \frac{k}{2N+2} \pi \right) = \sum_{k=1}^N \left(\cos^2 \frac{N+1+k}{2N+2} \pi \right) = \frac{1}{4} {}_{2N}C_1 = \frac{N}{2}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j,k=1}^N \left(\cos^2 \frac{j}{2N+2} \pi \cdot \cos^2 \frac{k}{2N+2} \pi \right) \\ &= \sum_{j,k=1}^N \left(\cos^2 \frac{N+1+j}{2N+2} \pi \cdot \cos^2 \frac{N+1+k}{2N+2} \pi \right) = \frac{1}{16} \cdot {}_{2N-1}C_2 \\ & \sum_{j,k,l=1}^N \left(\cos^2 \frac{j}{2N+2} \pi \cdot \cos^2 \frac{k}{2N+2} \pi \cdot \cos^2 \frac{l}{2N+2} \pi \right) \\ &= \sum_{j,k,l=1}^N \left(\cos^2 \frac{N+1+j}{2N+2} \pi \cdot \cos^2 \frac{N+1+k}{2N+2} \pi \cdot \cos^2 \frac{N+1+l}{2N+2} \pi \right) = \frac{1}{64} \cdot {}_{2N-2}C_3 \end{aligned}$$

上の結果を利用して

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \left(\cos^4 \frac{k}{2N+2} \pi \right) &= \left\{ \sum_{k=1}^N \left(\cos^2 \frac{k}{2N+2} \pi \right) \right\}^2 - 2 \left\{ \sum_{j,k=1}^N \left(\cos^2 \frac{j}{2N+2} \pi \cdot \cos^2 \frac{k}{2N+2} \pi \right) \right\} \\ &= \left(\frac{N}{2} \right)^2 - \frac{1}{8} \cdot {}_{2N-1}C_2 = \frac{3N-1}{8} \end{aligned}$$

さらに、 $x=1$ を代入して

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^N \left(1 - \cos^2 \frac{k}{2N+2} \pi \right) &= \prod_{k=1}^N \left(\sin^2 \frac{k}{2N+2} \pi \right) \\ &= \prod_{k=1}^N \left(1 - \cos^2 \frac{N+1+k}{2N+2} \pi \right) = \prod_{k=1}^N \left(\sin^2 \frac{N+1+k}{2N+2} \pi \right) = \sum_{k=0}^N \left\{ \left(-\frac{1}{4}\right)^k {}_{2N+1-k}C_k \right\} \end{aligned}$$

前報の結果と合わせて $\prod_{k=1}^{2N+1} \left(\sin \frac{k}{2N+2} \pi \right) = \sum_{k=0}^N \left\{ \left(-\frac{1}{4}\right)^k {}_{2N+1-k}C_k \right\} = \frac{N+1}{4^N}$ となる。

また次式と

$$\prod_{k=1}^N \left(x^2 - \frac{1}{\cos^2 \frac{k}{2N+2} \pi} \right) = \prod_{k=1}^N \left(x^2 - \frac{1}{\cos^2 \frac{N+1+k}{2N+2} \pi} \right) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \left\{ (-4)^k {}_{N+1+k}C_{N-k} x^{2(N-k)} \right\}$$

すでに得られている次式を利用して、正接の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^N \left(\sin^2 \frac{k}{2N+2} \pi \right) &= \prod_{k=1}^N \left(\sin^2 \frac{N+1+k}{2N+2} \pi \right) \\ &= \prod_{k=1}^N \left(\cos^2 \frac{k}{2N+2} \pi \right) = \prod_{k=1}^N \left(\cos^2 \frac{N+1+k}{2N+2} \pi \right) = \sum_{k=0}^N \left\{ \left(-\frac{1}{4}\right)^k {}_{2N+1-k}C_k \right\} = \frac{N+1}{4^N} \\ \prod_{k=1}^N \left(\tan^2 \frac{k}{2N+2} \pi \right) &= \prod_{k=1}^N \left(\tan^2 \frac{N+1+k}{2N+2} \pi \right) = \frac{(-1)^N}{N+1} \sum_{k=0}^N \left\{ (-4)^k {}_{N+1+k}C_{N-k} \right\} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{さらに上式から} \quad \left\{ 1 - (-1)^N \right\} \cdot \frac{N+1}{4} = \sum_{k=1}^N \left\{ (-4)^{k-1} {}_{N+1+k}C_{N-k} \right\}$$

$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{k}{2N+2} \pi} \right) = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{N+1+k}{2N+2} \pi} \right) = \frac{4}{N+1} \cdot {}_{N+2}C_{N-1} \quad \text{から}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{k}{2N+2} \pi} - 1 \right) &= \sum_{k=1}^N \left(\tan^2 \frac{k}{2N+2} \pi \right) \\ &= \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{N+1+k}{2N+2} \pi} - 1 \right) = \sum_{k=1}^N \left(\tan^2 \frac{N+1+k}{2N+2} \pi \right) = \frac{{}_{2N+1}C_{2N-1}}{3} = \frac{N(2N+1)}{3} \end{aligned}$$

$$\text{また} \quad \prod_{k=1}^N \left(x^2 - \cos^2 \frac{k}{2N+2} \pi \right) = \sum_{k=0}^N \left\{ \left(-\frac{1}{4}\right)^k {}_{2N+1-k}C_k x^{2(N-k)} \right\} \quad \text{の対数を微分して}$$

$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{2x}{x^2 - \cos^2 \frac{k}{2N+2} \pi} \right) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \left(-\frac{1}{4}\right)^k \cdot 2(N-k) {}_{2N+1-k}C_k x^{2(N-k)-1} \right\}}{\sum_{k=0}^N \left\{ \left(-\frac{1}{4}\right)^k {}_{2N+1-k}C_k x^{2(N-k)} \right\}}$$

この式に $x=1$ を代入して

特殊な行列式と三角関数（第二報）

$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{k}{2N+2} \pi} \right) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \left(-\frac{1}{4}\right)^k (N-k) {}_{2N+1-k}C_k \right\}}{\sum_{k=0}^N \left\{ \left(-\frac{1}{4}\right)^k {}_{2N+1-k}C_k \right\}}$$

さらに $\sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{k}{2N+2} \pi} \right) + \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{k}{2N+2} \pi} \right) = \sum_{k=1}^N \left(\frac{4}{\sin^2 \frac{2k}{2N+2} \pi} \right)$ で

$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{k}{2N+2} \pi} \right) = \frac{2N(N+2)}{3}, \quad \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{2k}{2N+2} \pi} \right) = \frac{N(N+2)}{3} \quad \text{から}$$

$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{k}{2N+2} \pi} \right) = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{k}{2N+2} \pi} \right) = \frac{2N(N+2)}{3} \quad \text{となる。}$$

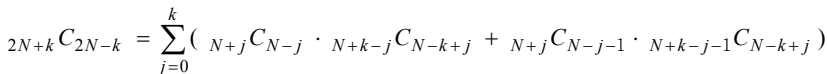
全く同様に $\sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{N+1+k}{2N+2} \pi} \right) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \left(-\frac{1}{4}\right)^k (N-k) {}_{2N+1-k}C_k \right\}}{\sum_{k=0}^N \left\{ \left(-\frac{1}{4}\right)^k {}_{2N+1-k}C_k \right\}} = \frac{2N(N+2)}{3}$ となる。

これらの式は次のように書くこともできる。

$$\sum_{k=1}^{2N+1} \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{k}{2N+2} \pi} \right) = 2 \cdot \frac{2N(N+2)}{3} + 1 = \frac{4N^2 + 8N + 3}{3} = \frac{(2N+1)(2N+3)}{3}$$

二項係数の関係式を述べる。

パスカルの三角形を下図のように描く。



$k = 1$ の場合は、頂点が上にある三角形を右側から書き、底辺の二個の係数を掛けて二倍し、さらに頂点の係数の二乗を足すと、結果は三角形の底辺の左の係数から N 個下の係数となる。

$$\left\{ {}_3C_1 \ (N=1, \ k=1) : 2 \times ({}_1C_1 \cdot {}_2C_0) + ({}_1C_0)^2 \right.$$

特殊な行列式と三角関数（第二報）

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccccc}
 & & & & {}^3C_0 & & {}^2C_1 \\
 & & & & {}^4C_0 & & {}^3C_1 & & {}^2C_2 \\
 {}_5C_3 \ (N=2, k=1) : 2 \times ({}_2C_2 \cdot {}_3C_1) + ({}_2C_1)^2 & & & & * & & * & & \\
 {}_6C_2 \ (N=2, k=2) : 2 \times ({}_2C_2 \cdot {}_4C_0 + {}_2C_1 \cdot {}_3C_0) + ({}_3C_1)^2 & & & & * & & * & & * \\
 & & & & & & * & & * \\
 & & & & {}^6C_2 & & {}^5C_3 & & *
 \end{array} \\
 \begin{array}{c}
 \left\{ \begin{array}{l}
 {}_7C_5 \ (N=3, k=1) : 2 \times ({}_3C_3 \cdot {}_4C_2) + ({}_3C_2)^2 \\
 {}_8C_4 \ (N=3, k=2) : 2 \times ({}_3C_3 \cdot {}_5C_1 + {}_3C_2 \cdot {}_4C_1) + ({}_4C_2)^2 \\
 {}_9C_3 \ (N=3, k=3) : 2 \times ({}_3C_3 \cdot {}_6C_0 + {}_3C_2 \cdot {}_5C_0 + {}_4C_2 \cdot {}_5C_1) + ({}_4C_1)^2
 \end{array} \right.
 \end{array} \\
 \begin{array}{ccccccc}
 & & & & {}^5C_0 & & {}^4C_1 & & {}^3C_2 \\
 & & & & {}^6C_0 & & {}^5C_1 & & {}^4C_2 & & {}^3C_3 \\
 & & & & * & & * & & * & & \\
 & & & * & & * & & * & & * & \\
 & & & * & & * & & * & & * & \\
 & & & * & & * & & * & & * & \\
 & & & * & & * & & * & & * & \\
 & & & * & & * & & * & & * & \\
 & & & {}^9C_3 & & {}^8C_4 & & {}^7C_5 & & * & \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 {}_9C_7 \ (N=4, k=1) : 2 \times ({}_4C_4 \cdot {}_5C_3) + ({}_4C_3)^2 \\
 {}_{10}C_6 \ (N=4, k=2) : 2 \times ({}_4C_4 \cdot {}_6C_2 + {}_4C_3 \cdot {}_5C_2) + ({}_5C_3)^2 \\
 {}_{11}C_5 \ (N=4, k=3) : 2 \times ({}_4C_4 \cdot {}_7C_1 + {}_4C_3 \cdot {}_6C_1 + {}_5C_3 \cdot {}_6C_2) + ({}_5C_2)^2 \\
 {}_{12}C_4 \ (N=4, k=4) : 2 \times ({}_4C_4 \cdot {}_8C_0 + {}_4C_3 \cdot {}_7C_0 + {}_5C_3 \cdot {}_7C_1 + {}_5C_2 \cdot {}_6C_1) + ({}_6C_2)^2
 \end{array} \right.
 \end{array} \\
 \begin{array}{ccccccc}
 & & & & {}^7C_0 & & {}^6C_1 & & {}^5C_2 & & {}^4C_3 \\
 {}^8C_0 & & {}^7C_1 & & {}^6C_2 & & {}^5C_3 & & {}^4C_4 \\
 * & & * & & * & & * & & * \\
 * & & * & & * & & * & & * \\
 * & & * & & * & & * & & * \\
 * & & * & & * & & * & & * \\
 * & & * & & * & & * & & * \\
 * & & * & & * & & * & & * \\
 * & & * & & * & & * & & * \\
 {}^{12}C_4 & & {}^{11}C_5 & & {}^{10}C_6 & & {}^9C_7 & & *
 \end{array}
 \end{array}$$

$${}_{2N+1+k}C_{2N+1-k} = \sum_{j=0}^k ({}_{N+j}C_{N-j} \cdot {}_{N+k-j}C_{N-k+j} + {}_{N+1+j}C_{N-j} \cdot {}_{N+k-j}C_{N-k+1+j})$$

この関係式は次のようにまとめることができる。

$k = 1$ の場合は、頂点が下にある三角形を右側から書き、上辺の二個の係数を掛けて二倍し、さらに頂点の係数の二乗を足すと、結果は三角形の上辺の左の点から $N+1$ 個下の係数となる。

k が 1 より大きい場合は、下辺の係数が上辺の係数より 1 個少ない台形を右側から書き、両辺の外側同士、

さらにその内側同士と掛けて行き、その和をとって二倍にし、相手のいない係数の二乗を足すと、結果は台形の上辺の左の点から $N+1$ 個下の係数となる。

$$\begin{array}{c}
 \left\{ \begin{array}{l} {}_4C_2 \ (N=1, k=1) : 2 \times ({}_1C_1 \cdot {}_2C_0) + ({}_2C_1)^2 \end{array} \right. \\
 \begin{array}{ccccccc}
 & & & {}_2C_0 & & & {}_1C_1 \\
 & & & & & {}_2C_1 & \\
 & & & * & & & * \\
 & & & & & * & \\
 & & & {}_4C_2 & & & *
 \end{array} \\
 \\
 \left\{ \begin{array}{l} {}_6C_4 \ (N=2, k=1) : 2 \times ({}_2C_2 \cdot {}_3C_1) + ({}_3C_2)^2 \\ {}_7C_3 \ (N=2, k=2) : 2 \times ({}_2C_2 \cdot {}_4C_0 + {}_3C_2 \cdot {}_4C_1) + ({}_3C_1)^2 \end{array} \right. \\
 \begin{array}{ccccccc}
 & & & {}_4C_0 & & {}_3C_1 & {}_2C_2 \\
 & & & & & {}_4C_1 & {}_3C_2 \\
 & & & * & & * & * \\
 & & & & & * & * \\
 & & & * & & * & * \\
 & & & & & * & * \\
 & & & {}_7C_3 & & {}_6C_4 & *
 \end{array} \\
 \\
 \left\{ \begin{array}{l} {}_8C_6 \ (N=3, k=1) : 2 \times ({}_3C_3 \cdot {}_4C_2) + ({}_4C_3)^2 \\ {}_9C_5 \ (N=3, k=2) : 2 \times ({}_3C_3 \cdot {}_5C_1 + {}_4C_3 \cdot {}_5C_2) + ({}_4C_2)^2 \\ {}_{10}C_4 \ (N=3, k=3) : 2 \times ({}_3C_3 \cdot {}_6C_0 + {}_4C_3 \cdot {}_6C_1 + {}_4C_2 \cdot {}_5C_1) + ({}_5C_2)^2 \end{array} \right. \\
 \begin{array}{ccccccc}
 & & & {}_6C_0 & & {}_5C_1 & {}_4C_2 & {}_3C_3 \\
 & & & & & {}_6C_1 & & {}_5C_2 & & {}_4C_3 \\
 & & & * & & * & & * & & * \\
 & & & & & * & & * & & * \\
 & & & * & & * & & * & & * \\
 & & & & & * & & * & & * \\
 & & & * & & * & & * & & * \\
 & & & & & * & & * & & * \\
 & & & {}_{10}C_4 & & {}_9C_5 & & {}_8C_6 & & *
 \end{array} \\
 \\
 \left\{ \begin{array}{l} {}_{10}C_8 \ (N=4, k=1) : 2 \times ({}_4C_4 \cdot {}_5C_3) + ({}_5C_4)^2 \\ {}_{11}C_7 \ (N=4, k=2) : 2 \times ({}_4C_4 \cdot {}_6C_2 + {}_5C_4 \cdot {}_6C_3) + ({}_5C_3)^2 \\ {}_{12}C_6 \ (N=4, k=3) : 2 \times ({}_4C_4 \cdot {}_7C_1 + {}_5C_4 \cdot {}_7C_2 + {}_5C_3 \cdot {}_6C_2) + ({}_6C_3)^2 \\ {}_{13}C_5 \ (N=4, k=4) : 2 \times ({}_4C_4 \cdot {}_8C_0 + {}_5C_4 \cdot {}_8C_1 + {}_5C_3 \cdot {}_7C_1 + {}_6C_3 \cdot {}_7C_2) + ({}_6C_2)^2 \end{array} \right.
 \end{array}$$

特殊な行列式と三角関数（第二報）

$$\begin{array}{cccccc}
 {}^8C_0 & & {}^7C_1 & & {}^6C_2 & & {}^5C_3 & & {}^4C_4 \\
 & {}^8C_1 & & {}^7C_2 & & {}^6C_3 & & {}^5C_4 & \\
 * & & * & & * & & * & & * \\
 & * & & * & & * & & * & \\
 * & & * & & * & & * & & * \\
 & * & & * & & * & & * & \\
 * & & * & & * & & * & & * \\
 & * & & * & & * & & * & \\
 * & & * & & * & & * & & * \\
 & * & & * & & * & & * & \\
 {}^{13}C_5 & & {}^{12}C_6 & & {}^{11}C_7 & & {}^{10}C_8 & & *
 \end{array}$$

$${}_{2N-k}C_k = \sum_{j=0}^k \left\{ {}_{N-j}C_j \cdot {}_{N-k+j}C_{k-j} + {}_{N-j-1}C_j \cdot {}_{N-k+j}C_{k-j-1} \right\}$$

上の関係式の場合、 N は $2k$ に等しいかあるいは大きくなければならない。 $k=1$ の場合は、三角形を左側から書き、下辺の係数を掛けて二倍し、頂点の係数の二乗を足すと ${}_{2N-1}C_1$ となる。

k が 1 より大きい場合は 上辺の係数が下辺の係数より 1 個少ない台形を左側から書き、前例と同様に外側同士、さらにその内側同士と掛けて行き、その和をとって二倍にし、相手のいない係数の二乗を足すと結果は、 ${}_{2N-1}C_1$ の隣の係数となる。

$$\left\{ {}_3C_1 \ (N=2, k=1) : 2 \times ({}_1C_1 \cdot {}_2C_0) + ({}_1C_0)^2 \right.$$

$$\begin{array}{ccc}
 & {}^1C_0 & \\
 {}^2C_0 & & {}^1C_1 \\
 & * & \\
 {}^3C_1 & & *
 \end{array}$$

$$\left\{ {}_5C_1 \ (N=3, k=1) : 2 \times ({}_2C_1 \cdot {}_3C_0) + ({}_2C_0)^2 \right.$$

$$\begin{array}{ccc}
 & {}^2C_0 & * \\
 {}^3C_0 & & {}^2C_1 \\
 * & * & * \\
 & * & * \\
 {}^5C_1 & & *
 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} {}_7C_1 \ (N=4, k=1) : 2 \times ({}_4C_0 \cdot {}_3C_1) + ({}_3C_0)^2 \\ {}_6C_2 \ (N=4, k=2) : 2 \times ({}_4C_0 \cdot {}_2C_2 + {}_3C_0 \cdot {}_2C_1) + ({}_3C_1)^2 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{cccc}
 & & {}^3C_0 & {}^2C_1 \\
 & {}^4C_0 & & {}^3C_1 & {}^2C_2 \\
 & * & * & * & * \\
 * & * & * & * & * \\
 & * & * & * & * \\
 {}^7C_1 & {}^6C_2 & & * & *
 \end{array}$$

$$\begin{cases} {}_9C_1 \ (N=5, \ k=1) : 2 \times ({}_5C_0 \cdot {}_4C_1) + ({}_4C_0)^2 \\ {}_8C_2 \ (N=5, \ k=2) : 2 \times ({}_5C_0 \cdot {}_3C_2 + {}_4C_0 \cdot {}_3C_1) + ({}_4C_1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & {}_4C_0 & & {}_3C_1 & & * \\ & & & & & & & & \\ & & & {}_5C_0 & & {}_4C_1 & & {}_3C_2 & \\ & & * & & * & & * & & * \\ & * & & * & & * & & * & \\ & & * & & * & & * & & * \\ * & & * & & * & & * & & * \\ & * & & * & & * & & * & \\ {}_9C_1 & & {}_8C_2 & & * & & * & & * \end{array}$$

$$\begin{cases} {}_{11}C_1 \ (N=6, \ k=1) : 2 \times ({}_6C_0 \cdot {}_5C_1) + ({}_5C_0)^2 \\ {}_{10}C_2 \ (N=6, \ k=2) : 2 \times ({}_6C_0 \cdot {}_4C_2 + {}_5C_0 \cdot {}_4C_1) + ({}_5C_1)^2 \\ {}_9C_3 \ (N=6, \ k=3) : 2 \times ({}_6C_0 \cdot {}_3C_3 + {}_5C_0 \cdot {}_3C_2 + {}_5C_1 \cdot {}_4C_2) + ({}_4C_1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & {}_5C_0 & & {}_4C_1 & & {}_3C_2 \\ & & & & & & & & \\ & & & {}_6C_0 & & {}_5C_1 & & {}_4C_2 & & {}_3C_3 \\ & & * & & * & & * & & * & \\ & * & & * & & * & & * & & * \\ & & * & & * & & * & & * & \\ * & & * & & * & & * & & * & \\ & * & & * & & * & & * & & * \\ {}_{11}C_1 & & {}_{10}C_2 & & {}_9C_3 & & * & & * & * \end{array}$$

$$\begin{cases} {}_{13}C_1 \ (N=7, \ k=1) : 2 \times ({}_7C_0 \cdot {}_6C_1) + ({}_6C_0)^2 \\ {}_{12}C_2 \ (N=7, \ k=2) : 2 \times ({}_7C_0 \cdot {}_5C_2 + {}_6C_0 \cdot {}_5C_1) + ({}_6C_1)^2 \\ {}_{11}C_3 \ (N=7, \ k=3) : 2 \times ({}_7C_0 \cdot {}_4C_3 + {}_6C_0 \cdot {}_4C_2 + {}_6C_1 \cdot {}_5C_2) + ({}_5C_1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & {}_6C_0 & & {}_5C_1 & & {}_4C_2 & & * \\ & & & & & & & & & & \\ & & & {}_7C_0 & & {}_6C_1 & & {}_5C_2 & & {}_4C_3 & \\ & & * & & * & & * & & * & & * \\ & * & & * & & * & & * & & * & \\ & & * & & * & & * & & * & & * \\ * & & * & & * & & * & & * & & * \\ & * & & * & & * & & * & & * & \\ {}_{13}C_1 & & {}_{12}C_2 & & {}_{11}C_3 & & * & & * & & * \end{array}$$

次に、第一種の行列式の物理学への応用を考える。

バネ定数、 k の等しい三本のバネと質量、 m の等しい三個のおもりを天井から、バネ～錘～バネ～錘～バネ～錘の順に下げる。この状態のそれぞれのおもりの振動を計算する。上から順に各おもりの平衡の位置か

特殊な行列式と三角関数（第二報）

らの微小の変位, その変位の時間に関する一次微分、さらにその変位の二次微分をそれぞれ次のように置くと、おもりの運動のエネルギーとバネのポテンシャルエネルギーは次のようになる。

$$\begin{cases} q_1, q_2, q_3 \\ \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3 \\ \ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ddot{q}_3 \end{cases} \quad \begin{cases} T = \frac{m}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) \\ U = \frac{k}{2} \{ q_1^2 + (q_1 - q_2)^2 + (q_2 - q_3)^2 \} \end{cases}$$

Lagrange 関数と Lagrange 方程式は次式なので、この問題に応用すると次式が得られる。

$$\begin{cases} L = T - U \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} m\ddot{q}_1 + 2kq_1 - kq_2 = 0 \\ m\ddot{q}_2 + 2kq_2 - kq_1 - kq_3 = 0 \\ m\ddot{q}_3 + kq_3 - kq_2 = 0 \end{cases}$$

$q_j = A_j \cos(\omega t + \delta)$ において Lagrange 方程式を書きなおすと

$$\begin{cases} (2k - m\omega^2) A_1 & -k & A_2 & & = 0 \\ -k & A_1 + (2k - m\omega^2) A_2 & -k & A_3 & = 0 \\ & -k & A_2 + (k - m\omega^2) A_3 & & = 0 \end{cases}$$

$\lambda = \frac{m}{2k} \omega^2$ において整理し、Cramer の式を使って得られる行列式を $|\mathbf{D}_3|$ とすると、

$$|\mathbf{D}_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1-\lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1-\lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} - \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{から}$$

右辺の第一項の行列式は $|\mathbf{X}_3|$ に、第二項の行列式は $|\mathbf{X}_2|$ に $a = b = -\frac{1}{2}$, $x = 1 - \lambda$ を代入した

行列式であり、それぞれ $|\mathbf{X}_3(1-\lambda)|$, $|\mathbf{X}_2(1-\lambda)|$ とおくと、すでに

$$\left\{ |\mathbf{X}_3(1-\lambda)| - \frac{1}{2} |\mathbf{X}_2(1-\lambda)| \right\} \left\{ |\mathbf{X}_3(1-\lambda)| + \frac{1}{2} |\mathbf{X}_2(1-\lambda)| \right\} = |\mathbf{X}_6(1-\lambda)| \quad \text{が解っているので、}$$

$$|\mathbf{D}_3| = \prod_{j=1}^3 \left\{ (1-\lambda) - \cos \frac{2j-1}{7} \pi \right\} = 0 \quad \text{となり、} \lambda = \frac{m}{2k} \omega^2 \quad \text{を利用して}$$

$$\omega = \sqrt{2 \left(1 - \cos \frac{2j-1}{7} \pi \right) \cdot \frac{k}{m}} = 2 \sin \frac{2j-1}{14} \pi \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (j = 1, 2, 3)$$

と容易に求めることができる。

なおこの問題は、清野節男 & 金山道雄 著 「力学要論」、東京図書株式会社(1963) の 221 頁に掲載されている問題を借用した。

同様に N 本のバネと N 個の錘を交互につるした系の運動は次の行列式を解けばよい。

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1-\lambda & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1-\lambda & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\frac{1}{2} & 1-\lambda & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2} & 1-\lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\lambda & 0 \end{vmatrix} = |\mathbf{D}_N| \quad \text{とすると、}$$

$$|\mathbf{D}_N| = |\mathbf{X}_N(1-\lambda)| - \frac{1}{2} |\mathbf{X}_{N-1}(1-\lambda)| \quad \text{で}$$

$$\left\{ |\mathbf{X}_N(1-\lambda)| - \frac{1}{2} |\mathbf{X}_{N-1}(1-\lambda)| \right\} \left\{ |\mathbf{X}_N(1-\lambda)| + \frac{1}{2} |\mathbf{X}_{N-1}(1-\lambda)| \right\} = |\mathbf{X}_{2N}(1-\lambda)| \quad \text{なので}$$

$$|\mathbf{D}_N| = \prod_{j=1}^N \left\{ (1-\lambda) - \cos \frac{2j-1}{2N+1} \pi \right\} = 0 \quad \text{となつて} \quad \lambda = \frac{m}{2k} \omega^2 = 1 - \cos \frac{2j-1}{2N+1} \pi \quad \text{から}$$

$$\omega = \sqrt{2 \left(1 - \cos \frac{2j-1}{2N+1} \pi \right) \cdot \frac{k}{m}} = 2 \sin \frac{2j-1}{4N+2} \pi \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (j=1, 2, \dots, N) \quad \text{となる。}$$

バネ定数 k の等しい三本のバネと、質量 m の等しい四個の錘を、錘～バネ～錘～バネ～錘～バネ～錘の順に連結し、滑らかな水平面に直線状に置く。この状態のそれぞれの錘の振動を計算する。左から順に、各錘の平衡の位置からの微小の変位、その変位の時間に関する一次微分、さらにその変位の二次微分をそれぞれ次のように置くと、錘の運動のエネルギーとバネのポテンシャルエネルギーは次のようになる。

$$\begin{cases} q_1, q_2, q_3, q_4 \\ \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dot{q}_4 \\ \ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ddot{q}_3, \ddot{q}_4 \end{cases} \quad \begin{cases} T = \frac{m}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 + \dot{q}_4^2) \\ U = \frac{k}{2} \{ (q_1 - q_2)^2 + (q_2 - q_3)^2 + (q_3 - q_4)^2 \} \end{cases}$$

各変位に関する Lagrange 方程式は次のようになる。

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 + kq_1 - kq_2 = 0 \\ m\ddot{q}_2 + 2kq_2 - kq_1 - kq_3 = 0 \\ m\ddot{q}_3 + 2kq_3 - kq_2 - kq_4 = 0 \\ m\ddot{q}_4 + kq_4 - kq_3 = 0 \end{cases}$$

$$q_j = A_j \cos(\omega t + \delta), \quad \lambda = \frac{m}{2k} \omega^2 \quad \text{において整理し、得られる Cramer の式を} \quad |\mathbf{F}_4| \quad \text{とすると}$$

特殊な行列式と三角関数（第二報）

$$\left\{ \begin{array}{llll} (k - m\omega^2) A_1 & -k & A_2 & = 0 \\ -k & A_1 + (2k - m\omega^2) A_2 & -k & A_3 = 0 \\ & -k & A_2 + (2k - m\omega^2) A_3 & -k A_4 = 0 \\ & & -k & A_3 + (k - m\omega^2) A_4 = 0 \end{array} \right.$$

$$|\mathbf{F}_4| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 - \lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 - \lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} \quad \text{とすると}$$

$$|\mathbf{F}_4| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 - \lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 - \lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 - \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 - \lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 - \lambda \end{vmatrix} + \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{F}_4| &= |\mathbf{X}_4(1 - \lambda)| - |\mathbf{X}_3(1 - \lambda)| + \frac{1}{4} |\mathbf{X}_2(1 - \lambda)| = -\lambda |\mathbf{X}_3(1 - \lambda)| = -\lambda(1 - \lambda) \left\{ (1 - \lambda)^2 - \frac{1}{2} \right\} \\ &= \left\{ (1 - \lambda) - \cos \frac{0}{4} \pi \right\} \left\{ (1 - \lambda) - \cos \frac{1}{4} \pi \right\} \left\{ (1 - \lambda) - \cos \frac{2}{4} \pi \right\} \left\{ (1 - \lambda) - \cos \frac{3}{4} \pi \right\} \\ &= \prod_{j=1}^4 \left\{ (1 - \lambda) - \cos \frac{j-1}{4} \pi \right\} = 0 \end{aligned}$$

$$\omega = \sqrt{2 \left(1 - \cos \frac{j-1}{4} \pi \right) \cdot \frac{k}{m}} = 2 \sin \frac{j-1}{8} \pi \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

同様に $N-1$ 本のバネと N 個の錘を交互に連結した系の運動は次の行列式を解けばよい。

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & & & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1-\lambda & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1-\lambda & -\frac{1}{2} & 0 & & & 0 \\ \cdot & & & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & & & \cdot \\ 0 & & & & -\frac{1}{2} & 1-\lambda & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & & & & 0 & -\frac{1}{2} & 1-\lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & & & & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} = |\mathbf{F}_N|$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{F}_N| &= |\mathbf{X}_N(1-\lambda)| - |\mathbf{X}_{N-1}(1-\lambda)| + \frac{1}{4} |\mathbf{X}_{N-2}(1-\lambda)| \\ &= -\lambda |\mathbf{X}_{N-1}(1-\lambda)| = \prod_{j=1}^N \left\{ (1-\lambda) - \cos \frac{j-1}{N} \pi \right\} \end{aligned}$$

$$\omega = \sqrt{2 \left(1 - \cos \frac{j-1}{N} \pi \right) \cdot \frac{k}{m}} = 2 \sin \frac{j-1}{2N} \pi \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (j=1, 2, \dots, N)$$

総 括

$$\begin{aligned} |\mathbf{X}_{2N}| &= \prod_{k=1}^{2N} \left(x - \cos \frac{k}{2N+1} \pi \right) = \prod_{k=1}^N \left(x^2 - \cos^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi \right) = \prod_{k=1}^N \left(x^2 - \cos^2 \frac{2k}{2N+1} \pi \right) \\ &= \sum_{k=0}^N \left\{ \left(-\frac{1}{4} \right)^k {}_{2N-k}C_k x^{2(N-k)} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{X}_{2N+1}| &= \prod_{k=1}^{2N+1} \left(x - \cos \frac{k}{2N+2} \pi \right) = x \prod_{k=1}^N \left(x^2 - \cos^2 \frac{k}{2N+2} \pi \right) \\ &= x \prod_{k=1}^N \left(x^2 - \cos^2 \frac{N+1+k}{2N+2} \pi \right) = \sum_{k=0}^N \left\{ \left(-\frac{1}{4} \right)^k {}_{2N+1-k}C_k x^{2(N-k)+1} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{2N} \left(x - \frac{1}{\cos \frac{k}{2N+1} \pi} \right) &= \prod_{k=1}^N \left(x - \frac{1}{\cos \frac{2k-1}{2N+1} \pi} \right) \prod_{k=1}^N \left(x - \frac{1}{\cos \frac{2k}{2N+1} \pi} \right) \\
&= \prod_{k=1}^N \left(x^2 - \frac{1}{\cos^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi} \right) = \prod_{k=1}^N \left(x^2 - \frac{1}{\cos^2 \frac{2k}{2N+1} \pi} \right) \\
&= \sum_{k=0}^N \left\{ (-4)^k {}_{N+k} C_{N-k} x^{2(N-k)} \right\} \\
\prod_{k=1}^N \left(x - \frac{1}{\cos \frac{k}{2N+2} \pi} \right) \prod_{k=1}^N \left(x - \frac{1}{\cos \frac{N+1+k}{2N+2} \pi} \right) \\
&= \prod_{k=1}^N \left(x^2 - \frac{1}{\cos^2 \frac{k}{2N+2} \pi} \right) = \prod_{k=1}^N \left(x^2 - \frac{1}{\cos^2 \frac{N+1+k}{2N+2} \pi} \right) \\
&= \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \left\{ (-4)^k {}_{N+1+k} C_{N-k} x^{2(N-k)} \right\} \\
\prod_{k=1}^N \left\{ (a+b)^2 \cos^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi + (a-b)^2 \sin^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi \right\} &= \sum_{k=0}^{2N} (-1)^k a^{2N-k} b^k \\
\prod_{k=1}^N \left(x^2 - \frac{1}{\sin^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi} \right) &= \sum_{k=0}^N \left\{ \frac{(-4)^k}{2k+1} \cdot {}_{N+k} C_{N-k} x^{2(N-k)} \right\} \\
\sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi} \right) &= \frac{2N(N+1)}{3} \\
\prod_{k=1}^N \left\{ (a+b)^2 \cos^2 \frac{2k}{2N+2} \pi + (a-b)^2 \sin^2 \frac{2k}{2N+2} \pi \right\} &= \left\{ \sum_{k=1}^{N+1} (-1)^{k-1} a^{N+1-k} b^{k-1} \right\}^2 \\
\prod_{k=1}^N \left(x^2 - \frac{1}{\sin^2 \frac{2k}{2N+2} \pi} \right) &= \sum_{k=0}^N \left\{ \frac{(-4)^k}{k+1} \cdot \frac{{}_{N+1+k} C_{N-k}}{N+1} x^{2(N-k)} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{2k}{2N+2} \pi} \right) &= \frac{1}{4} \left\{ \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{k}{2N+2} \pi} \right) + \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{k}{2N+2} \pi} \right) \right\} = \frac{N(N+2)}{3} \\
 \prod_{k=1}^N \left(\sin^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi \right) &= \prod_{k=1}^N \left(\sin^2 \frac{2k}{2N+1} \pi \right) = \prod_{k=1}^{2N} \left(\sin \frac{k}{2N+1} \pi \right) \\
 &= \sum_{k=0}^N \left\{ \left(-\frac{1}{4} \right)^k {}_{2N-k} C_k \right\} = \frac{2N+1}{4^N} \\
 \prod_{k=1}^N \left(\cos^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi \right) &= \prod_{k=1}^N \left(\cos^2 \frac{2k}{2N+1} \pi \right) = \frac{1}{4^N} \\
 \prod_{k=1}^N \left(\tan^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi \right) &= \prod_{k=1}^N \left(\tan^2 \frac{2k}{2N+1} \pi \right) = (-1)^N \sum_{k=0}^N \left\{ (-4)^k {}_{N+k} C_{N-k} \right\} = 2N+1 \\
 \prod_{k=1}^N \left(\sin^2 \frac{k}{2N+2} \pi \right) &= \prod_{k=1}^N \left(\sin^2 \frac{N+1+k}{2N+2} \pi \right) \\
 &= \prod_{k=1}^N \left(\cos^2 \frac{k}{2N+2} \pi \right) = \prod_{k=1}^N \left(\cos^2 \frac{N+1+k}{2N+2} \pi \right) = \sum_{k=0}^N \left\{ \left(-\frac{1}{4} \right)^k {}_{2N+1-k} C_k \right\} = \frac{N+1}{4^N} \\
 \prod_{k=1}^N \left(\tan^2 \frac{k}{2N+2} \pi \right) &= \prod_{k=1}^N \left(\tan^2 \frac{N+1+k}{2N+2} \pi \right) = \frac{(-1)^N}{N+1} \sum_{k=0}^N \left\{ (-4)^k {}_{N+1+k} C_{N-k} \right\} = 1 \\
 \sum_{k=1}^N \left(\sin^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi \right) &= \sum_{k=1}^N \left(\sin^2 \frac{2k}{2N+1} \pi \right) = \frac{2N+1}{4} \\
 \sum_{k=1}^N \left(\cos^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi \right) &= \sum_{k=1}^N \left(\cos^2 \frac{2k}{2N+1} \pi \right) = \frac{2N-1}{4} \\
 \sum_{k=1}^{N+1} \left(\sin^2 \frac{2k-1}{2N+2} \pi \right) &= \sum_{k=1}^N \left(\sin^2 \frac{2k}{2N+2} \pi \right) = \frac{N+1}{2} \\
 \sum_{k=1}^{N+1} \left(\cos^2 \frac{2k-1}{2N+2} \pi \right) &= \frac{N+1}{2} \quad , \quad \sum_{k=1}^N \left(\cos^2 \frac{2k}{2N+2} \pi \right) = \frac{N-1}{2} \\
 \sum_{k=1}^N \left(\cos^2 \frac{k}{2N+2} \pi \right) &= \sum_{k=1}^N \left(\cos^2 \frac{N+1+k}{2N+2} \pi \right) = \frac{N}{2}
 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi} \right) = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{2k}{2N+1} \pi} \right) = \frac{2N(N+1)}{3}$$

$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi} \right) = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{2k}{2N+1} \pi} \right) = 2N(N+1)$$

$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{2k}{2N+2} \pi} \right) = \frac{N(N+2)}{3}$$

$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{k}{2N+2} \pi} \right) = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\sin^2 \frac{N+1+k}{2N+2} \pi} \right) = \frac{2N(N+2)}{3}$$

$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{k}{2N+2} \pi} \right) = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{N+1+k}{2N+2} \pi} \right) = \frac{2N(N+2)}{3}$$

$$\sum_{k=1}^N \left(\tan^2 \frac{2k-1}{2N+1} \pi \right) = \sum_{k=1}^N \left(\tan^2 \frac{2k}{2N+1} \pi \right) = N(2N+1)$$

$$\sum_{k=1}^N \left(\tan^2 \frac{k}{2N+2} \pi \right) = \sum_{k=1}^N \left(\tan^2 \frac{N+1+k}{2N+2} \pi \right) = \frac{N(2N+1)}{3}$$

参考文献

清野節夫、金山道雄 共著：力学要論、東京図書、1963、p.221

手代木琢磨：特殊な行列式の漸化式、産業能率大学紀要、31 (2)、2011、pp.37-54