

特殊な行列式の漸化式

Recursion formula of special determinants

2011年 2月

手代木 琢磨 Takuma Teshirogi

特殊な行列式の漸化式

Recursion formula of special determinants

手代木 琢磨

Takuma Teshirogi

Abstract

In the simple Hückel's molecular orbital method of quantum chemistry, the qualitative electronic structure of the conjugated compounds such as butadiene or benzene is investigated by calculating the secular equation. The secular equation was extended to the special determinants, which have interesting properties of trigonometric values such as sine and cosine. This paper describes the application of the determinants.

序 論

量子化学における単純ヒュッケル法は簡単な共役分子の電子状態を定性的に説明することができるので非常によく利用されている。この計算に使われる方法が永年方程式である。この永年方程式は簡単な行列式なので、量子化学を初めて勉強する人は避けて通ることのできない計算である。この論文ではこの行列式から誘導される特殊な行列式が漸化式を作り、また正弦や余弦の値と深い関係を持つことが解ったのでここに報告する。

定義

二種類の特種な行列式を定義する。第一の行列式は次の行列式である。

$$|\mathbf{X}_0| = 1, |\mathbf{X}_1| = x, |\mathbf{X}_2| = \begin{vmatrix} x & b \\ a & x \end{vmatrix} = x^2 - ab,$$

$$|\mathbf{X}_3| = \begin{vmatrix} x & b & 0 \\ a & x & b \\ 0 & a & x \end{vmatrix} = x(x^2 - 2ab),$$

$$|\mathbf{X}_4| = \begin{vmatrix} x & b & 0 & 0 \\ a & x & b & 0 \\ 0 & a & x & b \\ 0 & 0 & a & x \end{vmatrix} = x^4 - 3abx^2 + a^2b^2,$$

$$|\mathbf{X}_5| = \begin{vmatrix} x & b & 0 & 0 & 0 \\ a & x & b & 0 & 0 \\ 0 & a & x & b & 0 \\ 0 & 0 & a & x & b \\ 0 & 0 & 0 & a & x \end{vmatrix} = x(x^2 - ab)(x^2 - 3ab)$$

$$|\mathbf{X}_6| = \begin{vmatrix} x & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & x & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & x & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & x & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & x & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & x \end{vmatrix} = x^6 - 5abx^4 + 6a^2b^2x^2 - a^3b^3$$

$$|\mathbf{X}_7| = x(x^6 - 6abx^4 + 10a^2b^2x^2 - 4a^3b^3)$$

$$|\mathbf{X}_8| = (x^2 - ab)(x^6 - 6abx^4 + 9a^2b^2x^2 - a^3b^3)$$

$$|\mathbf{X}_9| = x(x^8 - 8abx^6 + 21a^2b^2x^4 - 20a^3b^3x^2 + 5a^4b^4)$$

$$|\mathbf{X}_{10}| = x^{10} - 9abx^8 + 28a^2b^2x^6 - 35a^3b^3x^4 + 15a^4b^4x^2 - a^5b^5$$

$$|\mathbf{X}_{11}| = x(x^{10} - 10abx^8 + 36a^2b^2x^6 - 56a^3b^3x^4 + 35a^4b^4x^2 - 6a^5b^5)$$

$$|\mathbf{X}_{12}| = x^{12} - 11abx^{10} + 45a^2b^2x^8 - 84a^3b^3x^6 + 70a^4b^4x^4 - 21a^5b^5x^2 + a^6b^6$$

$$|\mathbf{X}_{13}| = x(x^{12} - 12abx^{10} + 55a^2b^2x^8 - 120a^3b^3x^6 + 126a^4b^4x^4 - 56a^5b^5x^2 + 7a^6b^6)$$

$$|\mathbf{X}_{14}| = x^{14} - 13abx^{12} + 66a^2b^2x^{10} - 165a^3b^3x^8 + 210a^4b^4x^6 - 126a^5b^5x^4 + 28a^6b^6x^2 - a^7b^7$$

$$|\mathbf{X}_{15}| = x \left\{ \begin{aligned} &x^{14} - 14abx^{12} + 78a^2b^2x^{10} - 220a^3b^3x^8 + 330a^4b^4x^6 - 252a^5b^5x^4 \\ &+ 84a^6b^6x^2 - 8a^7b^7 \end{aligned} \right\}$$

$$|\mathbf{X}_{16}| = x^{16} - 15abx^{14} + 91a^2b^2x^{12} - 286a^3b^3x^{10} + 495a^4b^4x^8 - 462a^5b^5x^6 + 210a^6b^6x^4 - 36a^7b^7x^2 + a^8b^8$$

以下同様である。

第二の行列式は次のような行列式である。

$$|+_X0| = |X_0| = 1, \quad |+_X1| = |X_1| = x, \quad |+_X2| = |X_2| = \begin{vmatrix} x & b \\ a & x \end{vmatrix} = x^2 - ab$$

$$|+_X3| = \begin{vmatrix} x & b & a \\ a & x & b \\ b & a & x \end{vmatrix} = x^3 - 3abx + a^3 + b^3$$

$$|+_X4| = \begin{vmatrix} x & b & 0 & a \\ a & x & b & 0 \\ 0 & a & x & b \\ b & 0 & a & x \end{vmatrix} = x^4 - 4abx^2 - (a^2 - b^2)^2$$

$$|+_X5| = \begin{vmatrix} x & b & 0 & 0 & a \\ a & x & b & 0 & 0 \\ 0 & a & x & b & 0 \\ 0 & 0 & a & x & b \\ b & 0 & 0 & a & x \end{vmatrix} = x^5 - 5abx^3 + 5a^2b^2x + (a^5 + b^5)$$

$$|+_X6| = \begin{vmatrix} x & b & 0 & 0 & 0 & a \\ a & x & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & x & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & x & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & x & b \\ b & 0 & 0 & 0 & a & x \end{vmatrix} = x^6 - 6abx^4 + 9a^2b^2x^2 - (a^3 + b^3)^2$$

$$|+_X7| = x^7 - 7abx^5 + 14a^2b^2x^3 - 7a^3b^3x + (a^7 + b^7)$$

$$|+_X8| = x^8 - 8abx^6 + 20a^2b^2x^4 - 16a^3b^3x^2 - (a^4 - b^4)^2$$

$$|+_X9| = x^9 - 9abx^7 + 27a^2b^2x^5 - 30a^3b^3x^3 + 9a^4b^4x + (a^9 + b^9)$$

$$|+_X10| = x^{10} - 10abx^8 + 35a^2b^2x^6 - 50a^3b^3x^4 + 25a^4b^4x^2 - (a^5 + b^5)^2$$

$$|+_X11| = x^{11} - 11abx^9 + 44a^2b^2x^7 - 77a^3b^3x^5 + 55a^4b^4x^3 - 11a^5b^5x + (a^{11} + b^{11})$$

$$|+_X12| = x^{12} - 12abx^{10} + 54a^2b^2x^8 - 112a^3b^3x^6 + 105a^4b^4x^4 - 36a^5b^5x^2 - (a^6 - b^6)^2$$

$$|+_X13| = x^{13} - 13abx^{11} + 65a^2b^2x^9 - 156a^3b^3x^7 + 182a^4b^4x^5 - 91a^5b^5x^3 + 13a^6b^6x + (a^{13} + b^{13})$$

$$|+_X14| = x^{14} - 14abx^{12} + 77a^2b^2x^{10} - 210a^3b^3x^8 + 294a^4b^4x^6 - 196a^5b^5x^4 \\ + 49a^6b^6x^2 - (a^7 + b^7)^2$$

$$|+_X15| = x^{15} - 15abx^{13} + 90a^2b^2x^{11} - 275a^3b^3x^9 + 450a^4b^4x^7 - 378a^5b^5x^5 + 140a^6b^6x^3 \\ - 15a^7b^7x + (a^{15} + b^{15})$$

$$|+_X16| = x^{16} - 16abx^{14} + 104a^2b^2x^{12} - 352a^3b^3x^{10} + 660a^4b^4x^8 - 672a^5b^5x^6 + 336a^6b^6x^4 \\ - 64a^7b^7x^2 - (a^8 - b^8)^2$$

以下同様である。因みにブタジエンおよびベンゼンの永年方程式は次の条件の場合である。

$$a = b = 1, \quad |X_4| = 0 \qquad a = b = 1, \quad |+_X6| = 0$$

行列式の性質

① まず第一の行列式について次の漸化式を得る。

$$|\mathbf{X}_N| = x|\mathbf{X}_{N-1}| - ab|\mathbf{X}_{N-2}|$$

さらに第一の行列式の一般式を次のように求める。

$$\begin{aligned} f(t) &\equiv |\mathbf{X}_0| + |\mathbf{X}_1|t + |\mathbf{X}_2|t^2 + |\mathbf{X}_3|t^3 + |\mathbf{X}_4|t^4 + \cdots + |\mathbf{X}_N|t^N + \cdots \\ (1 - xt + abt^2)f(t) &= |\mathbf{X}_0| + |\mathbf{X}_1|t - x|\mathbf{X}_0|t + \sum_{k=1}^{\infty} \{(|\mathbf{X}_{k+1}| - x|\mathbf{X}_k| + ab|\mathbf{X}_{k-1}|)t^{k+1}\} = 1 \\ \therefore f(t) &= \frac{1}{1 - xt + abt^2} \end{aligned}$$

ここで次の条件下で分母を因数分解する。

$$f(t) = \frac{1}{1 - xt + abt^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}\sin\theta} \left(\frac{1}{t - \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{ab}}} - \frac{1}{t - \frac{e^{-i\theta}}{\sqrt{ab}}} \right) \quad (x \equiv 2\sqrt{ab}\cos\theta)$$

ところが次式を利用して

$$\begin{aligned} \frac{1}{t - \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{ab}}} &= -\sum_{k=1}^{\infty} (ab)^{\frac{k}{2}} e^{-ik\theta} t^{k-1}, \quad \frac{1}{t - \frac{e^{-i\theta}}{\sqrt{ab}}} = -\sum_{k=1}^{\infty} (ab)^{\frac{k}{2}} e^{ik\theta} t^{k-1} \\ f(t) &= \frac{1}{\sin\theta} \{ \sin\theta + (\sqrt{ab}t)\sin 2\theta + \cdots + (\sqrt{ab}t)^N \sin(N+1)\theta + \cdots \} \\ \therefore |\mathbf{X}_N| &= \frac{\sin(N+1)\theta}{\sin\theta} (ab)^{\frac{N}{2}} \end{aligned}$$

一方二項定理と上の条件を利用して次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\sin(N+1)\theta}{\sin\theta} &= {}_{N+1}C_1 \cos^N \theta - {}_{N+1}C_3 \cos^{N-2} \theta \sin^2 \theta + \cdots \\ &= \cos^N \theta \{ {}_{N+1}C_1 - {}_{N+1}C_3 \tan^2 \theta + {}_{N+1}C_5 \tan^4 \theta - {}_{N+1}C_7 \tan^6 \theta + \cdots \} \\ \cos^N \theta &= (ab)^{\frac{N}{2}} \frac{x^N}{2^N} \quad \tan^2 \theta = \frac{4ab}{x^2} - 1 \\ |\mathbf{X}_N| &= \frac{x^N}{2^N} \left\{ {}_{N+1}C_1 - {}_{N+1}C_3 \left(\frac{4ab}{x^2} - 1 \right) + {}_{N+1}C_5 \left(\frac{4ab}{x^2} - 1 \right)^2 - {}_{N+1}C_7 \left(\frac{4ab}{x^2} - 1 \right)^3 + \cdots \right\} \end{aligned}$$

さらに次式を得る。

$$\begin{aligned} |\mathbf{X}_N|^2 - ab|\mathbf{X}_{N-1}|^2 &= \left\{ \frac{\sin(N+1)\theta}{\sin\theta} (ab)^{\frac{N}{2}} \right\}^2 - ab \left\{ \frac{\sin N\theta}{\sin\theta} (ab)^{\frac{N-1}{2}} \right\}^2 \\ &= \frac{\sin(2N+1)\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{\sin\theta}{\sin\theta} (ab)^{\frac{2N}{2}} = \frac{\sin(2N+1)\theta}{\sin\theta} (ab)^{\frac{2N}{2}} = |\mathbf{X}_{2N}| \end{aligned}$$

以上をまとめて

$$\begin{cases} |X_N| = x|X_{N-1}| - ab|X_{N-2}| \\ |X_N| = \frac{\sin(N+1)\theta}{\sin\theta} (ab)^{\frac{N}{2}} \quad (x = 2\sqrt{ab}\cos\theta) \\ |X_N| = \frac{x^N}{2^N} \left\{ {}_{N+1}C_1 - {}_{N+1}C_3 \left(\frac{4ab}{x^2} - 1 \right) + {}_{N+1}C_5 \left(\frac{4ab}{x^2} - 1 \right)^2 - {}_{N+1}C_7 \left(\frac{4ab}{x^2} - 1 \right)^3 + \dots \right\} \\ |X_N|^2 - ab|X_{N-1}|^2 = |X_{2N}| \end{cases}$$

② 次に第一の行列式の微分を考える。N が偶数、例えば N = 4 の場合は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}|X_4| &= \begin{vmatrix} 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & x & b & 0 \\ 0 & a & x & b \\ 0 & 0 & a & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & x & b \\ 0 & 0 & a & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & b & 0 & 0 \\ a & x & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & b & 0 & 0 \\ a & x & b & 0 \\ 0 & a & x & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x & b & 0 \\ a & x & b \\ 0 & a & x \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} x & b \\ a & x \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} x & b \\ a & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & b & 0 \\ a & x & b \\ 0 & a & x \end{vmatrix}, \\ &= 2 \{ |X_0| \cdot |X_3| + |X_1| \cdot |X_2| \} \end{aligned}$$

となるので一般に

$$\frac{d}{dx}|X_{2M}| = 2 \{ |X_0| \cdot |X_{2M-1}| + |X_1| \cdot |X_{2M-2}| + \dots + |X_{M-1}| \cdot |X_M| \}$$

N が奇数、例えば N = 5 の場合は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}|X_5| &= \begin{vmatrix} x & b & 0 & 0 \\ a & x & b & 0 \\ 0 & a & x & b \\ 0 & 0 & a & x \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} x & b & 0 \\ a & x & b \\ 0 & a & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & b \\ a & x \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x & b \\ a & x \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} x & b & 0 \\ a & x & b \\ 0 & a & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & b & 0 & 0 \\ a & x & b & 0 \\ 0 & a & x & b \\ 0 & 0 & a & x \end{vmatrix} \\ &= 2 \{ |X_0| \cdot |X_4| + |X_1| \cdot |X_3| \} + |X_2|^2 \end{aligned}$$

となるので一般に

$$\frac{d}{dx}|X_{2M-1}| = 2 \{ |X_0| \cdot |X_{2M-2}| + |X_1| \cdot |X_{2M-3}| + \dots + |X_{M-2}| \cdot |X_M| \} + |X_{M-1}|^2$$

以上をまとめると

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}|X_{2M}| = 2 \{ |X_0| \cdot |X_{2M-1}| + |X_1| \cdot |X_{2M-2}| + \dots + |X_{M-1}| \cdot |X_M| \} \\ \frac{d}{dx}|X_{2M-1}| = 2 \{ |X_0| \cdot |X_{2M-2}| + |X_1| \cdot |X_{2M-3}| + \dots + |X_{M-2}| \cdot |X_M| \} + |X_{M-1}|^2 \end{cases}$$

③ 次に第二の行列式について考察する。簡単な計算から

$$|_+ \mathbf{X}_N| = x|\mathbf{X}_{N-1}| - 2ab|\mathbf{X}_{N-2}| + (-1)^{N-1}(a^N + b^N) = |\mathbf{X}_N| - ab|\mathbf{X}_{N-2}| + (-1)^{N-1}(a^N + b^N)$$

詳しく計算すると

$$\begin{aligned} |_+ \mathbf{X}_3| &= |\mathbf{X}_3| - ab|\mathbf{X}_1| + (a^3 + b^3) \\ &= x^3 - 3abx + (a^3 + b^3) \\ |_+ \mathbf{X}_4| &= |\mathbf{X}_4| - ab|\mathbf{X}_2| - (a^4 + b^4) \\ &= x^4 - 4abx^2 - (a^2 - b^2)^2 \\ |_+ \mathbf{X}_5| &= |\mathbf{X}_5| - ab|\mathbf{X}_3| + (a^5 + b^5) \\ &= x^5 - 5abx^3 + 5a^2b^2x + (a^5 + b^5) \\ |_+ \mathbf{X}_6| &= |\mathbf{X}_6| - ab|\mathbf{X}_4| - (a^6 + b^6) \\ &= x^6 - 6abx^4 + 9a^2b^2x^2 - (a^3 + b^3)^2 \\ |_+ \mathbf{X}_7| &= |\mathbf{X}_7| - ab|\mathbf{X}_5| + (a^7 + b^7) \\ &= x^7 - 7abx^5 + 14a^2b^2x^3 - 7a^3b^3x + (a^7 + b^7) \\ |_+ \mathbf{X}_8| &= |\mathbf{X}_8| - ab|\mathbf{X}_6| - (a^8 + b^8) \\ &= x^8 - 8abx^6 + 20a^2b^2x^4 - 16a^3b^3x^2 - (a^4 - b^4)^2 \end{aligned}$$

④ 次に第二の行列式の微分を考える。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}|_+ \mathbf{X}_3| &= 3x^2 - 3ab = 3(x^2 - ab) = 3|\mathbf{X}_2| \\ \frac{d}{dx}|_+ \mathbf{X}_4| &= 4x^3 - 8abx = 4(x^3 - 2abx) = 4|\mathbf{X}_3| \\ \frac{d}{dx}|_+ \mathbf{X}_5| &= 5x^4 - 15abx^2 + 5a^2b^2 = 5(x^4 - 3abx^2 + a^2b^2) = 5|\mathbf{X}_4| \\ \frac{d}{dx}|_+ \mathbf{X}_6| &= 6x^5 - 24abx^3 + 18a^2b^2x = 6(x^5 - 4abx^3 + 3a^2b^2x) = 6|\mathbf{X}_5| \\ \frac{d}{dx}|_+ \mathbf{X}_7| &= 7x^6 - 35abx^4 + 42a^2b^2x^2 - 7a^3b^3 = 7(x^6 - 5abx^4 + 6a^2b^2x^2 - a^3b^3) = 7|\mathbf{X}_6| \\ \frac{d}{dx}|_+ \mathbf{X}_8| &= 8x^7 - 48abx^5 + 80a^2b^2x^3 - 32a^3b^3x = 8(x^7 - 6abx^5 + 10a^2b^2x^3 - 4a^3b^3x) = 8|\mathbf{X}_7| \end{aligned}$$

一般に

$$\frac{d}{dx}|_+ \mathbf{X}_N| = \frac{d}{dx}\{|\mathbf{X}_N| - ab|\mathbf{X}_{N-2}|\} = N|\mathbf{X}_{N-1}|$$

上式を積分するために上式を θ の関数に変換する。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}|_+ \mathbf{X}_N| &= \frac{d}{d\theta}|_+ \mathbf{X}_N| \cdot \frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{ab}\sin\theta} \frac{d}{d\theta}|_+ \mathbf{X}_N| = N|\mathbf{X}_{N-1}| = N(ab)^{\frac{N-1}{2}} \frac{\sin N\theta}{\sin\theta} \\ \frac{d}{d\theta}|_+ \mathbf{X}_N| &= -2N(ab)^{\frac{N}{2}} \sin N\theta \end{aligned}$$

この式を積分して積分定数を含めて次式を得る。

$$|_+ \mathbf{X}_N| = 2(ab)^{\frac{N}{2}} \cos N\theta + k_N$$

さらに二項定理と三角関数式を利用して次式を得る。

$$\cos^N \theta = (ab)^{\frac{N}{2}} \frac{x^N}{2^N} \quad \tan^2 \theta = \frac{4ab}{x^2} - 1$$

$$|_+ \mathbf{X}_N| = \frac{x^N}{2^{N-1}} \left\{ {}_N C_0 - {}_N C_2 \left(\frac{4ab}{x^2} - 1 \right) + {}_N C_4 \left(\frac{4ab}{x^2} - 1 \right)^2 - {}_N C_6 \left(\frac{4ab}{x^2} - 1 \right)^3 + \cdots \right\} + k_N$$

この式を用いて第二の行列式を計算し上段にまとめる。下段は行列式からの結果である。

$$\left\{ \begin{aligned} |_+ \mathbf{X}_3| &= \frac{x^3}{2^2} \left\{ {}_3 C_0 - {}_3 C_2 \left(\frac{4ab}{x^2} - 1 \right) \right\} + k_3 = \frac{x^3}{2^2} \left\{ 1 - \frac{12ab}{x^2} + 3 \right\} + k_3 = x^3 - 3abx + k_3 \\ |_+ \mathbf{X}_3| &= x^3 - 3abx + a^3 + b^3 \quad k_3 = (a^3 + b^3) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} |_+ \mathbf{X}_4| &= \frac{x^4}{2^3} \left\{ {}_4 C_0 - {}_4 C_2 \left(\frac{4ab}{x^2} - 1 \right) + {}_4 C_4 \left(\frac{4ab}{x^2} - 1 \right)^2 \right\} + k_4 \\ &= \frac{x^4}{2^3} \left\{ 1 - \frac{24ab}{x^2} + 6 + \frac{16(ab)^2}{x^4} - \frac{8ab}{x^2} + 1 \right\} + k_4 = x^4 - 4abx^3 + 2(ab)^2 + k_4 \\ |_+ \mathbf{X}_4| &= x^4 - 4abx^2 + 2(ab)^2 - (a^4 + b^4) \quad k_4 = -(a^4 + b^4) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} |_+ \mathbf{X}_5| &= \frac{x^5}{2^4} \left\{ {}_5 C_0 - {}_5 C_2 \left(\frac{4ab}{x^2} - 1 \right) + {}_5 C_4 \left(\frac{4ab}{x^2} - 1 \right)^2 \right\} + k_5 \\ &= \frac{x^5}{2^4} \left\{ 1 - 10 \frac{4ab}{x^2} + 10 + 5 \frac{16(ab)^2}{x^4} - 5 \frac{8ab}{x^2} + 5 \right\} + k_5 = x^5 - 5abx^3 + 5(ab)^2 x + k_5 \\ |_+ \mathbf{X}_5| &= x^5 - 5abx^3 + 5(ab)^2 x + (a^5 + b^5) \quad k_5 = (a^5 + b^5) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} |_+ \mathbf{X}_6| &= \frac{x^6}{32} \left\{ {}_6 C_0 - {}_6 C_2 \left(\frac{4ab}{x^2} - 1 \right) + {}_6 C_4 \left(\frac{4ab}{x^2} - 1 \right)^2 - {}_6 C_6 \left(\frac{4ab}{x^2} - 1 \right)^3 \right\} + k_6 \\ &= \frac{x^6}{32} \left\{ 1 - 15 \frac{4ab}{x^2} + 15 + 15 \frac{16(ab)^2}{x^4} - 15 \frac{8ab}{x^2} + 15 - \frac{64(ab)^3}{x^6} + \frac{48(ab)^2}{x^4} - \frac{12ab}{x^2} + 1 \right\} + k_6 \\ &= x^6 - 6abx^4 + 9a^2 b^2 x^2 - 2(ab)^3 + k_6 \\ |_+ \mathbf{X}_6| &= x^6 - 6abx^4 + 9a^2 b^2 x^2 - 2(ab)^3 - (a^6 + b^6) \quad k_6 = -(a^6 + b^6) \end{aligned} \right.$$

結局第二の行列式の一般式は次式となる。

$$|_+ \mathbf{X}_N| = \frac{x^N}{2^{N-1}} \left\{ {}_N C_0 - {}_N C_2 \left(\frac{4ab}{x^2} - 1 \right) + {}_N C_4 \left(\frac{4ab}{x^2} - 1 \right)^2 - {}_N C_6 \left(\frac{4ab}{x^2} - 1 \right)^3 + \cdots \right\} + (-1)^{N-1} (a^N + b^N)$$

⑤ 第二の行列式と正弦値および余弦値との関係を調べる。第二の行列式を

$$p = a + b, \quad q = a - b$$

と置いて因数分解すると

$$|_+ \mathbf{X}_3| = x^3 - 3abx + (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

$$= (x+p) \left(x - \frac{p+iq\sqrt{3}}{2} \right) \left(x - \frac{p-iq\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= (x+p) \left(x^2 - 2px \cos \frac{1}{3}\pi + p^2 \cos^2 \frac{1}{3}\pi + q^2 \sin^2 \frac{1}{3}\pi \right)$$

$$|_+ \mathbf{X}_4| = x^4 - 4abx^2 - (a^2 - b^2)^2$$

$$= (x+p)(x-p)(x+iq)(x-iq)$$

$$= (x^2 - p^2) \left(x^2 - 2px \cos \frac{2}{4}\pi + p^2 \cos^2 \frac{2}{4}\pi + q^2 \sin^2 \frac{2}{4}\pi \right)$$

$$= (x^2 - p^2) \left(x^2 - 2px \cos \frac{1}{2}\pi + p^2 \cos^2 \frac{1}{2}\pi + q^2 \sin^2 \frac{1}{2}\pi \right)$$

$$|_+ \mathbf{X}_5| = x^5 - 5abx^3 + 5a^2b^2x + (a^5 + b^5)$$

$$= (x+p) \left(x^2 - 2px \cos \frac{1}{5}\pi + p^2 \cos^2 \frac{1}{5}\pi + q^2 \sin^2 \frac{1}{5}\pi \right) \left(x^2 - 2px \cos \frac{3}{5}\pi + p^2 \cos^2 \frac{3}{5}\pi + q^2 \sin^2 \frac{3}{5}\pi \right)$$

$$|_+ \mathbf{X}_6| = x^6 - 5abx^4 + 6a^2b^2x^2 - a^3b^3 - ab(x^4 - 3abx^2 + a^2b^2) - (a^6 + b^6)$$

$$= (x^2 - p^2) \left(x^2 - 2px \cos \frac{2}{6}\pi + p^2 \cos^2 \frac{2}{6}\pi + q^2 \sin^2 \frac{2}{6}\pi \right) \left(x^2 - 2px \cos \frac{4}{6}\pi + p^2 \cos^2 \frac{4}{6}\pi + q^2 \sin^2 \frac{4}{6}\pi \right)$$

$$= (x^2 - p^2) \left(x^2 - 2px \cos \frac{1}{3}\pi + p^2 \cos^2 \frac{1}{3}\pi + q^2 \sin^2 \frac{1}{3}\pi \right) \left(x^2 - 2px \cos \frac{2}{3}\pi + p^2 \cos^2 \frac{2}{3}\pi + q^2 \sin^2 \frac{2}{3}\pi \right)$$

この議論を押し進めると

$$\begin{cases} |_+ \mathbf{X}_{2M-1}| = (x+p) \prod_{k=1}^{M-1} \left(x^2 - 2px \cos \frac{2k-1}{2M-1}\pi + p^2 \cos^2 \frac{2k-1}{2M-1}\pi + q^2 \sin^2 \frac{2k-1}{2M-1}\pi \right) \\ |_+ \mathbf{X}_{2M}| = (x^2 - p^2) \prod_{k=1}^{M-1} \left(x^2 - 2px \cos \frac{2k}{2M}\pi + p^2 \cos^2 \frac{2k}{2M}\pi + q^2 \sin^2 \frac{2k}{2M}\pi \right) \\ \quad = (x^2 - p^2) \prod_{k=1}^{M-1} \left(x^2 - 2px \cos \frac{k}{M}\pi + p^2 \cos^2 \frac{k}{M}\pi + q^2 \sin^2 \frac{k}{M}\pi \right) \end{cases}$$

例えばベンゼンの永年方程式の解は作図でも得られることが知られている。デカルト座標上に原点を中心とする半径1の円を描き、さらにその円に内接する正六角形を(1, 0)を出発点として描けば円と正六角形との交点のX座標が解となる。すなわち次の値である、

$$1, \cos \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}, \cos \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}, \cos \frac{3}{3}\pi = -1, \cos \frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2}, \cos \frac{5}{3}\pi = \frac{1}{2}$$

本論文の第二の行列式でも同じような解を得ることができた。ただしデカルト座標ではなくガウス座標が必要である。

行列式の応用

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad |{}_+\mathbf{X}_3| &= \begin{vmatrix} x & b & a \\ a & x & b \\ b & a & x \end{vmatrix} = x^3 - 3abx + a^3 + b^3 \\ &= \begin{vmatrix} x & -\beta & -\alpha \\ -\alpha & x & -\beta \\ -\beta & -\alpha & x \end{vmatrix} = x^3 - 3\alpha\beta x - (\alpha^3 + \beta^3) \end{aligned}$$

ただし次式を利用した。

$$a = -\alpha, \quad b = -\beta$$

この式の右辺は三次方程式を代数的に解くときの有名な式である。ところがすでに解は求まっている。ただし次式を利用する。

$$\begin{aligned} &(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0 \\ &x^3-3\alpha\beta x-(\alpha^3+\beta^3) \\ &= \left\{x-(\alpha+\beta)\right\} \left\{x+\frac{\alpha+\beta}{2}+i\frac{\alpha-\beta}{2}\sqrt{3}\right\} \left\{x+\frac{\alpha+\beta}{2}-i\frac{\alpha-\beta}{2}\sqrt{3}\right\} \\ &= \left\{x-(\alpha+\beta)\right\} \left\{x-\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\alpha+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\beta\right)\right\} \left\{x-\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\alpha+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\beta\right)\right\} \\ &= \left\{x-(\alpha+\beta)\right\} \left\{x-(\omega\alpha+\omega^2\beta)\right\} \left\{x-(\omega^2\alpha+\omega\beta)\right\} \end{aligned}$$

② 新しい行列式を定義する。

$$|{}_+\mathbf{X}_3| = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ Z & X & Y \\ Y & Z & X \end{vmatrix} \equiv |\mathbf{D}|, \quad (x=X, a=Z, b=Y)$$

因数分解を行えば

$$|\mathbf{D}| = X^3 + Y^3 + Z^3 - 3XYX = (X+Y+Z)(X^2+Y^2+Z^2-XY-YZ-ZX)$$

偏微分を行えば

$$\frac{\partial}{\partial X}|\mathbf{D}| + \frac{\partial}{\partial Y}|\mathbf{D}| + \frac{\partial}{\partial Z}|\mathbf{D}| = 3 \left(\begin{vmatrix} X & Y \\ Z & X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} Y & Z \\ X & Y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} Z & X \\ Y & Z \end{vmatrix} \right) = 3 \begin{vmatrix} 1 & Y & Z \\ 1 & X & Y \\ 1 & Z & X \end{vmatrix}$$

③ さらに第二の行列式を利用して正弦値および余弦値を計算する。ただし第二の行列式を次のように表し、また和の記号を次のように定義する。

$$|{}_+\mathbf{X}_{2N-1}|, \quad \prod_{i,j,k=1}^3 \alpha_{2i-1} \alpha_{2j-1} \beta_{2k-1} \quad (i, j, k=1, 2, 3, i \neq j \neq k)$$

第二の行列式の $N=4$ の場合、 α 、 β を次のように定義する。

$$\alpha_{2k-1} = p \cos \frac{2k-1}{7} \pi, \quad \beta_{2k-1} = p^2 \cos^2 \frac{2k-1}{7} \pi + q^2 \sin^2 \frac{2k-1}{7} \pi \quad (k=1, 2, 3)$$

$$\begin{aligned}
 |{}_+ \mathbf{X}_7| &= x^7 - 7abx^5 + 14a^2b^2x^3 - 7a^3b^3x + (a^7 + b^7) \\
 &= (x+p) \prod_{k=1}^3 (x^2 - 2\alpha_{2k-1}x + \beta_{2k-1}) \\
 &= (x+p) \left\{ \begin{aligned} &x^6 - 2 \sum_{k=1}^3 \alpha_{2k-1}x^5 + \left(\sum_{k=1}^3 \beta_{2k-1} + 4 \sum_{j=1}^3 \alpha_{2j-1} \alpha_{2k-1} \right) x^4 \\ &- \left(p \sum_{k=1}^3 \beta_{2k-1} - 2 \sum_{k=1}^3 \alpha_{2k-1} \beta_{2k-1} + 8\alpha_1 \alpha_3 \alpha_5 \right) x^3 \\ &+ \left(p \sum_{j=1}^3 \beta_{2j-1} \beta_{2k-1} + 4 \prod_{i=1}^3 \alpha_{2i-1} \alpha_{2j-1} \beta_{2k-1} \right) x^2 \\ &- 2 \prod_{i=1}^3 \alpha_{2i-1} \beta_{2j-1} \beta_{2k-1} x + \beta_1 \beta_3 \beta_5 \end{aligned} \right\} \\
 &= x^7 + (p - 2 \sum_{k=1}^3 \alpha_{2k-1})x^6 + \left(\sum_{k=1}^3 \beta_{2k-1} + 4 \sum_{j=1}^3 \alpha_{2j-1} \alpha_{2k-1} - p^2 \right) x^5 \\
 &\quad + \left(2 \sum_{k=1}^3 \alpha_{2k-1} \beta_{2k-1} - 8\alpha_1 \alpha_3 \alpha_5 + 4p \sum_{j=1}^3 \alpha_{2j-1} \alpha_{2k-1} \right) x^4 \\
 &\quad + \left(\prod_{j=1}^3 \beta_{2j-1} \beta_{2k-1} + 4 \prod_{i=1}^3 \alpha_{2i-1} \alpha_{2j-1} \beta_{2k-1} - p^2 \sum_{k=1}^3 \beta_{2k-1} + 2p \sum_{k=1}^3 \alpha_{2k-1} \beta_{2k-1} - 8p\alpha_1 \alpha_3 \alpha_5 \right) x^3 \\
 &\quad + \left(p \prod_{j=1}^3 \beta_{2j-1} \beta_{2k-1} + 4p \prod_{i=1}^3 \alpha_{2i-1} \alpha_{2j-1} \beta_{2k-1} - 2 \prod_{i=1}^3 \alpha_{2i-1} \beta_{2j-1} \beta_{2k-1} \right) x^2 \\
 &\quad - \left(2p \prod_{i=1}^3 \alpha_{2i-1} \beta_{2j-1} \beta_{2k-1} - \beta_1 \beta_3 \beta_5 \right) x + p\beta_1 \beta_3 \beta_5
 \end{aligned}$$

ただし x^6 の係数が 0 なので結果として得られる次式をあらかじめ利用した。

$$\cos \frac{1}{7}\pi + \cos \frac{3}{7}\pi + \cos \frac{5}{7}\pi = \frac{1}{2}$$

このことは第二の行列式において一般に成立するので

$$\sum_{k=1}^{N-1} \cos \frac{2k-1}{2N-1} \pi = \frac{1}{2}$$

x^5 の項の係数を比較して次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{k=1}^3 \beta_{2k-1} + 4 \sum_{j=1}^3 \alpha_{2j-1} \alpha_{2k-1} - p^2 \right) &= -7ab = \frac{-7p^2 + 7q^2}{4} \\
 \sum_{k=1}^3 \beta_{2k-1} &= p^2 \left(\cos^2 \frac{1}{7}\pi + \cos^2 \frac{3}{7}\pi + \cos^2 \frac{5}{7}\pi \right) + q^2 \left(\sin^2 \frac{1}{7}\pi + \sin^2 \frac{3}{7}\pi + \sin^2 \frac{5}{7}\pi \right) \\
 \sin^2 \frac{1}{7}\pi + \sin^2 \frac{3}{7}\pi + \sin^2 \frac{5}{7}\pi &= \frac{7}{4}, \quad \cos^2 \frac{1}{7}\pi + \cos^2 \frac{3}{7}\pi + \cos^2 \frac{5}{7}\pi = \frac{5}{4}
 \end{aligned}$$

ここから第二の行列式の x^{2N-3} の項の係数を考慮して正弦値の一般式が得られる。

$$\begin{aligned}
 -(2N-1) \frac{p^2 - q^2}{4} \\
 \sum_{k=1}^{N-1} \sin^2 \frac{2k-1}{2N-1} \pi = \frac{2N-1}{4}
 \end{aligned}$$

さらに正弦値と余弦値の和が $N-1$ となることから

$$\sum_{k=1}^{N-1} \cos^2 \frac{2k-1}{2N-1} \pi = \frac{2N-3}{4}$$

また次式を利用して別の一般的な関係式が得られる。

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{N-1} \cos \frac{2k-1}{2N-1} \pi \right)^2 &= \sum_{k=1}^{N-1} \cos^2 \frac{2k-1}{2N-1} \pi + 2 \sum_{j=1}^{N-1} \cos \frac{2j-1}{2N-1} \pi \cos \frac{2k-1}{2N-1} \pi \\ \sum_{j=1}^{N-1} \cos \frac{2j-1}{2N-1} \pi \cos \frac{2k-1}{2N-1} \pi &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^2 - \frac{2N-3}{4} \right\} = \frac{2-N}{4} \end{aligned}$$

$N=4$ の場合は次のようになる。

$$\cos \frac{1}{7} \pi \cos \frac{3}{7} \pi + \cos \frac{3}{7} \pi \cos \frac{5}{7} \pi + \cos \frac{5}{7} \pi \cos \frac{1}{7} \pi = -\frac{1}{2}$$

x^4 の項の係数を考慮して別の結果が得られる。

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=1}^3 \alpha_{2k-1} \beta_{2k-1} - 8 \alpha_1 \alpha_3 \alpha_5 + 4p \sum_{j=1}^3 \alpha_{2j-1} \alpha_{2k-1} &= 2(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_3 \beta_3 + \alpha_5 \beta_5) - 8 \alpha_1 \alpha_3 \alpha_5 - 2p^3 = 0 \\ \cos \frac{1}{7} \pi \sin^2 \frac{1}{7} \pi + \cos \frac{3}{7} \pi \sin^2 \frac{3}{7} \pi + \cos \frac{5}{7} \pi \sin^2 \frac{5}{7} \pi \\ &= \cos \frac{1}{7} \pi \left(1 - \cos^2 \frac{1}{7} \pi \right) + \cos \frac{3}{7} \pi \left(1 - \cos^2 \frac{3}{7} \pi \right) + \cos \frac{5}{7} \pi \left(1 - \cos^2 \frac{5}{7} \pi \right) \\ &= \cos \frac{1}{7} \pi + \cos \frac{3}{7} \pi + \cos \frac{5}{7} \pi - \left(\cos^3 \frac{1}{7} \pi + \cos^3 \frac{3}{7} \pi + \cos^3 \frac{5}{7} \pi \right) = 0 \end{aligned}$$

このことは一般に言えるので、次の 2 式が得られる。

$$\sum_{k=1}^{N-1} \cos \frac{2k-1}{2N-1} \pi \sin^2 \frac{2k-1}{2N-1} \pi = 0 \quad \sum_{k=1}^{N-1} \cos^3 \frac{2k-1}{2N-1} \pi = \frac{1}{2}$$

さらに余弦値の積の一般式も得られる。

$$\cos^3 \frac{1}{7} \pi + \cos^3 \frac{3}{7} \pi + \cos^3 \frac{5}{7} \pi - 1 - 4 \cos \frac{1}{7} \pi \cos \frac{3}{7} \pi \cos \frac{5}{7} \pi = 0 \quad \cos \frac{1}{7} \pi \cos \frac{3}{7} \pi \cos \frac{5}{7} \pi = -\frac{1}{8}$$

$$\prod_{k=1}^{N-1} \cos \frac{2k-1}{2N-1} \pi = \pm \left(\frac{1}{2} \right)^{N-1}$$

x^3 の項の係数を利用して正弦値の一般式が得られる。

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^3 \beta_{2j-1} \beta_{2k-1} + 4 \prod_{i=1}^3 \alpha_{2i-1} \alpha_{2j-1} \beta_{2k-1} - p^2 \sum_{k=1}^3 \beta_{2k-1} + 2p \sum_{k=1}^3 \alpha_{2k-1} \beta_{2k-1} - 8p \alpha_1 \alpha_3 \alpha_5 \\ &= (\beta_1 \beta_3 + \beta_3 \beta_5 + \beta_5 \beta_1) + 4(\alpha_1 \alpha_3 \beta_5 + \alpha_1 \beta_3 \alpha_5 + \beta_1 \alpha_3 \alpha_5) - \frac{5}{4} p^4 - \frac{7}{4} p^2 q^2 + p^4 + p^4 \\ &= (\beta_1 \beta_3 + \beta_3 \beta_5 + \beta_5 \beta_1) + 4(\alpha_1 \alpha_3 \beta_5 + \alpha_1 \beta_3 \alpha_5 + \beta_1 \alpha_3 \alpha_5) + \frac{3}{4} p^4 - \frac{7}{4} p^2 q^2 = \frac{7}{8} (p^4 - 2p^2 q^2 + q^4) \\ \sin^2 \frac{1}{7} \pi \sin^2 \frac{3}{7} \pi + \sin^2 \frac{3}{7} \pi \sin^2 \frac{5}{7} \pi + \sin^2 \frac{5}{7} \pi \sin^2 \frac{1}{7} \pi &= \frac{7}{8} \end{aligned}$$

一般に x^{2N-5} の項の係数とそこから得られる一般式を下に示す。

$$\begin{aligned} & \frac{(2N-1)(N-2)p^4 - 2q^2p^2 + q^4}{16} \\ & \sum_{k=1}^{N-1} \sin^2 \frac{2j-1}{2N-1} \pi \sin^2 \frac{2k-1}{2N-1} \pi = \frac{(2N-1)(N-2)}{16} \\ & \sum_{k=1}^{N-1} \sin^4 \frac{2k-1}{2N-1} \pi = \left(\sum_{k=1}^{N-1} \sin^2 \frac{2k-1}{2N-1} \pi \right)^2 - 2 \sum_{k=1}^{N-1} \sin^2 \frac{2j-1}{2N-1} \pi \sin^2 \frac{2k-1}{2N-1} \pi \\ & = \left(\frac{2N-1}{4} \right)^2 - 2 \frac{(2N-1)(N-2)}{16} = \frac{3((2N-1))}{16} \end{aligned}$$

さらに上式から新しい一般式を得る。

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{N-1} \sin^4 \frac{2k-1}{2N-1} \pi = \sum_{k=1}^{N-1} \left(1 - \cos^2 \frac{2k-1}{2N-1} \pi \right)^2 = (N-1) - 2 \sum_{k=1}^{N-1} \cos^2 \frac{2k-1}{2N-1} \pi + \sum_{k=1}^{N-1} \cos^4 \frac{2k-1}{2N-1} \pi \\ & \sum_{k=1}^{N-1} \cos^4 \frac{2k-1}{2N-1} \pi = \frac{3((2N-1))}{16} + 2 \frac{2N-3}{4} - (N-1) = \frac{6N-11}{16} \\ & \sum_{k=1}^{N-1} \cos^4 \frac{2k-1}{2N-1} \pi = \left(\sum_{k=1}^{N-1} \cos^2 \frac{2k-1}{2N-1} \pi \right)^2 - 2 \sum_{k=1}^{N-1} \cos^2 \frac{2j-1}{2N-1} \pi \cos^2 \frac{2k-1}{2N-1} \pi \\ & \sum_{k=1}^{N-1} \cos^2 \frac{2j-1}{2N-1} \pi \cos^2 \frac{2k-1}{2N-1} \pi = \frac{1}{2} \left\{ \left(\sum_{k=1}^{N-1} \cos^2 \frac{2k-1}{2N-1} \pi \right)^2 - \sum_{k=1}^{N-1} \cos^4 \frac{2k-1}{2N-1} \pi \right\} \\ & = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{2N-3}{4} \right)^2 - \left(\frac{6N-11}{16} \right) \right\} = \frac{(2N-5)(N-2)}{16} \end{aligned}$$

定数項を利用してさらに新しい一般式を得る。

$$\begin{aligned} a^7 + b^7 &= \left(\frac{p+q}{2} \right)^7 + \left(\frac{p-q}{2} \right)^7 = \frac{p^7 + 21p^5q^2 + 35p^3q^4 + 7pq^6}{2^6} \\ \cos^2 \frac{1}{7} \pi \cos^2 \frac{3}{7} \pi \cos^2 \frac{5}{7} \pi &= \frac{1}{2^6} \\ \sin^2 \frac{1}{7} \pi \sin^2 \frac{3}{7} \pi \sin^2 \frac{5}{7} \pi &= \frac{7}{2^6} \end{aligned}$$

このことは一般に成立するので

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{N-1} \cos^2 \frac{2k-1}{2N-1} \pi &= \frac{1}{2^{2N-2}} \\ \prod_{k=1}^{N-1} \sin^2 \frac{2k-1}{2N-1} \pi &= \frac{2N-1}{2^{2N-2}} \end{aligned}$$

以上をまとめて

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_{k=1}^{N-1} \cos \frac{2k-1}{2N-1} \pi = \frac{1}{2} & \sum_{k=1}^{N-1} \sin^2 \frac{2k-1}{2N-1} \pi = \frac{2N-1}{4} \\ \sum_{k=1}^{N-1} \cos^2 \frac{2k-1}{2N-1} \pi = \frac{2N-3}{4} & \\ \sum_{k=1}^{N-1} \cos \frac{2j-1}{2N-1} \pi \cos \frac{2k-1}{2N-1} \pi = \frac{2-N}{4} & \sum_{k=1}^{N-1} \cos \frac{2k-1}{2N-1} \pi \sin^2 \frac{2k-1}{2N-1} \pi = 0 \\ \sum_{k=1}^{N-1} \cos^3 \frac{2k-1}{2N-1} \pi = \frac{1}{2} & \\ \sum_{k=1}^{N-1} \cos^2 \frac{2j-1}{2N-1} \pi \cos^2 \frac{2k-1}{2N-1} \pi = \frac{(2N-5)(N-2)}{16} & \sum_{k=1}^{N-1} \sin^2 \frac{2j-1}{2N-1} \pi \sin^2 \frac{2k-1}{2N-1} \pi = \frac{(2N-1)(N-2)}{16} \\ \sum_{k=1}^{N-1} \cos^4 \frac{2k-1}{2N-1} \pi = \frac{6N-11}{16} & \sum_{k=1}^{N-1} \sin^4 \frac{2k-1}{2N-1} \pi = \frac{6N-3}{16} \\ \prod_{k=1}^{N-1} \cos^2 \frac{2k-1}{2N-1} \pi = \frac{1}{2^{2N-2}} & \prod_{k=1}^{N-1} \sin^2 \frac{2k-1}{2N-1} \pi = \frac{2N-1}{2^{2N-2}} \end{array} \right.$$

また加法定理を利用して

$$\cos \frac{2k-1}{2N-1} \pi = \cos \left\{ \frac{2N-1-2(N-k)}{2N-1} \pi \right\} = \cos \left\{ \pi - \frac{2(N-k)}{2N-1} \pi \right\} = -\cos \left\{ \frac{2(N-k)}{2N-1} \pi \right\}$$

以上をまとめて

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_{k=1}^{N-1} \cos \frac{2k}{2N-1} \pi = -\frac{1}{2} & \sum_{k=1}^{N-1} \sin^2 \frac{2k}{2N-1} \pi = \frac{2N-1}{4} \\ \sum_{k=1}^{N-1} \cos^2 \frac{2k}{2N-1} \pi = \frac{2N-3}{4} & \\ \sum_{k=1}^{N-1} \cos \frac{2j}{2N-1} \pi \cos \frac{2k}{2N-1} \pi = \frac{2-N}{4} & \sum_{k=1}^{N-1} \cos \frac{2k}{2N-1} \pi \sin^2 \frac{2k}{2N-1} \pi = 0 \\ \sum_{k=1}^{N-1} \cos^3 \frac{2k}{2N-1} \pi = -\frac{1}{2} & \\ \sum_{k=1}^{N-1} \cos^2 \frac{2j}{2N-1} \pi \cos^2 \frac{2k}{2N-1} \pi = \frac{(2N-5)(N-2)}{16} & \sum_{k=1}^{N-1} \sin^2 \frac{2j}{2N-1} \pi \sin^2 \frac{2k}{2N-1} \pi = \frac{(2N-1)(N-2)}{16} \\ \sum_{k=1}^{N-1} \cos^4 \frac{2k}{2N-1} \pi = \frac{6N-11}{16} & \sum_{k=1}^{N-1} \sin^4 \frac{2k}{2N-1} \pi = \frac{6N-3}{16} \\ \prod_{k=1}^{N-1} \cos^2 \frac{2k}{2N-1} \pi = \frac{1}{2^{2N-2}} & \prod_{k=1}^{N-1} \sin^2 \frac{2k}{2N-1} \pi = \frac{2N-1}{2^{2N-2}} \end{array} \right.$$

特殊な行列式の漸化式

次に第二の行列式が偶数の場合の代表として $N=8$ の α 、 β を次のように定義する。

$$\begin{aligned}
 & |{}_+ \mathbf{X}_{2N}| \\
 & \left\{ \alpha_{2k} = p \cos \frac{2k}{16} \pi = p \cos \frac{k}{8} \pi \quad \beta_{2k} = p^2 \cos^2 \frac{2k}{16} \pi + q^2 \sin^2 \frac{2k}{16} \pi = p^2 \cos^2 \frac{k}{8} \pi + q^2 \sin^2 \frac{k}{8} \pi \right. \\
 & |{}_+ \mathbf{X}_{16}| = x^{16} - 16abx^{14} + 104a^2b^2x^{12} - 352a^3b^3x^{10} + 660a^4b^4x^8 - 672a^5b^5x^6 \\
 & \quad + 336a^6b^6x^4 - 64a^7b^7x^2 - (a^8 - b^8)^2 \\
 & = (x^2 - p^2) \prod_{k=1}^7 (x^2 - 2\alpha_{2k}x + \beta_{2k}) \\
 & = (x^2 - p^2) \left\{ \begin{aligned} & x^{14} - 2 \sum_{k=1}^7 \alpha_{2k} x^{13} + \left(\sum_{k=1}^7 \beta_{2k} + 4 \sum_{j=1}^7 \alpha_{2j} \alpha_{2k} \right) x^{12} \\ & + 2 \left(\sum_{k=1}^7 \alpha_{2k} \beta_{2k} - 4 \sum_{2l} \alpha_{2l} \alpha_{2j} \alpha_{2k} \right) x^{11} + \\ & + \left(\sum_{j=1}^7 \beta_{2j} \beta_{2k} + 4 \sum_{2l} \alpha_{2l} \alpha_{2j} \beta_{2k} + 16 \sum_{2l} \alpha_{2l} \alpha_{2j} \alpha_{2k} \alpha_{2l} \right) x^{10} \\ & + \cdots + \prod_{k=1}^7 \beta_{2k} \end{aligned} \right\} \\
 & = x^{16} - 2 \sum_{k=1}^7 \alpha_{2k} x^{15} + \left(\sum_{k=1}^7 \beta_{2k} + 4 \sum_{j=1}^7 \alpha_{2j} \alpha_{2k} - p^2 \right) x^{14} \\
 & \quad + 2 \left(\sum_{k=1}^7 \alpha_{2k} \beta_{2k} - 4 \sum_{2l} \alpha_{2l} \alpha_{2j} \alpha_{2k} - p^2 \sum_{k=1}^7 \alpha_{2k} \right) x^{13} + \\
 & \quad + \left(\sum_{j=1}^7 \beta_{2j} \beta_{2k} + 4 \sum_{2l} \alpha_{2l} \alpha_{2j} \beta_{2k} + 16 \sum_{2l} \alpha_{2l} \alpha_{2j} \alpha_{2k} \alpha_{2l} - p^2 \sum_{k=1}^7 \beta_{2k} - 4p^2 \sum_{j=1}^7 \alpha_{2j} \alpha_{2k} \right) x^{12} \\
 & \quad + \cdots - p^2 \prod_{k=1}^7 \beta_{2k}
 \end{aligned}$$

x^{15} の項の係数は 0 なので次式および一般式が得られる。

$$\begin{aligned}
 & \cos \frac{1}{8} \pi + \cos \frac{2}{8} \pi + \cos \frac{3}{8} \pi + \cos \frac{4}{8} \pi + \cos \frac{5}{8} \pi + \cos \frac{6}{8} \pi + \cos \frac{7}{8} \pi = 0 \\
 & \sum_{k=1}^{2N-1} \cos \frac{k}{2N} \pi = 0
 \end{aligned}$$

x^{14} の項の係数から次式および一般式が得られる。

$$\begin{aligned}
 & \sin^2 \frac{1}{8} \pi + \sin^2 \frac{2}{8} \pi + \sin^2 \frac{3}{8} \pi + \sin^2 \frac{4}{8} \pi + \sin^2 \frac{5}{8} \pi + \sin^2 \frac{6}{8} \pi + \sin^2 \frac{7}{8} \pi = 4 \\
 & \sum_{k=1}^{2N-1} \sin^2 \frac{k}{2N} \pi = N
 \end{aligned}$$

この正弦値の結果から余弦値の一般式も得られる。

$$\begin{aligned}
 & \cos^2 \frac{1}{8} \pi + \cos^2 \frac{2}{8} \pi + \cos^2 \frac{3}{8} \pi + \cos^2 \frac{4}{8} \pi + \cos^2 \frac{5}{8} \pi + \cos^2 \frac{6}{8} \pi + \cos^2 \frac{7}{8} \pi = 3 \\
 & \sum_{k=1}^{2N-1} \cos^2 \frac{k}{2N} \pi = N - 1
 \end{aligned}$$

x^{14} の項の係数から次式および一般式が得られる。

$$\sum_{j=1}^7 \cos \frac{j}{8} \pi \cos \frac{k}{8} \pi = -\frac{3}{2}$$

$$\sum_{j=1}^{2N-1} \cos \frac{j}{2N} \pi \cos \frac{k}{2N} \pi = -\frac{N-1}{2}$$

x^{13} の項の係数は 0 なので次式が成立する。

$$\sum_{k=1}^7 \alpha_{2k} \beta_{2k} - 4 \sum_{j=1}^7 \alpha_{2j} \alpha_{2j} \alpha_{2k} = 0$$

$$\sum_{k=1}^7 \cos \frac{k}{8} \pi \sin^2 \frac{k}{8} \pi = 0$$

$$\sum_{k=1}^7 \cos \frac{k}{8} \pi \left(1 - \cos^2 \frac{k}{8} \pi \right) = \sum_{k=1}^7 \cos \frac{k}{8} \pi - \sum_{k=1}^7 \cos^3 \frac{k}{8} \pi = 0$$

$$\sum_{k=1}^7 \cos^3 \frac{k}{8} \pi = 0$$

これらのことも一般に成立するので

$$\sum_{k=1}^{2N-1} \cos \frac{k}{2N} \pi \sin^2 \frac{k}{2N} \pi = 0 \qquad \sum_{k=1}^{2N-1} \cos^3 \frac{k}{2N} \pi = 0$$

x^{12} の項の係数から次式が成立する。

$$\sum_{j=1}^7 \beta_{2j} \beta_{2k} + 4 \sum_{j=1}^7 \alpha_{2j} \alpha_{2j} \beta_{2k} + 16 \sum_{j=1}^7 \alpha_{2j} \alpha_{2j} \alpha_{2k} \alpha_{2j} - p^2 \sum_{k=1}^7 \beta_{2k} - 4p^2 \sum_{j=1}^7 \alpha_{2j} \alpha_{2k} = \frac{13}{2} (p^4 - 2p^2 q^2 + q^4)$$

$$\sum_{j=1}^7 \sin^2 \frac{j}{8} \pi \sin^2 \frac{k}{8} \pi = \frac{13}{2}$$

$$\sum_{k=1}^7 \sin^4 \frac{k}{8} \pi = \left(\sum_{k=1}^7 \sin^2 \frac{k}{8} \pi \right)^2 - 2 \sum_{j=1}^7 \sin^2 \frac{j}{8} \pi \sin^2 \frac{k}{8} \pi = 16 - 2 \left(\frac{13}{2} \right) = 3$$

さらに次の結果が得られる。

$$\sum_{k=1}^7 \sin^4 \frac{k}{8} \pi = \sum_{k=1}^7 \left(1 - \cos^2 \frac{k}{8} \pi \right)^2 = 7 - 2 \sum_{k=1}^7 \cos^2 \frac{k}{8} \pi + \sum_{k=1}^7 \cos^4 \frac{k}{8} \pi$$

$$\sum_{k=1}^7 \cos^4 \frac{k}{8} \pi = 3 - 7 + 2 \sum_{k=1}^7 \cos^2 \frac{k}{8} \pi = -4 + 2(3) = 2$$

一般に x^{4N-4} の項の係数から次式が得られる。

$$2N(4N-3) \frac{p^4 - 2q^2 p^2 + q^4}{16}$$

$$\sum_{j=1}^{2N-1} \sin^2 \frac{j}{2N} \pi \sin^2 \frac{k}{2N} \pi = \frac{N(4N-3)}{8}$$

特殊な行列式の漸化式

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2N-1} \sin^4 \frac{k}{2N} \pi &= \left(\sum_{k=1}^{2N-1} \sin^2 \frac{k}{2N} \pi \right)^2 - 2 \sum_{k=1}^{2N-1} \sin^2 \frac{j}{2N} \pi \sin^2 \frac{k}{2N} \pi \\ &= N^2 - 2 \left\{ \frac{N(4N-3)}{8} \right\} = \frac{3N}{4}\end{aligned}$$

また上式を利用して余弦値の和も得られる。

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2N-1} \sin^4 \frac{k}{2N} \pi &= \sum_{k=1}^{2N-1} \left(1 - \cos^2 \frac{k}{2N} \pi \right)^2 = (2N-1) - 2 \sum_{k=1}^{2N-1} \cos^2 \frac{k}{2N} \pi + \sum_{k=1}^{2N-1} \cos^4 \frac{k}{2N} \pi \\ \sum_{k=1}^{2N-1} \cos^4 \frac{k}{2N} \pi &= \frac{3N}{4} - (2N-1) + 2(N-1) = \frac{3N-4}{4}\end{aligned}$$

さらに上式を利用して余弦値の積も得られる。

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{2N-1} \cos^2 \frac{k}{2N} \pi \right)^2 &= \sum_{k=1}^{2N-1} \cos^4 \frac{k}{2N} \pi + 2 \sum_{k=1}^{2N-1} \cos^2 \frac{j}{2N} \pi \cos^2 \frac{k}{2N} \pi \\ \sum_{k=1}^{2N-1} \cos^2 \frac{j}{2N} \pi \cos^2 \frac{k}{2N} \pi &= \frac{1}{2} \left\{ (N-1)^2 - \frac{3N-4}{4} \right\} = \frac{4N^2 - 11N + 8}{8}\end{aligned}$$

定数項の値を利用して次式が得られる。

$$\prod_{k=1}^7 \sin^2 \frac{k}{2N} \pi = \frac{1}{2^8}$$

一般に定数項の値は次式になるのでそれを利用して一般式が得られる。

$$\begin{aligned}&-(a^{2N} - b^{2N})^2 \\ \prod_{k=1}^{2N-1} \sin \frac{k}{2N} \pi &= \frac{N}{2^{2N-2}}\end{aligned}$$

以上をまとめると次のようになる。

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_{k=1}^{2N-1} \cos \frac{k}{2N} \pi = 0 & \sum_{k=1}^{2N-1} \sin^2 \frac{k}{2N} \pi = N \\ \sum_{k=1}^{2N-1} \cos^2 \frac{k}{2N} \pi = N-1 & \\ \sum_{k=1}^{2N-1} \cos \frac{j}{2N} \pi \cos \frac{k}{2N} \pi = -\frac{N-1}{2} & \sum_{k=1}^{2N-1} \cos \frac{k}{2N} \pi \sin^2 \frac{k}{2N} \pi = 0 \\ \sum_{k=1}^{2N-1} \cos^3 \frac{k}{2N} \pi = 0 & \\ \sum_{k=1}^{2N-1} \cos^2 \frac{j}{2N} \pi \cos^2 \frac{k}{2N} \pi & \sum_{k=1}^{2N-1} \sin^2 \frac{j}{2N} \pi \sin^2 \frac{k}{2N} \pi \\ = \frac{4N^2 - 11N + 8}{8} & = \frac{N(4N-3)}{8} \\ \sum_{k=1}^{2N-1} \cos^4 \frac{k}{2N} \pi = \frac{3N-4}{4} & \sum_{k=1}^{2N-1} \sin^4 \frac{k}{2N} \pi = \frac{3N}{4} \\ \prod_{k=1}^{2N-1} \cos^2 \frac{k}{2N} \pi = 0 & \prod_{k=1}^{2N-1} \sin^2 \frac{k}{2N} \pi = \left(\frac{N}{2^{2N-2}} \right)^2 \end{array} \right.$$

すでに述べたように次式が成立するので正弦値の積が得られる。

$$\prod_{k=1}^{N-1} \sin^2 \frac{2k-1}{2N-1} \pi = \prod_{k=1}^{N-1} \sin^2 \frac{2k}{2N-1} \pi = \frac{2N-1}{2^{2N-2}}$$

$$\prod_{k=1}^{2N-2} \sin \frac{k}{2N-1} \pi = \frac{2N-1}{2^{2N-2}}$$

ところが次式において $N = 2M$ とすると次の結果が得られる。

$$\prod_{k=1}^{2N-1} \sin \frac{k}{2N} \pi = \prod_{k=1}^{4M-1} \sin \frac{k}{4M} \pi = \prod_{k=1}^{2M} \sin \frac{2k-1}{4M} \pi \prod_{k=1}^{2M-1} \sin \frac{2k}{4M} \pi$$

$$= \prod_{k=1}^{2M} \sin \frac{2k-1}{4M} \pi \prod_{k=1}^{2M-1} \sin \frac{k}{2M} \pi = \prod_{k=1}^{2M} \sin \frac{2k-1}{4M} \pi \frac{M}{2^{2M-2}} = \frac{2M}{2^{4M-2}}$$

$$\prod_{k=1}^{2M} \sin \frac{2k-1}{4M} \pi \frac{M}{2^{2M-2}} = \frac{2}{2^{2M}} \quad \prod_{k=1}^N \sin \frac{2k-1}{2N} \pi = \frac{1}{2^{N-1}}$$

さらに次式から次の結果が得られる。

$$\prod_{k=1}^{2N-1} \sin \frac{k}{2N} \pi = \prod_{k=1}^N \sin \frac{2k-1}{2N} \pi \prod_{k=1}^{N-1} \sin \frac{2k}{2N} \pi = \frac{N}{2^{2N-2}}$$

$$\prod_{k=1}^{N-1} \sin \frac{2k}{2N} \pi = \frac{N}{2^{N-1}}$$

$N = 2M - 1$ のときも全く同じ結果となる。以上をまとめて

$$\left\{ \begin{array}{l} \prod_{k=1}^{2N-2} \sin \frac{k}{2N-1} \pi = \frac{2N-1}{2^{2N-2}} \Rightarrow \prod_{k=1}^{N-1} \sin \frac{2k-1}{2N-1} \pi = \frac{\sqrt{2N-1}}{2^{N-1}}, \quad \prod_{k=1}^{N-1} \sin \frac{2k}{2N-1} \pi = \frac{\sqrt{2N-1}}{2^{N-1}} \\ \prod_{k=1}^{2N-1} \sin \frac{k}{2N} \pi = \frac{N}{2^{2N-2}} \Rightarrow \prod_{k=1}^N \sin \frac{2k-1}{2N} \pi = \frac{1}{2^{N-1}}, \quad \prod_{k=1}^{N-1} \sin \frac{2k}{2N} \pi = \frac{N}{2^{N-1}} \end{array} \right.$$

その他の値も角度の分子を奇数と偶数とに分離して

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{2N-1} \cos^2 \frac{k}{2N} = N-1 \Rightarrow \sum_{k=1}^N \cos^2 \frac{2k-1}{2N} = \frac{N}{2}, \quad \sum_{k=1}^{N-1} \cos^2 \frac{2k}{2N} = \frac{N}{2}-1 \\ \sum_{k=1}^{2N-1} \cos^4 \frac{k}{2N} = \frac{3N-4}{4} \Rightarrow \sum_{k=1}^N \cos^4 \frac{2k-1}{2N} = \frac{3N}{8}, \quad \sum_{k=1}^{N-1} \cos^4 \frac{2k}{2N} = \frac{3N}{8}-1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{2N-1} \sin^2 \frac{k}{2N} = N \Rightarrow \sum_{k=1}^N \sin^2 \frac{2k-1}{2N} = \frac{N}{2}, \quad \sum_{k=1}^{N-1} \sin^2 \frac{2k}{2N} = \frac{N}{2} \\ \sum_{k=1}^{2N-1} \sin^4 \frac{k}{2N} = \frac{3N}{4} \Rightarrow \sum_{k=1}^N \sin^4 \frac{2k-1}{2N} = \frac{3N}{8}, \quad \sum_{k=1}^{N-1} \sin^4 \frac{2k}{2N} = \frac{3N}{8} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^N \cos^2 \frac{2j-1}{2N} \pi \cos^2 \frac{2k-1}{2N} \pi = \frac{N(2N-3)}{16}, \quad \sum_{j=1}^{N-1} \cos^2 \frac{2j}{2N} \pi \cos^2 \frac{2k}{2N} \pi = \frac{2N^2-11N+16}{16} \\ \sum_{j=1}^N \sin^2 \frac{2j-1}{2N} \pi \sin^2 \frac{2k-1}{2N} \pi = \frac{N(2N-3)}{16}, \quad \sum_{j=1}^{N-1} \sin^2 \frac{2j}{2N} \pi \sin^2 \frac{2k}{2N} \pi = \frac{N(2N-3)}{16} \end{array} \right.$$

結 論

定義された二種類の行列式は漸化式、微分、積分で関係づけられ、正弦値および余弦値とも深く関係づけられることが解った。